Aufgabe 1

Im Zentrum einer metallischen Hohlkugel mit Innenradius R_2 und Außenradius $R_3 > R_2$ befindet sich eine weitere metallische Kugel mit Radius $R_1 < R_2$. Die innere Kugel trägt die Ladung Q und die Hohlkugel die Ladung $2Q$. Wie lautet die dielektrische Verschiebung im gesamten Raum?

Lösung zu Aufgabe 1

Das Oberflächenintegral über die dielektrische Verschiebung

$$\oint\limits_{S_V} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = Q_V$$

entspricht in allen Bereichen der eingeschlossenen Ladung Q_V. Wegen Kugelsymetrie gilt $\vec{D} = D\vec{e_r}$. Die Lösungen für die Bereiche lauten

- $r < R_1$
  Da sich im statischen Fall freie Ladungsträger auf der Oberfläche befinden, gilt
  $$D = 0 \quad .$$
- $R_1 < r < R_2$
  Die eingeschlossene Ladung ist Q und es gilt
  $$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \quad .$$
- $R_2 < r < R_3$
  Auf der Innenseite der Hohlkugel befinden sich $-Q$ Ladungen, auf der Außenseite sind $3Q$. Die Hohlkugel selbst ist somit feldfrei.
  $$D = 0$$
- $R_3 < R$
  Die eingeschlossene Ladung ist $3Q$ und es gilt
  $$D = \frac{3Q}{4\pi r^2} \quad .$$

Aufgabe 2

Ein piezoelektrischer Zylinder mit kreisrundem Querschnitt (Radius $R = 0.25\,\mathrm{cm}$, Länge $L = 1\,\mathrm{cm}$) erzeugt bei Druckbelastung $d = 10^{12}\,\mathrm{Pa}$ entlang seiner Achse die homogene (zum Druck proportionale) Polarisation $P = 1\,\mathrm{As/m^2}$. Welche Kraft ist erforderlich, um eine Spannung von $1\,\mathrm{kV}$ auf den Endflächen zu erzeugen? Die Dielektrizitätskonstante des Zylinders ist $\varepsilon = 2$.

Lösung zu Aufgabe 2

Die Spannung auf den Elektroden resultiert aus

$$U = -\int \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad .$$

Sowohl der gesamte Zylinder als auch der umgebende Raum sind ladungsfrei. Damit gilt $\nabla \circ \vec{D} = 0$ und mit $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ auch $\varepsilon\varepsilon_0\nabla \circ \vec{E} = -\nabla \circ \vec{P}$ an jedem Ort. Dies lässt sich einfach durch

$$\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = -\vec{P}$$

erfüllen, also resultiert

$$U = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\int \vec{P} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad .$$

Die Polarisation ist homogen im Zylinder und somit ergibt sich

$$P = \varepsilon\varepsilon_0\frac{U}{L} = 2 \cdot 8.8 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{As/Vm}\frac{10^3\,\mathrm{V}}{10^{-2}\,\mathrm{m}} = 1.76 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{As/m^2}$$

bzw. mit $d/P = 10^{12}\,(\mathrm{m^2Pa})/\mathrm{As}$ $d = 1.76 \cdot 10^6\,\mathrm{Pa}$, also

$$F = d \cdot \pi R^2 = 1.76 \cdot 10^6\pi(0.25 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m})^2\,\mathrm{Pa} = 11\pi\,\mathrm{N} \simeq 33\,\mathrm{N}$$

Aufgabe 3

Auf der Oberfläche eines unendlich langen feldfreien Zylinders mit Radius ρ_0 fließt der Strom J in axialer Richtung. Wie lautet das magnetische Feld außerhalb des Zylinders?

Lösung zu Aufgabe 3

Das tangentiale magnetische Feld springt an Grenzflächen um die Oberflächenstromdichte.

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j_S} = \frac{J}{2\pi\varrho_0}\vec{e_z}$$

Da das Innere des Zylinders feldfrei ist ($\vec{H}_1 = 0$), gilt für außerhalb

$$\vec{H} = \frac{J}{2\pi\varrho}\vec{e_\varphi} \quad .$$

Diese Feld ist identisch zu dem welches ein Stromfaden entlang der z-Achse erzeugt.

Aufgabe 4

Der magnetische Fluss $\iint \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{S}$ in einem Teilstück der Länge L eines unendlich langen geraden Koaxialkabels soll bestimmt werden. Im Innen- und Außenleiter fließt der Strom J homogen verteilt hin bzw. zurück. Der Radius des Innenleiters ist R_1, der Außenleiter hat die Radien R_2 und R_3. Die relative Permeabilität des Dielektrikums zwischen den Leitern ist μ. Der magnetische Fluss in der Halbebene $\Phi = 0$ zwischen den Leitern ($R_1 < \rho < R_2$) soll berechnet werden.

Lösung zu Aufgabe 4

Das magnetische Feld steht senkrecht auf der Halbebene $\Phi = 0$. Zur Berechnung des magnetischen Flusses

$$\Psi = \int_{R_1}^{R_2} \int_{l} B \mathrm{d}l \mathrm{d}\varrho$$

wird die magnetische Induktion eines Koaxialkabels

$$\vec{B} = \mu \vec{H} = \mu \frac{I}{2\pi\varrho} \vec{e_\varphi}$$

aufintegriert. Einsetzen liefert

$$\Psi = \frac{l\mu I}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad .$$

Interessant ist dieses Ergebnis für die Berechnung der längenspezifischen Induktivität (nicht Teil dieser Aufgabe)

$$\frac{L}{l} = \frac{\Psi}{lI} = \frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \quad .$$

Aufgabe 5

Ein gerader Draht der Länge $L = 10\,\mathrm{cm}$ trage den Strom $J = 1\,\mathrm{A}$. Er befindet sich in einem homogenen Magnetfeld H, das sich zeitlich harmonisch ändert. Das Magnetfeld regt den $1\,\mathrm{g}$ schweren Draht zu einer Schwingung mit $1\,\mathrm{cm}$ Amplitude bei $10\,\mathrm{Hz}$ an. Wie groß muss das Magnetfeld mindestens sein, wenn Effekte durch die Zuleitung und der Drahtquerschnitt gegenüber seiner Länge vernachlässigt werden dürfen?

Lösung zu Aufgabe 5

Der Draht schwingt harmonisch mit Amplitude $h = 1\,\mathrm{cm}$. Hier wird die Schwingung in x-Richtung gewählt, also gilt

$$x = h\sin\{\omega t\} = 1\mathrm{cm}\sin\{\omega t\}$$

wobei $\omega = 2\pi f = 20\pi\,\mathrm{s}^{-1}$ zu nehmen ist. Die maximale Kraftwirkung auf den Draht folgt aus $\vec{F} = m\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{r}$, hier also

$$\begin{aligned}\vec{F} &= F_0\sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{x} = -m\omega^2\sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{x} = -(20\pi)^2\sin\{\omega t\}\,\frac{\mathrm{g}\cdot\mathrm{cm}}{\mathrm{s}^2}\vec{e}_\mathrm{x} \\ &= -3.9\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}\sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{x}\end{aligned}$$

und damit ist die maximale Kraft $F_0 = m\omega^2 = 3.9\cdot10^{-2}\,\mathrm{N}$. Diese Kraft muss durch das Magnetfeld und den Strom erzeugt werden. Die Lorentzkraft für einen Stromfaden errechnet sich aus $\vec{F} = I\vec{L}\times\vec{B}$, wobei $\vec{L}$ in Richtung des Stromes zeigt und $I = J$ den Gesamtstrom im Faden bezeichnet. Die Kraftwirkung ist maximal, wenn Strom und Magnetfeld senkrecht zueinander stehen und wird dann zu $F = ILB$ in Richtung senkrecht zu B und I. Nimmt man also den Strom in y- Richtung an, ergibt sich das minimal erforderliche B in z- Richtung zu

$$\vec{B} = B_0\sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{z}$$

mit $B_0 = \frac{F_0}{IL} = 3.9\cdot10^{-1}\,\mathrm{N/Am} = 0.39\,\mathrm{Vs/m^2} = 0.39\,\mathrm{T}$.. Damit resultiert für das minimal nötige Magnetfeld

$$H = \frac{1}{\mu\mu_0}B_0 = \frac{1}{\mu\mu_0}\frac{F_0}{IL} \quad ,$$

mit Zahlen also im unmagnetischen Raum

$$H = \frac{0.39}{\mu_0}\,\mathrm{T}.$$

Einsetzen von $\mu_0 = 4\pi10^{-7}$ (Vs)/(Am) ergibt

$$H = 10^5\pi\,\mathrm{A/m}.$$

Aufgabe 6

Auf dem Rand eines ebenen quadratischen Gebietes der Kantenlänge $a = 1\,\mathrm{cm}$ wird das Magnetfeld $\vec{H} = \frac{J_0}{2\pi}\frac{x\vec{e}_\mathrm{y}-y\vec{e}_\mathrm{x}}{x^2+y^2}$, $J_0 = 1.5\,\mathrm{A}$ gemessen. Für die Messung wurde der Schwerpunkt des Gebietes als Ursprung des Koordinatensystems gewählt und die Achsen parallel zu den Kanten des Gebietes ausgerichtet. Kann es sein, dass die Stromdichte in dem Gebiet durch $\vec{j} = 1.5\,\mathrm{A/cm^2}\left(\mathrm{rect}\left\{\frac{x}{0.5\,\mathrm{cm}}\right\}\mathrm{rect}\left\{\frac{y}{0.5\,\mathrm{cm}}\right\}\vec{e}_\mathrm{z}\right)$ beschrieben wird? Begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung zu Aufgabe 6

Nein

Das angegebene Magnetfeld ist $\vec{H} = J_0\frac{1}{\rho}\vec{e}_\phi$, also das eines Stromfadens auf der z- Achse. Die angegebene Stromdichte ist nicht zylindersymmetrisch und kann daher eigentlich auch kein zylindersymmetrisches Magnetfeld erzeugen. Das Magnetfeld wird sich erst in großer Entfernung ρ zur z- Achse einstellen.

Überprüfung des Durchflutungsgesetzes:

$$\oint\limits_{C_S} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint\limits_{S} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S}$$

Die rechte Seite ergibt für das Flächenelement $\mathrm{d}^2\vec{S} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\vec{e}_\mathrm{z}$ den Wert

$$\iint\limits_{S} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = 1.5\,\mathrm{A}/4 = 0.375\,\mathrm{A} \quad .$$

Auf der linken Seite muss das Integral in vier Teilstücke zerlegt werden, deren Wert gleich ist. Beispielhaft sei hier mit $x_2 = -x_1 = 0.5\,\mathrm{cm}$ angegeben

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \vec{H}\{y = -0.5\,\mathrm{cm}\}\circ(\,\mathrm{d}x\vec{e}_\mathrm{x}) = \frac{J_0}{2\pi}\int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{0.5\,\mathrm{cm}}{x^2 + (0.5\,\mathrm{cm})^2}\,\mathrm{d}x = \frac{J_0}{2\pi}\left[\arctan\left\{\frac{x}{0.5\,\mathrm{cm}}\right\}\right]_{x_1}^{x_2} = J_0/4 \quad .$$

Für alle vier Seiten zusammen ergibt sich demnach $\oint\limits_{C_S} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = J_0$ was mit $J_0 = 1.5\,\mathrm{A}$ zum vierfachen Wert wie oben führt. Damit ist also das Durchflutungsgesetz nicht erfüllt.

Aufgabe 7

Eine ebene Welle mit elektrischer Feldstärke $\vec{E}_{\text{in}} = E_0 \exp\left\{-i\left(\vec{k}_{\text{in}} \circ \vec{r} - \omega t\right)\right\} \vec{e}_{\text{y}}$ breitet sich mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}_{\text{in}} = k_{\text{x}}\vec{e}_{\text{x}} + k_{\text{z}}\vec{e}_{\text{z}} = (0.6\vec{e}_{\text{x}} + (0.2 - i0.4)\vec{e}_{\text{z}})\, k_0$ im verlustbehafteten Medium 1 aus. Das Medium grenzt bei $z = 0$ an Luft. Berechnen Sie den Reflexionsfaktor der Welle.

Lösung zu Aufgabe 7

Für den Reflexionsfaktor ist es erforderlich zu wissen, ob die Welle TE- oder TM- polarisiert ist. Der Normalenvektor auf die Grenzfläche ist $\vec{e}_{\text{z}}$, der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle lautet enthält zusätzlich nur eine x- Komponente. Das elektrische Feld zeigt in y- Richtung und ist somit bezüglich der Grenzfläche TE- polarisiert. Der Reflexionsfaktor lautet also

$$r = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\omega\mu_1\mu_0} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\omega\mu_2\mu_0}\right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\omega\mu_1\mu_0} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\omega\mu_2\mu_0}\right)}$$

Die Normalkomponente von $\vec{k}_{\text{in}}$ ist $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = (0.2 - i0.4)k_0$ und die Tangentialkomponente lautet $(\vec{n}\times\vec{k}_{\text{in}})\times\vec{n} = 0.6k_0\vec{e}_{\text{x}}$. Für die Normalkomponente von $\vec{k}_{\text{tr}}$ folgt mit $k_2 = k_0$ $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_2^2 - \|\vec{n}\times\vec{k}_{\text{in}}\|^2} = 0.8k_0$. Daraus resultiert bei unmagnetischem Medium 1

$$r = \frac{(0.2 - i0.4) - 0.8}{(0.2 - i0.4) + 0.8} = -\frac{3 + i2}{5 - i2} = -\frac{11 + i16}{29}$$

Aufgabe 8

Eine monochromatische ebene Welle der Form $\vec{E} = (E_\mathrm{x}, iE_\mathrm{x}, 0)\exp\{i(kz - \omega t)\}$ breitet sich für $z < 0$ im Vakuum aus und trifft bei $z = 0$ auf ein unmagnetisches Medium mit der relativen Dielektrizitätszahl $\varepsilon > 1$, welches den kompletten Halbraum $z > 0$ ausfüllt. Wie lautet das elektrische Feld der reflektierten und transmittierten Welle? Wie sind einfallende, reflektierte und transmittierte Welle polarisiert?

Lösung zu Aufgabe 8

Es handelt sich um eine ebene Welle, die senkrecht auf eine Grenzfläche trifft. Der Amplitudenreflexionsfaktor und Amplitudentransmissionsfaktor lauten

$$\begin{aligned} r &= \frac{1 - \sqrt{\epsilon_r}}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \\ t &= \frac{2}{1 + \sqrt{\epsilon_r}} \quad . \end{aligned}$$

Einfallende, reflektierte und transmittierte Welle werden durch

$$\begin{aligned} \vec{E_{in}} &= (E_x, \mathrm{i}E_x, 0)\exp\{\mathrm{i}(kz - \omega t)\} \\ \vec{E_{ref}} &= r(E_x, \mathrm{i}E_x, 0)\exp\{\mathrm{i}(-kz - \omega t)\} \\ \vec{E_{tr}} &= t(E_x, \mathrm{i}E_x, 0)\exp\{\mathrm{i}(kz - \omega t)\} \end{aligned}$$

beschrieben. Alle drei Wellen sind zirkular polarisiert. Einfallende und transmittierte Welle sind rechts zirkular, die reflektierte Welle ist links zirkular polarisiert.

Aufgabe 9

Zerlegen Sie die Welle $\vec{E} = E_0 \frac{a\vec{e}_\mathrm{x}+b\vec{e}_\mathrm{y}+c\vec{e}_\mathrm{z}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \exp\{-i(cx - az - \omega t)\}$ bezüglich der x-z-Ebene in ihren TE- und TM- Anteil.

Lösung zu Aufgabe 9

Die x-z-Ebene hat den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{y}$. Der Wellenzahlvektor der Welle lautet $\vec{k} = c\vec{e}_\mathrm{x} - a\vec{e}_\mathrm{z}$. Somit ergibt sich der Lateralvektor zu $\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n}\times\vec{k}}{\|\vec{n}\times\vec{k}\|} = -\frac{1}{\sqrt{a^2+c^2}}(a\vec{e}_\mathrm{x} + c\vec{e}_\mathrm{z})$. Der TE-Anteil der Welle ergibt sich aus

$$\vec{E}_\mathrm{TE} = (\vec{e}_\ell \circ \vec{E})\vec{e}_\ell = E_0 \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \exp\{-(ax + bz - \omega t)\}(a\vec{e}_\mathrm{x} + c\vec{e}_\mathrm{z})$$

und der TM- Anteil ist der Rest:

$$\vec{E}_\mathrm{TM} = \vec{E} - \vec{E}_\mathrm{TE} = E_0 \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \exp\{-(ax + bz - \omega t)\}b\vec{e}_\mathrm{y} \quad .$$

Aufgabe 10

Das magnetische Vektorpotenzial in einem linearen ungeladenen Medium sei durch $\vec{A} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{R}$ mit bekannten $\vec{R}$ gegeben. Welche Größe hat $\vec{E}$ als Funktion von $\vec{R}$ unter der Voraussetzung, dass Lorentzeichung gilt?

Lösung zu Aufgabe 10

Das elektrische Feld resultiert aus $\vec{E} = -\nabla\Phi_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$. In Lorentzeichung sind Φ_{el} und $\vec{A}$ durch $\nabla \circ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}}$ miteinander verknüpft, so dass $\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = -\nabla \circ \left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{R}\right)$ und damit $\Phi_{\mathrm{el}} = -\nabla \circ (\vec{R} + \vec{R}_0)$, $\partial/\partial t\vec{R}_0 = 0$ gilt. Einsetzen ergibt

$$\vec{E} = \nabla(\nabla \circ (\vec{R} + \vec{R}_0)) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{R}$$

resultiert.

Aufgabe 11

Eine ebene Welle mit der Energie $N_{\text{in}}\hbar\omega$ und dem Impuls $N_{\text{in}}\hbar\vec{k_{\text{in}}}$ trifft aus Medium 1 (Brechzahl n_1) senkrecht auf eine Grenzfläche zu Medium 2 (Brechzahl n_2). Welchen Impuls nimmt die Grenzfläche auf? Welche Richtung hat er für $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$? Einfallende und reflektierte Energie stehen im gleichen Verhältnis wie die entsprechenden Leistungsdichten.

Lösung zu Aufgabe 11

Die Impulse der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen sind

$$\begin{aligned} \vec{p_{\text{in}}} &= N_{\text{in}}\hbar\vec{k_{\text{in}}} \\ \vec{p_{\text{ref}}} &= N_{\text{ref}}\hbar\vec{k_{\text{ref}}} \\ \vec{p_{\text{tr}}} &= N_{\text{tr}}\hbar\vec{k_{\text{tr}}} \end{aligned}$$

Da Impulserhaltung gilt, entspricht der Impuls, den die Grenzfläche aufnimmt der Summe der Impulse, die auf die Grenzfläche treffen. Reflektierte und transmittierte Welle laufen jedoch von der Grenzfläche weg, daher wird ihr Impuls mit negativem Vorzeichen berücksichtigt.

$$\vec{p} = \sum \vec{p_i} = N_{\text{in}}\hbar\vec{k_{\text{in}}} + N_{\text{ref}}\hbar\vec{k_{\text{ref}}} - N_{\text{tr}}\hbar\vec{k_{\text{tr}}}$$

Da die Welle senkrecht auf die Grenzfläche mit dem Normalenvektor $\vec{e_n}$ trifft, haben die Wellenzahlvektoren und der gesuchte Impuls $\vec{p} = p\vec{e_n}$ nur Komponenten in $\vec{e_n}$ Richtung.

$$\begin{aligned} \vec{k_{\text{in}}} = -\vec{k_{\text{ref}}} = k_0 n_1 \vec{e_n} &= \frac{n_1\omega}{c_0}\vec{e_n} = k_{\text{in}}\vec{e_n} \\ \vec{k_{\text{tr}}} = k_0 n_2 \vec{e_n} &= \frac{n_2\omega}{c_0}\vec{e_n} = k_{\text{in}}\frac{n_2}{n_1}\vec{e_n} \end{aligned}$$

Über den Intensitätsreflektionsfaktor

$$R = \frac{N_{\text{ref}}\hbar\omega}{N_{\text{in}}\hbar\omega} = \frac{N_{\text{ref}}}{N_{\text{in}}} = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2$$

und Intensitätstransmissionsfaktor

$$T = \frac{N_{\text{tr}}}{N_{\text{in}}} = 1 - R = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}$$

sind die Energien der beteiligten Wellen miteinander verknüpft. Einsetzen liefert

$$\begin{aligned}
p &= N_{\text{in}}\hbar\left(k_{\text{in}} - (1-T)(-k_{\text{in}}) - Tk_{\text{in}}\frac{n_2}{n_1}\right) \\
&= N_{\text{in}}\hbar\frac{\omega n_1}{c_0}\left(2 - T - T\frac{n_2}{n_1}\right) \\
&= N_{\text{in}}\hbar\frac{\omega n_1}{c_0}\left(2 - \frac{4n_1n_2}{(n_1+n_2)^2}(1+n_2/n_1)\right) \\
&= N_{\text{in}}\hbar\frac{\omega}{c_0}\left(\frac{2n_1^3+3n_1^2n_2-4n_1n_2^2-n_2^3}{(n_1+n_2)^2}\right) \quad .
\end{aligned}$$

Für $n_1 = 1$ und $n_2 = 2$ zeigt der Impuls der Grenzfläche in Richtung $-\vec{e_n}$.

Aufgabe 12

Welche Differentialgleichung muss $\vec{E}_0\{z\}$ erfüllen, damit

$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_0\{z\} \exp\{i(bz - \omega t)\}$$

in einem ungeladenen unmagnetischen Medium mit ortsabhängiger Brechzahl $n\{z\}$ Lösung der Wellengleichung ist?

Lösung zu Aufgabe 12

Der Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0(z) \exp\{\mathrm{i}(bz - \omega t)\}$$

muss die Wellengleichung

$$\triangle \vec{E} + \frac{\omega^2 n^2(z)}{c_0^2} \vec{E} = 0$$

erfüllen. Im Gegensatz zum klassischen Ansatz sind nun $\vec{E}_0(z)$ und $\exp\{\mathrm{i}(bz - \omega t)\}$ Funktionen von z. Wir beachten beim Ableiten die Produktregel.

$$\begin{aligned}
\triangle \vec{E} &= \triangle \left[\vec{E}_0(z) \exp\{\mathrm{i}(bz - \omega t)\}\right] \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{E}_0(z) \exp\{\mathrm{i}(bz - \omega t)\}\right]\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial z}\left(\left[\mathrm{i}b\vec{E}_0(z) + \frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_0(z)\right] \exp\{\mathrm{i}(bz - \omega t)\}\right) \\
&= \left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}_0(z) + \mathrm{i}2b\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_0(z) - b^2\vec{E}_0(z)\right] \exp\{\mathrm{i}(bz - \omega t)\}
\end{aligned} \tag{1}$$

Damit die Wellengleichung erfüllt ist, muss $\vec{E}_0(z)$ Lösung der Differenzialgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\vec{E}_0(z) + \mathrm{i}2b\frac{\partial}{\partial z}\vec{E}_0(z) + \left[\frac{\omega^2 n^2(z)}{c_0^2} - b^2\right]\vec{E}_0(z) = 0$$

sein.

Aufgabe 13

Das magnetische Feld $\vec{H} = H_0 \exp\{i((k_\mathrm{x} x - 2k_\mathrm{y} y) - \omega t)\}(\vec{e}_\mathrm{x} + 2\vec{e}_\mathrm{y})$ wird in einem linearen Medium mit Materialgrößen ε, μ gemessen. Wie lautet der zugehörige zeitgemittelte Poyntingvektor?

Lösung zu Aufgabe 13

Der zeitgemittelte Poyntingvektor folgt für monochromatische Felder aus dem komplexen Poyntingvektor $\vec{S}_c = \vec{E}\times\vec{H}^*$ zu $\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}_c\right\}$. Das elektrische Feld ergibt sich für die ebene Welle zu $\vec{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{H}\times\vec{k}$ und damit resultiert $\vec{S}_c = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}(\vec{H}\times\vec{k})\times\vec{H}^*$. Weil $\vec{H}$ und $\vec{k}$ aufeinander senkrecht stehen, ergibt sich sofort $\vec{S}_c = \frac{\vec{H}\circ\vec{H}^*}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{k} = 5|H_0|^2\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}(k_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} - 2k_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y})$ und damit

$$\overline{\vec{S}} = \frac{5}{2}|H_0|^2\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\mathrm{Re}\left\{k_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} - 2k_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y}\right\} \quad .$$

Wir zusätzlich noch $k_\mathrm{x} = 4k_\mathrm{y}$ (resultiert aus $\vec{H}\circ\vec{k} = 0$) verwendet, folgt

$$\overline{\vec{S}} = 5|H_0|^2\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\mathrm{Re}\left\{k_\mathrm{y}\right\}(2\vec{e}_\mathrm{x} - \vec{e}_\mathrm{y}) \quad .$$

Aufgabe 14

In Bereich 1 bei $|x| > \frac{d}{2}$ sei ein homogenes Dielektrikum ($\varepsilon_1 > 1$) und es gelte

$$\vec{E_1} = E_{10} \exp\left\{ i \left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c_0} z - \omega t \right) \right\} \vec{e_y} \quad .$$

Bestimmen Sie das elektrische Feld $\vec{E_2}$ in Bereich 2 bei $|x| \leq \frac{d}{2}$ mit $\varepsilon_2 = 1$.
Hinweis: Verwenden Sie den Ansatz

$$\vec{E_2} = \left(\vec{E_{21}} \exp\{ik_\mathrm{x} x\} + \vec{E_{22}} \exp\{-ik_\mathrm{x} x\} \right) \exp\left\{ i(k_\mathrm{y} y + k_\mathrm{z} z - \omega t) \right\} \quad .$$

Lösung zu Aufgabe 14

Im Dielektrikum (Bereich 1) ist eine Ebene Welle gegeben, die sich in z-Richtung ausbreitet. Ihr kann der k-Vektor

$$\vec{k_1} = \frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c_0} \vec{e_z} = k_{1z} \vec{e_z}$$

zugeordnet werden. In Bereich 2 (Vakuum) wird die Welle mit Hilfe des Vektors $\vec{k_2}$ beschrieben. Zunächst kann nur

$$|\vec{k_2}| = \frac{\omega}{c_0}$$

angegeben werden, da die transversale Komponente von $\vec{k_2}$ unbekannt ist. Wegen $\epsilon_{r1} > 1$ gilt $|\vec{k_2}| < |\vec{k_1}|$. Da die Tangentialkomponenten an der Grenzschicht jedoch gleich groß sein müssen

$$\vec{k_1} \circ \vec{e_z} = |\vec{k_1}| = \vec{k_2} \circ \vec{e_z} = k_{2z},$$

und in Bereich 2 (Vakuum) die Dispersionsrelation

$$\vec{k_2}^{\,2} = k_{2z}^2 + k_{2x}^2$$

erfüllt sein muss, ist der transversale Anteil k_{2x} imaginär. Es gilt

$$\begin{aligned} k_{2x} &= \sqrt{k_2^2 - k_{2z}^2} \\ &= \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - \frac{\omega^2 \epsilon_{r1}}{c_o^2}} \\ &= \frac{\omega}{c_0}\sqrt{1-\epsilon_{r1}} \\ &= \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_{r1}-1}(\pm i) && (2) \\ k_{2x,1} &= i\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_{r1}-1} && (3) \\ k_{2x,2} &= -i\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_{r1}-1} && (4) \\ & && (5) \end{aligned}$$

Es gibt zwei Möglichkeiten. Das elektrische Feld kann in transversaler Richtung exponentiell ansteigen oder abfallen. Physikalisch sinnvoll ist hier die exponentiell abfallende Welle, also

$$k_{2x} = k_{2x,1} = i\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_{r1}-1}\,.$$

Da in der Aufgabe zwei Grenzschichten vorhanden sind, dient als Ansatz die Überlagerung zweier von der Grenzschicht aus exponentiell abfallende Wellen (a und b).

$$\begin{aligned} \vec{E_{2a}} &= E_{20a} e^{i(\vec{k_{2a}} \circ \vec{r} - \omega t)} \vec{e_y} && = E_{20a} e^{i(k_{2z}z + k_{2x}x - \omega t)} \vec{e_y} \\ \vec{E_{2b}} &= E_{20b} e^{i(\vec{k_{2b}} \circ \vec{r} - \omega t)} \vec{e_y} && = E_{20b} e^{i(k_{2z}z - k_{2x}x - \omega t)} \vec{e_y} \\ \vec{E_2} &= \vec{E_{2a}} + \vec{E_{2b}} \end{aligned}$$

Wegen Symmetrie zur z-Achse gilt mit $E_{20a} = E_{20b} = \frac{1}{2}E_{20}$

$$\begin{aligned} \vec{E_2} &= \frac{1}{2}E_{20} e^{i(k_{2z}z - \omega t)} \left(e^{ik_{2x}x} + e^{-ik_{2x}x}\right) \vec{e_y} \\ &= E_{20} e^{i(k_{2z}z - \omega t)} \cosh\{ik_{2x}x\} \vec{e_y} \end{aligned}$$

E_{20} wird aus der Randbedingung ($E_{\tan}$stetig) bei $|x| = \frac{d}{2}$ bestimmt.

$$\begin{aligned} E_{20}\cosh\{ik_{2x}\frac{d}{2}\} &= E_{10} \\ E_{20} &= \frac{E_{10}}{\cosh\{ik_{2x}\frac{d}{2}\}} && (6) \end{aligned}$$

Einsetzen von E_{20}, k_{2z} und k_{2x} liefert gesuchte elektrische Feld in Bereich 2 (Vakuum).

$$\vec{E_2} = E_{10} \frac{\cosh\left\{\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_r - 1}x\right\}}{\cosh\left\{\frac{\omega}{c_0}\sqrt{\epsilon_r - 1}\frac{d}{2}\right\}} e^{i\left(\frac{\omega\sqrt{\epsilon_r}}{c_0}z - \omega t\right)} \vec{e_y} \tag{7}$$