Aufgabe 1

Wie lautet das elektrostatische Potential $V(\vec{r})$, das durch die Raumladungsdichte

$$\varrho(\vec{r}) = \varrho_0 \mathrm{e}^{k_x x + i k_y y}$$

erzeugt wird, wenn $V(\vec{r} = \vec{0}) = 0$ und $k_x \neq k_y$ gilt?

Lösung

Es muss die Poissongleichung

$$\triangle V(\vec{r}) = -\frac{\varrho(\vec{r})}{\epsilon_0}$$

erfüllt werden. Als Ansatz dient

$$V(\vec{r}) = V_0 \mathrm{e}^{k_1 x + i k_2 y} + V_1 \quad .$$

Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V &= -\frac{\varrho_0}{\epsilon_0} \mathrm{e}^{k_x x + i k_y y} \\ V_0 (k_1^2 - k_2^2) \mathrm{e}^{k_1 x + i k_2 y} &= -\frac{\varrho}{\epsilon_0} \mathrm{e}^{k_x x + i k_y y} \quad . \end{aligned}$$

Der Ansatz löst die DGL für $k_1 = k_x,\ k_2 = k_y,\ V_0 = -\frac{\varrho_0}{\epsilon_0 (k_1^2 - k_2^2)}$.

$$V(\vec{r}) = -\frac{\varrho_0}{\epsilon_0 (k_x^2 - k_y^2)} \mathrm{e}^{k_1 x + i k_2 y} + V_1$$

Wähle $V_1 = -V_0$, damit die Randbedingung bei $\vec{r} = \vec{0}$ erfüllt ist. Die Lösung ergibt sich zu

$$V(\vec{r}) = -\frac{\varrho_0}{\epsilon_0 (k_x^2 - k_y^2)} (\mathrm{e}^{k_1 x + i k_2 y} - 1) \quad .$$

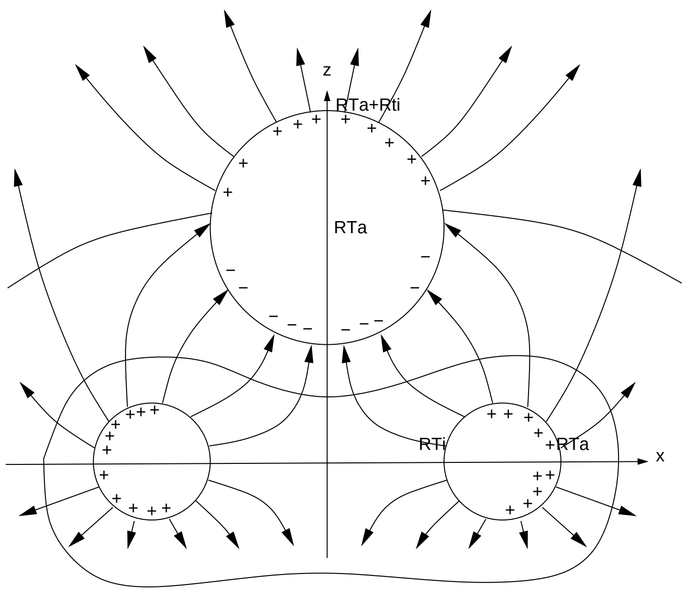
Aufgabe 2

In der xy-Ebene befindet sich ein ringförmiger Stab mit kreisförmigem Querschnitt (Torus). Seine Leitfähigkeit ist σ_{T}. Der Innenradius ist R_{Ti} und der Außenradius $R_{\mathrm{Ta}} = 2 \cdot R_{\mathrm{Ti}}$ mit Mittelpunkt im Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems. Der Torus trägt die Ladung Q. Bei $z = R_{\mathrm{Ta}}$ befindet sich eine ungeladene Metallkugel mit Radius $R_{\mathrm{K}} = R_{\mathrm{Ti}}$ und idealer Leitfähigkeit. Skizzieren Sie die sich einstellende Ladungsverteilung und die elektrischen Feldlinien sowie Äquipotenziallinien in der xz-Ebene.

Lösung

Da sich die Ladung im Torus Ring abstößt, konzentriert sie sich auf die Aussenseite. In der Metallkugel bei $z = R_{Ta}$ werden sowohl positive als auch negative Ladungen derart induziert, dass sie im Inneren feldfrei ist. Positive elektrische Ladungen stellen Quellen des elektrischen Feldes dar. Bei negativen elektrischen Ladungen enden elektrische Feldlinien. Da insgesamt mehr positive als negative Ladungen gegeben sind, gibt es mehr Quellen als Senken für das elektrische Feld. Zwangsläufig enden die meisten Feldlinien im Unendlichen. Äquipotentiallinien stehen immer senkrecht auf den Feldlinien. Die Oberfläche der Kugel und die Oberfläche des Torus Ringes sind ebenfalls Äquipotentiallinien.

Skizze:



Aufgabe 3

In einem realen Dielektrikum fließt ein Strom mit Stromdichte $\vec{j} = j_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right)\cos(\omega t)\vec{e_x}$. Welche Ladung $Q(t)$ ist im Würfel mit Kantenlänge a gespeichert? Sein Mittelpunkt befindet sich im Ursprung und seine Kanten sind parallel zu den Koordinatenachsen ausgerichtet. Zum Zeitpunkt $t = 0$ ist er ungeladen.

Lösung

Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \circ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0$$

folgt für die Ladung $Q(t)$ der Zusammenhang

$$\frac{\partial}{\partial t}Q(t) = -\iint \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{A} \quad .$$

Beachtet man, dass der Strom nur durch 2 von 6 Flächen des Würfels fliesst, und dass $\mathrm{d}^2\vec{A}$ nach aussen zeigt, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}Q(t) &= -2a^2 j_0 \cos(\omega t) \\
Q(t) &= -2a^2 j_0 \int \cos(\omega t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{-2a^2 j_0 \sin(\omega t)}{\omega} \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Gegeben ist das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0\vec{e}_\mathrm{x}\left(\cosh\{\alpha y\}\cos\{\omega t - \beta z\} - \sinh\{\alpha y\}\cos\{\omega t - \beta z\}\right) \quad .$$

im freien Raum. Welcher Zusammenhang besteht zwischen α und β, wenn $\vec{E}$ die homogene Wellengleichung erfüllt?

Lösung

Die homogene Wellengleichung lautet

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \quad .$$

Die Zeitableitung ergibt

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\omega^2\vec{E}$$

und aus der räumlichen Ableitung resultiert

$$\Delta\vec{E} = (\alpha^2 - \beta^2)\vec{E} \quad .$$

Im freien Raum ist $1/c^2 = \varepsilon_0\mu_0$ und somit ergibt sich die Bedingung

$$\alpha^2 - \beta^2 + \omega^2\varepsilon_0\mu_0 = 0 \quad .$$

Aufgabe 5

Zwei je $m = 1\,\mathrm{kg}$ schwere und mit $Q = 10\,\mathrm{mC}$ geladene Kugeln mit Durchmesser $D = 10\,\mathrm{cm}$ und idealer Leitfähigkeit fliegen aus dem Unendlichen kommend mit den Geschwindigkeiten $v = \pm 100\,\mathrm{m/s}$ direkt aufeinander zu. Werden die beiden Kugeln zusammenstoßen? Begründen Sie Ihre Antwort. Skizzieren Sie außerdem Ladungsträgerdichte, elektrische Feldlinien und Äquipotenziallinien kurz bevor die Kugeln ihre Flugrichtung umkehren. Hinweis: In welchem Abstand der Ladungsschwerpunkte ist die kinetische Energie vollständig in potentielle Energie umgewandelt?

Lösung

Solange die Kugeln noch soweit voneinander entfernt sind, kann die Feldenergie vernachlässigt werden. Die gesamte Energie ist in der Bewegung der Kugeln. Sie beträgt pro Kugel $\frac{1}{2}mv^2$. Die Gesamtenergie beträgt

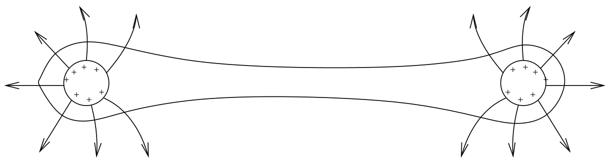
$$\begin{aligned} W_{\mathrm{kin}} &= 2 \cdot \frac{1}{2}mv^2 \\ &= 1\,\mathrm{kg} \cdot (100\,\mathrm{m/s})^2 = 10\,\mathrm{kJ} \quad . \end{aligned}$$

Die Ladungen sind innerhalb der Kugel beweglich. Sollten die Kugeln zusammenstossen, so hätten die Ladungsschwerpunkte jedoch einen Abstand von nicht mehr als $2d$. Dann wäre die potentielle Feldenergie

$$\begin{aligned} W_{\mathrm{pot}} &= \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 2d} \\ &= \frac{10^{-4}\mathrm{C}^2}{4\pi\frac{1}{36\pi}10^{-9}\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}2\cdot 10^{-1}\mathrm{m}} = 4500\,\mathrm{kJ} \quad . \end{aligned}$$

Die potentielle Feldenergie im Falle des Zusammenstosses ist deutlich grösser als die kinetische Energie. Die Kugeln werden also nicht zusammenstossen, sondern weit voneinander entfernt ihre Flugrichtungen umkehren.

Skizze:



Aufgabe 6

Ein Medium mit $\varepsilon = 2$ und $\mu = 2$ befindet sich im Halbraum $y \geq 5$. In dem Medium wird das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_\mathrm{z} \exp\{i(Ax + By - \omega t)\}$$

gemessen. Wie lautet das magnetische Feld an der strom- und ladungsfreien Grenzfläche im angrenzenden freien Halbraum?

Lösung

Zur Bestimmung der magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche müssen die Stetigkeitsbedingungen beachtet werden:

$$\begin{aligned} \vec{n}\times(\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{y=5} &= 0 \\ \vec{n}\circ(\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\Big|_{y=5} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Das magnetische Feld errechnet sich aus dem elektrischen Feld mit

$$\vec{H}_2 = \frac{1}{\omega\mu_0\mu_2}(\vec{k}_2\times\vec{E}_2)$$

und $\vec{k}_2 = A\vec{e}_\mathrm{x} + B\vec{e}_\mathrm{y}$ zu

$$\vec{H}_2 = \frac{E_0}{\omega\mu_0\mu_2}(B\vec{e}_\mathrm{x} - A\vec{e}_\mathrm{y})\exp\{i(Ax + By - \omega t)\} \quad .$$

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{y}$. Das Feld im Bereich 1 resultiert allgemein aus $\vec{H}_1 = (\vec{n}\circ\vec{H}_1)\vec{n} + (\vec{n}\times\vec{H}_1)\times\vec{n}$. Die tangentiale Komponente an der Grenzfläche folgt direkt aus der ersten Stetigkeitsbedingung zu

$$(\vec{n}\times\vec{H}_1)\times\vec{n} = (\vec{n}\times\vec{H}_2)\times\vec{n} = \frac{E_0}{\omega\mu_0\mu_2}B\exp\{i(Ax + 5B - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{x}$$

und die Normalkomponente ergibt sich aus der zweiten Stetigkeitsbedingung zu

$$\mu_1(\vec{n}\circ\vec{H}_1)\vec{n} = \mu_2(\vec{n}\circ\vec{H}_2)\vec{n} = -A\frac{E_0}{\omega\mu_0}\exp\{i(Ax + 5B - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

und mit $\mu_2 = 2$ resultiert

$$\vec{H}_1 = \frac{E_0}{2\omega\mu_0}(B\vec{e}_\mathrm{x} - 2A\vec{e}_\mathrm{y})\exp\{i(Ax + 5B - \omega t)\} \quad .$$

Aufgabe 7

Im Ursprung des Koordinatensystems befindet sich eine Kugel vom Radius ρ_0. Für $z > 0$ wird sie von der Stromdichte

$$\vec{j} = j_0 \frac{\sqrt{\rho^2 + z^2}^3 z}{\rho_0^2 \rho^2} \vec{e_\Phi}$$

(Angaben in Zylinderkoordinaten) durchflossen. Wie lautet die magnetische Induktion $\vec{B}$ bei $\vec{r} = \vec{0}$?

Lösung

Die Anordnung ist rotationssymmetrisch zur z-Achse. Daher gilt

$$\vec{B} = B_z \vec{e_z} \quad .$$

Das Biot-Savart Gesetz wird in Zylinderkoordinaten ausgewertet, dabei ist zu beachten, dass die radialen Integrationsgrenzen von z' abhängen.

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{z'=0}^{\rho_0} \int\limits_{\rho'=0}^{\sqrt{\rho_0^2 - z'^2}} \int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} \frac{j_0 \frac{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}^3 z'}{\rho_0^2 \rho'^2} \vec{e_{\Phi'}} \times (-\rho' \vec{e_{\rho'}} - z' \vec{e_{z'}})}{(\rho'^2 + z'^2)^{3/2}} \mathrm{d}^3 r' \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{z'=0}^{\rho_0} \int\limits_{\rho'=0}^{\sqrt{\rho_0^2 - z'^2}} \int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} \frac{j_0 z'}{\rho_0^2 \rho'^2} (\rho' \vec{e_{z'}} - z' \vec{e_{\rho'}}) \rho' \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}z' \mathrm{d}\Phi'\end{aligned}$$

Wegen $\vec{B} = B_z \vec{e_z}$ (die Integration über $\vec{e}_{\rho'}$ ergibt Null) betrachten wir lediglich die z Komponente.

$$\begin{aligned}B_z &= \frac{\mu j_0}{2\rho_0^2} \int\limits_{z'=0}^{\rho_0} \int\limits_{\rho'=0}^{\sqrt{\rho_0^2 - z'^2}} \frac{z' \rho'}{\rho'^2} \rho' \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}z' \\ &= \frac{\mu j_0}{2\rho_0^2} \int\limits_{z'=0}^{\rho_0} z' \sqrt{\rho_0^2 - z'^2} \mathrm{d}z'\end{aligned}$$

Substitution $u = \sqrt{\rho_0^2 - z'^2}$ liefert $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z'} = \frac{-2z'}{2u}$ und somit

$$
\begin{aligned}
B_z &= \frac{-\mu j_0}{2\rho_0^2} \int\limits_{z'=0}^{\rho_0} u^2 \mathrm{d}u = \frac{-\mu j_0}{2\rho_0^2} \int\limits_{u=\rho_0}^{0} u^2 \mathrm{d}u \\
&= \frac{-\mu j_0}{2\rho_0} \left[\frac{u^3}{3}\right]_{\rho_0}^{0} \\
&= \frac{\mu j_0 \rho_0}{6} \quad .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 8

Ein reales Dielektrikum mit ε, μ, σ grenzt bei $x = 3$ an Luft. Im Dielektrikum ($x \leq 3$) fließt die Stromdichte

$$
\vec{j} = j_0(\vec{e}_\mathrm{x} + \vec{e}_\mathrm{y}) \sin\{ax\} \cos\{bz - \omega t\} \quad .
$$

Welche Ladungsdichte stellt sich an der Grenzfläche ein?

Lösung

Die Ladungsdichte an der Grenzfläche ergibt sich aus den Stetigkeitsbedingungen:

$$
\begin{aligned}
\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{x=3} &= \varrho_\mathrm{s} \\
\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1)\Big|_{x=3} &= -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{s}
\end{aligned}
$$

mit dem Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{x}$. Über die dielektrische Verschiebung im Medium 2 ($x > 3$) kann zunächst keine Aussage gemacht werden. Allerdings ist bekannt, dass dort keine Stromdichte vorhanden sein darf. Damit resultiert sofort

$$
\frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{s} = \vec{j}_1)\Big|_{x=3} = j_0 \sin\{3a\} \cos\{bz - \omega t\} \quad ,
$$

also

$$
\varrho_\mathrm{s} = -\frac{j_0}{\omega} \sin\{3a\} \sin\{bz - \omega t\} \quad .
$$

Aufgabe 9

In einem unendlich langem entlang der z-Achse ausgerichtetem Zylinder mit Radius ρ_0 herrscht die Stromdichte $\vec{j} = j_0 \exp\{\rho/\rho_0\} \vec{e_\Phi}$. Wie lautet die magnetische Induktion $\vec{B}$ in der Zylindermitte?

Hinweis: $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2+x^2}}$

Lösung

Das Biot-Savart Gesetz lautet

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \mathrm{d}^3\vec{r'} \quad .$$

O.B.d.A betrachten wir das $\vec{B}$-Feld bei $\vec{r} = \vec{0}$. Die Integration wird in Zylinderkoordinaten durchgeführt.

$$\vec{B} = \frac{\mu}{4\pi} \int\limits_{z'=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho'=0}^{\rho_0} \frac{j_0 \mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \vec{e_{\Phi'}} \times \left(-\rho' \vec{e'_\rho} - z' \vec{e_{z'}}\right)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}^3} \rho' \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}\Phi' \mathrm{d}z'$$

Nach der Auswertung des Kreuzproduktes bleibt

$$\vec{B} = \frac{\mu j_0}{4\pi} \int\limits_{z'=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho'=0}^{\rho_0} \frac{\mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \left(\rho' \vec{e_{z'}} - z' \vec{e'_\rho}\right)}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}^3} \rho' \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}\Phi' \mathrm{d}z' \quad .$$

Die Integration des ungeraden Summanden $z'\vec{e'_\rho}$ über z' liefert 0, und es bleibt

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu j_0}{4\pi} \int\limits_{z'=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Phi'=0}^{2\pi} \int\limits_{\rho'=0}^{\rho_0} \frac{\mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \rho'^2 \vec{e_{z'}}}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}^3} \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}\Phi' \mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu j_0}{2} \int\limits_{z'=-\infty}^{\infty} \int\limits_{\rho'=0}^{\rho_0} \frac{\mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \rho'^2 \vec{e_{z'}}}{\sqrt{\rho'^2 + z'^2}^3} \mathrm{d}\rho' \mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu j_0 \vec{e_z}}{2} \int\limits_{\rho'=0}^{\rho_0} \mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \rho'^2 \left[\frac{z'}{\rho'^2 \sqrt{\rho'^2 + z'^2}} \right]_{z'=-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\rho' \\
&= \mu j_0 \vec{e_z} \int\limits_{\rho'=0}^{\rho_0} \mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \mathrm{d}\rho' \\
&= \mu j_0 \vec{e_z} \left[\rho_0 \mathrm{e}^{\rho'/\rho_0} \right]_0^{\rho_0} \\
&= \mu j_0 \rho_0 \left(\mathrm{e} - 1\right) \vec{e_z} \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Die Grenzfläche $y = 0$ liegt zwischen den Medien ε_1, μ_1 $(y \leq 0)$ und ε_2, μ_2. Im Bereich $y \leq 0$ breitet sich eine Welle mit Vektorpotenzial

$$\vec{A} = A_0 \vec{e}_\mathrm{z} \exp\{i(ax + by - \omega t)\}$$

aus. Unter welchem Winkel (gemessen gegen die Flächennormale) erfolgt die Ausbreitung des elektrischen Feldes im Bereich $y > 0$?

Lösung

Zur Bestimmung des Ausbreitungswinkels muss die Stetigkeit der Ausbreitungsvektoren herangezogen werden. Der Ausbreitungsvektor der einfallenden Welle kann direkt in der Exponentialfunktion des Vektorpotenzials abgelesen werden: $\vec{k}_{\mathrm{in}} = a\vec{e}_{\mathrm{x}} + b\vec{e}_{\mathrm{y}}$ Der Ausbreitungswinkel ergibt sich entweder aus der Tangentialkomponente zu

$$k_{\mathrm{tr}} \sin\Theta = \|(\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{tr}})\times\vec{n}\|$$

oder aus der Normalkomponente zu

$$k_{\mathrm{tr}} \cos\Theta = \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} \quad .$$

Hier ist $k_{\mathrm{tr}} = k_2 = \omega\mu_0\varepsilon_0\mu_2\varepsilon_2$. Die Tangentialkomponente ist einfacher zu berechnen, da gilt

$$\vec{n}\times(\vec{k}_{\mathrm{tr}} - \vec{k}_{\mathrm{in}}) = 0$$

und damit direkt

$$k_2 \sin\{\Theta\} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_2\varepsilon_2}\,\sin\{\Theta\} = \|a\vec{e}_{\mathrm{x}}\| = a$$

folgt. Es resultiert

$$\Theta = \arcsin\{\frac{a}{k_2}\} = \arcsin\{\frac{a}{\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0\mu_2\varepsilon_2}}\} \quad .$$

Alternativ hätte auch der Weg über die Normalkomponente gewählt werden können: sie resultiert aus

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{k_2^2 - \|\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{in}}\|^2} = \sqrt{k_2^2 - a^2} \quad .$$

Damit ergibt sich

$$\cos\{\Theta\} = \frac{\sqrt{k_2^2 - a^2}}{k_2} = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{k_2}\right)^2} \quad ,$$

also

$$\Theta = \arccos\left\{\sqrt{1 - \left(\frac{a}{k_2}\right)^2}\right\} \quad .$$

Aufgabe 11

Eine ebenen Welle mit elektrischer Feldstärke $\vec{E} = E_0\vec{e}_\mathrm{y} \exp\{i(ax + bz - \omega t)\}$ fällt aus dem freien Raum auf die ebene strom- und ladungsfreie Grenzfläche $z = 5$ zum Medium mit Materialgrößen $\varepsilon = 1$ und $\mu = 3$. Wie müssen $a \neq 0$ und $b \neq 0$ zusammenhängen, damit die Welle nicht reflektiert wird?

Lösung

Die tangentialen Komponenten von $\vec{k}$ bleiben erhalten. Dazu Bestimmung von $\vec{k}_\mathrm{in} = a\vec{e}_\mathrm{x} + b\vec{e}_\mathrm{z}$. Der Normalenvektor auf die Grenzfläche ist $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{z}$. Somit lautet die tangentiale Komponente $\vec{n}\times\vec{k}_\mathrm{in}\times\vec{n} = a\vec{e}_\mathrm{x}$. Bei der Welle handelt es sich bezüglich der Grenzfläche um eine TE- Welle, weil $\vec{n}\times\vec{E} = 0$ bei $\vec{n} \circ \vec{k} \neq 0$ erfüllt ist. Keine Reflexion bedeutet für eine TE- Welle, dass

$$\frac{1}{\mu_1}\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{in} = \frac{1}{\mu_2}\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr} =$$

erfüllt sein muss. Hier ist $\mu_1 = 1$ und $\mu_2 = 3$. Somit ergibt sich $\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{in} = b = \frac{1}{3}\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr}$, also $\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr} = 3b$. Aus der Dispersionsrelation in Medium 2 folgt $\|\vec{k}_\mathrm{tr}\|^2 = a^2 + (3b)^2 = k_0^2\mu_2\varepsilon_2 = 3k_0^2$. Auf der anderen Seite ergibt die Dispersionsrelation in Medium 1 $a^2 + b^2 = k_0^2$. Damit ergibt sich nach Umstellen $b = \frac{1}{2}k_0 = \frac{\omega}{2}\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$. und $a = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0$. Das Verhältnis lautet also $\frac{a}{b} = \sqrt{3}$.