Aufgabe 1

In Punkt $\vec{r}_1 = (a \cdot \vec{e}_\mathrm{x} + b \cdot \vec{e}_\mathrm{y} + c \cdot \vec{e}_\mathrm{z})$ befindet sich eine Ladung $Q_1 = 2Q_0$. Bestimmen Sie eine weitere Ladung Q_2 so (Position und Grösse), dass die Feldlinien auf der xy-Ebene senkrecht stehen.

Lösung zu Aufgabe 1

$$Q_2 = -2Q_0$$
$$\vec{r}_2 = (a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y - c \cdot \vec{e}_z)$$

Aufgabe 2

In einem Metallrohr mit rechteckigem Querschnitt $a \times b$ wird das Potenzial

$$V = V_0 \sin\left\{\pi \frac{x}{b}\right\} \sinh\{\alpha y\} \sin\left\{\pi \frac{z}{a}\right\}$$

gemessen. Wie muss das Koordinatensystem gewählt werden, damit diese Aussage zutrifft? Welche Bedingung ist an α zu stellen, damit V eine Lösung der Laplacegleichung ist?

Lösung zu Aufgabe 2

Das Koordinatensystem muss so gelegt werden, dass die Randbedingungen für das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E} \quad = \quad -V_0 \Bigg(& \pi \frac{1}{b} \cos\left\{\pi \frac{x}{b}\right\} \sinh\{\alpha y\}\, \vec{e}_\mathrm{x} \sin\left\{\pi \frac{z}{a}\right\} \vec{e}_\mathrm{x} + \\ & \alpha \sin\left\{\pi \frac{x}{b}\right\} \cosh\{\alpha y\} \sin\left\{\pi \frac{z}{a}\right\} \vec{e}_\mathrm{y} + \\ & \pi \frac{1}{a} \sin\left\{\pi \frac{x}{b}\right\} \sinh\{\alpha y\}\, \vec{e}_\mathrm{x} \cos\left\{\pi \frac{z}{a}\right\} \vec{e}_\mathrm{z} \Bigg)\end{aligned}$$

und das Potenzial erfüllt sind. Jeweils auf den Rohrwänden muss das Potenzial und tangentiale elektrische Feld verschwinden. Das Potenzial verschwindet dann, wenn die z-Achse so gelegt wird, dass sie in Richtung der Seite des Rohres mit Breite a liegt. Die eine Wand liegt z.B. bei $z = z_0$ und die andere Wand entsprechend bei $z = z = +a$. Das Potenzial muss auf beiden

Seiten gleich sein (die Rohrwand ist eine Äquipotenzialfläche). Damit ergibt sich für z_0 die Bestimmungsgleichung

$$\sin\left\{\pi\frac{z_0}{a}\right\} = \sin\left\{\pi\frac{z_0+a}{a}\right\} \quad ,$$

also $z_0 = ma, m \in \mathbb{Z}$. Hier wird $m = 0$ gewählt. Mit der gleichen Argumentation wird die x-Achse parallel zu der Seite mit Breite b gelegt. Der Ursprung $x_0 = nb, n \in \mathbb{Z}$ wird ebenfalls auf $x_0 = 0$ gelegt. Für die Achse des Rohres bleibt dann noch die y-Richtung.
Mit dieser Wahl der Achsen ist automatisch auch gewährleistet, dass das tangentiale elektrische Feld auf den Rohrwänden (also z.B. $(\vec{e}_\mathrm{x}\times\vec{E})\times\vec{e}_\mathrm{x}\Big|_{x=0} = 0$) verschwindet.
Anwenden der Laplacegleichung $\Delta V = 0$ ergibt

$$V_0 \sin\left\{\pi\frac{x}{b}\right\}\sinh\{\alpha y\}\sin\left\{\pi\frac{z}{a}\right\}\left(-\left(\pi\frac{1}{b}\right)^2 + \alpha^2 - \left(\pi\frac{1}{a}\right)^2\right) = 0$$

Da die Laplacegleichung im gesamten Rohr, und nicht nur auf den Wänden erfüllt sein muss, ist

$$\alpha = \pm\sqrt{\left(\pi\frac{1}{b}\right)^2 + \left(\pi\frac{1}{a}\right)^2}$$

zu wählen.

Aufgabe 3

Im Vakuum befinden sich bei $\vec{r} = d\cdot\vec{e}_\mathrm{x}$ eine Punktladung Q_0 und entlang der z-Achse eine Linienladung ϱ_L. Wie lautet das zugehörige elektrostatische Potential und das elektrische Feld im gesamten Raum, wenn $V\{\vec{r} = -d\cdot\vec{e}_\mathrm{x}\}) = 0$ gilt?

Lösung zu Aufgabe 3

Das elektrische Feld ergibt sich aus der Summe von elektrischem Feld der Punktladung und elektrischem Feld der Linienladung. Beide sind bekannt und lassen sich direkt angeben.

$$\begin{aligned}
\vec{E_{\mathrm{PL}}} &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}-d\vec{e}_x}{|\vec{r}-d\vec{e}_x|} \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{(x-d)\vec{e}_x+y\vec{e}_y+z\vec{e}_z}{((x-d)^2+y^2+z^2)^{3/2}} \\
\vec{E_{\mathrm{LL}}} &= \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\varrho}\vec{e}_\varrho \\
&= \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(\cos\Phi\vec{e}_x+\sin\Phi\vec{e}_y) \\
&= \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\left(\frac{x}{\varrho}\vec{e}_x+\frac{y}{\varrho}\vec{e}_y\right) = \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\frac{1}{x^2+y^2}(x\vec{e}_x+y\vec{e}_y) \\
\vec{E} &= \vec{E}_{\mathrm{PL}}+\vec{E}_{\mathrm{LL}}
\end{aligned}$$

Die elektrostatischen Potentiale von Punkt- und Linienladung sind jeweils nur auf eine Konstante genau bestimmt und lauten

$$\begin{aligned}
V_{\mathrm{PL}} &= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left((x-d)^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}+C_{\mathrm{PL}} \\
V_{\mathrm{LL}} &= \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln(\varrho_0/\varrho)+C_{\mathrm{LL}} \\
&= \frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln(\varrho_0/\sqrt{x^2+y^2})+C_{\mathrm{LL}} \\
V &= V_{\mathrm{PL}}+V_{\mathrm{LL}}+C \\
&= \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left((x-d)^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}+\frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln(\varrho_0/\sqrt{x^2+y^2})+C \quad .
\end{aligned}$$

Mit der gegebenen Randbedingung lässt sich die Konstante C ermitteln und das Ergebnis lautet somit

$$V = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{\left((x-d)^2+y^2+z^2\right)^{1/2}}+\frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln(\varrho_0/\sqrt{x^2+y^2})-\frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 d}-\frac{\varrho_L}{2\pi\epsilon_0}\ln(\varrho_0/d) \quad .$$

Aufgabe 4

In der xy-Ebene befindet sich eine Scheibe mit Mittelpunkt auf der z-Achse, Radius R und der Stromverteilung $\vec{j}_{\mathrm{V}} = j_{\mathrm{S}}\cdot\frac{\varrho}{R}\cdot\delta\{z\}\vec{e}_\phi$. Bestimmen Sie die magnetische Kraftflussdichte auf der z-Achse.

Hinweis:

$$\int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x = \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

Lösung zu Aufgabe 4

$\vec{r} = z \cdot \vec{e}_z$
$\vec{j}_V = j_{SO}\frac{\rho}{R} \cdot \delta_{\{z\}} \cdot \vec{e}_\phi$ für $0 \leq \rho \leq R \leq$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int\int\int \frac{\vec{j}_V \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_{\rho'=0}^{R}\int_{\phi'=0}^{2\pi} j_{SO} \cdot \frac{\rho'}{R} \cdot \frac{\vec{e}_\phi \times ((z-z')\vec{e}_z - \rho'\vec{e}_\rho)}{((z-z')^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} \rho' d\phi' d\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}(\vec{e}_z) j_{SO}\frac{2\pi}{R}\int_{\rho'=0}^{R} \frac{\rho'^3}{(z^2+\rho'^2)^{\frac{3}{2}}} d\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{2}\frac{j_{SO}}{R}(\vec{e}_z)\left[\frac{\rho'^2+2z^2}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\right]_0^R \\
&= \frac{\mu_0 j_{SO}}{2R}\left(\frac{R^2+2z^2}{\sqrt{R^2+z^2}} - 2z\right)(\vec{e}_z)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Gegeben ist das Vektorpotenzial

$$\vec{A} = A_0 \exp\{i(kx+\beta z-\omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

Der Raum lässt sich durch homogene Materialkonstanten μ, ϵ beschreiben. Wie lautet die zugehörige magnetische Induktion $\vec{B}$? Welches elektrische Feld $\vec{E}$ resultiert?

Lösung zu Aufgabe 5

Die magnetische Induktion resultiert direkt aus $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ zu

$$\vec{B} = iA_0 \exp\{i(kx+\beta z-\omega t)\}(k\vec{e}_\mathrm{z} - \beta\vec{e}_\mathrm{x}) \quad .$$

Das elektrische Feld ergibt sich aus der Maxwellgleichung

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \quad .$$

Hier gilt nach Aufgabenstellung $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ und $\vec{D} = \epsilon\epsilon_0\vec{E}$, so dass

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = -i\omega\epsilon\epsilon_0\vec{E}$$

ersetzt werden kann und für

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{k^2+\beta^2}{\mu\mu_0}A_0\exp\{i(kx+\beta z-\omega t)\}\vec{e}_{\mathrm{y}} \quad ,$$

woraus

$$\vec{E} = i\frac{k^2+\beta^2}{\omega\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}A_0\exp\{i(kx+\beta z-\omega t)\}\vec{e}_{\mathrm{y}} = i\frac{k^2+\beta^2}{\omega\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0}\vec{A}$$

resultiert.

Aufgabe 6

Wie lautet das magnetische Feld $\vec{B}$ bei $\vec{r} = d\cdot\vec{e}_{\mathrm{z}}$, das von der Stromdichte

$$\vec{j}\{\vec{r},t\} = j_0\,\mathrm{rect}\{x/d\}\,\delta\{y\}\,\delta\{z\}\,\mathrm{rect}\{t/t_0\}\vec{e}_{\mathrm{y}}$$

erzeugt wird? Verwenden Sie die quasistatische Näherung.

Hinweis:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2(a^2+x^2)^{1/2}}$$

Lösung zu Aufgabe 6

In der Quasistatik kann weiterhin mit Biot-Savart gerechnet werden, die Zeitabhängigkeit überträgt sich auf das berechnete B-Feld. In der Praxis ist diese Näherung natürlich nur für niedrige Frequenzen erlaubt. Laut Aufgabenstellung soll diese Näherung hier benutzt werden, obwohl die angegebene Zeitabhängigkeit (rect) aufgrund der Unstetigkeiten beliebig hohe Frequenzanteile enthält. Das Biot-Savart Gesetz lautet

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\frac{\vec{j}_V\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\mathrm{d}^3r' \quad .$$

Es soll das B-Feld nur bei $r = d\vec{e}_z$ berechnet werden. Für $\vec{j}_V$ gilt

$$\vec{j}_V = j_0\mathrm{rect}(x/d)\delta(y)\delta(z)\mathrm{rect}(t/t_0)\vec{e}_y \quad .$$

Einsetzen liefert

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j_0 \mathrm{rect}(x'/d)\delta('y)\delta('z)\mathrm{rect}(t/t_0)\vec{e}_y \times (d\vec{e}_z - \vec{r}')}{|d\vec{e}_z - \vec{r}'|^3} \mathrm{d}^3 r' \quad .$$

Die Integration über die Diracs ist schnell erledigt und es bleibt

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \mathrm{rect}(t/t_0) \int\limits_{x'=-d/2}^{d/2} \frac{\vec{e}_y \times (d\vec{e}_z - x'\vec{e}_x)}{(d^2 + x'^2)^{3/2}} \mathrm{d}x' \quad .$$

Die Integration über $-x'\vec{e}_x$ ergibt 0, da der Integrand ungerade ist und die obere Integrationsgrenze genau die negative untere Integrationsgrenze ist. Es bleibt also noch

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0 j_0 d\vec{e}_x}{4\pi} \mathrm{rect}(t/t_0) \int\limits_{x'=-d/2}^{d/2} \frac{\mathrm{d}x'}{(d^2 + x'^2)^{3/2}} = \left[\frac{x'}{d^2\sqrt{d^2 + x'^2}} \right]_{x'=-d/2}^{d/2} \\ &= \frac{\mu_0 j_0 \mathrm{rect}(t/t_0)}{4\pi} \frac{2}{\sqrt{5}d} \vec{e}_x \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 7

An den Punkten $\vec{r}_1 = a \cdot \vec{e}_\mathrm{x}$ und $\vec{r}_2 = -a \cdot \vec{e}_\mathrm{x}$ befinden sich zwei ortsfeste Punktladungen $Q_1 = Q_2 = Q$. In Punkt $\vec{r}_3 = 3a \cdot \vec{e}_z$ befindet sich eine bewegliche Punktladung mit der Masse m, Ladung $Q_3 = -2Q$ und Geschwindigkeit $\vec{v} = 0$. Bestimmen Sie die Richtung und maximale Geschwindigkeit der beweglichen Punktladung Q_3.

Lösung zu Aufgabe 7

Richtung nach loslassen: $-\vec{e}_z$

maximale Geschwindigkeit bei $z = 0$

maximale Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} -2Q(V_{\{z=3a\}} - V_{\{z=0\}}) &= \frac{1}{2} m v^2 \\ V_{\{z=0\}} &= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{a} \\ V_{\{3a\}} &= \frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{max} &= \sqrt{\frac{4Q}{m}\frac{2Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)} \\ &= Q\sqrt{\frac{2}{m\pi\varepsilon_0 a}\left(1-\frac{1}{\sqrt{10}}\right)} \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Welche Bedingung muss an die Koeffizienten des magnetischen Vektorpotenzials

$$\vec{A} = A_0 \cos\{k_\mathrm{y} y\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \vec{e}_\mathrm{x}$$

gestellt werden, damit die resultierenden Felder eine Lösung der homogenen Wellengleichung darstellen?

Lösung zu Aufgabe 8

Die Wellengleichung für die magnetische Induktion lautet

$$\Delta\vec{B} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \quad ,$$

wobei $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ benutzt wird. Es ergibt sich

$$\vec{B} = (i\beta\cos\{k_\mathrm{y} y\}\vec{e}_\mathrm{y} + k_\mathrm{y}\sin\{k_\mathrm{y} y\}\vec{e}_\mathrm{z})\exp\{i(\beta z - \omega t)\}$$

und damit

$$\Delta\vec{B} = (k_\mathrm{y}^2 + \beta^2)\,(i\beta\cos\{k_\mathrm{y} y\}\vec{e}_\mathrm{y} + k_\mathrm{y}\sin\{k_\mathrm{y} y\}\vec{e}_\mathrm{z})\exp\{i(\beta z - \omega t)\}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = -\omega^2\,(i\beta\cos\{k_\mathrm{y} y\}\vec{e}_\mathrm{y} + k_\mathrm{y}\sin\{k_\mathrm{y} y\}\vec{e}_\mathrm{z})\exp\{i(\beta z - \omega t)\}$$

und damit

$$k_\mathrm{y}^2 + \beta^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0 \quad .$$

Mit der Eigenschaft $\nabla\circ\vec{A} = 0$ hätte auch direkt

$$\Delta\vec{A} - \left(\frac{1}{c}\right)^2 \frac{\partial}{\partial t^2}\vec{A} = 0$$

untersucht werden können. Einsetzen von $\vec{A}$ ergibt die Bedingung

$$\left(-k_\mathrm{y}^2 - \beta^2 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\right)\vec{A} = 0 \quad ,$$

die an jeder Stelle im Raum erfüllt sein muss. Das geht nur, wenn die Koeffizienten k_y und β die Dispersionsrelation $k_\mathrm{y}^2 + \beta^2 - \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 = 0$ befriedigen, da $\vec{A}$ nur an bestimmten Orten verschwindet, nicht aber allgemein.

Aufgabe 9

In der Ebene $z = 0$ befindet sich die Flächenladungsdichte $\varrho_S\{x, y\} = \varrho_{\mathrm{S}0} \cdot \cos\{x/x_0\} \cdot \exp\{y/y_0\}$. Im Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε im Halbraum $z < 0$ wird das elektrische Feld $\vec{E} = E_0(\vec{e}_\mathrm{x} + \vec{e}_\mathrm{z})$ gemessen. Wie lautet das elektrische Feld an der Grenzfläche im freien Halbraum $z > 0$?

Lösung zu Aufgabe 9

Das elektrische Feld E soll für den Halbraum $z > 0$ angegeben werden. Es müssen die Stetigkeitsbedingungen erfüllt werden. E_tan muss stetig sein und D_norm springt um die angegebene Oberflächenladungsdichte ϱ_S. Also

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \\
\vec{D}_1 &= \varepsilon_0\varepsilon_1 E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z) \\
\vec{D}_2 \circ \vec{e}_z &= \vec{D}_1 \circ \vec{e}_z + \varrho_S \\
\vec{E}_2 \circ \vec{e}_z &= \frac{\vec{D}_1 \circ \vec{e}_z + \varrho_S}{\varepsilon_0} \\
\vec{e}_z \times \vec{E}_2 \times \vec{e}_z &= \vec{E}_0 \circ \vec{e}_x \\
\vec{E}_2 &= E_0\vec{e}_x + \left(\varepsilon E_0 + \frac{\varrho_S}{\epsilon_0}\right)\vec{e}_z \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Zwei kreisförmige Leiterschleifen in der xy-Ebene, mit Mittelpunkt auf der z-Achse, mit den Radien $r_1 = a$ und $r_2 = b$ $(r_1 < r_2)$ tragen die feste Linenladungsdichte ϱ_{L1} und ϱ_{L2}. Die

Schleifen rotieren im Ursprung um die z-Achse mit ω in die gleiche Richtung. Wie muss ϱ_{L2} gewählt werden, damit das magnetische Feld im Ursprung verschwindet.

Lösung zu Aufgabe 10

$$\vec{j}_1 = \omega a \varrho_{L1} \delta_{\{\rho-a\}} \delta_{\{z\}} \vec{e}_\phi$$
$$\vec{j}_2 = \omega b \varrho_{L2} \delta_{\{\rho-b\}} \delta_{\{z\}} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{j}_1 \times \vec{r}'_1 = \omega a \varrho_{L1} \delta_{\{\rho-a\}} \delta_{\{z\}} \vec{e}_\phi$$
$$\vec{j}_2 \times \vec{r}'_2 = \omega b \varrho_{L2} \delta_{\{\rho-b\}} \delta_{\{z\}} \vec{e}_\phi$$

$$\begin{aligned}
\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int \frac{\vec{j}_V \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} d^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int\int \omega a \varrho_{L1} \delta_{\{\rho'-a\}} \delta_{\{z'\}} \left(\vec{e}_y \cos\phi' - \vec{e}_x \sin\phi'\right) \\
&\quad \times \frac{(z-z')\vec{e}_z - \rho'\vec{e}_x \cos\phi' \rho' \vec{e}_y \sin\phi'}{((z-z')^2 + \rho'^2 \cos^2\phi' + \rho'^2 \sin^2\phi')^{3/2}} \rho' d\rho' d\phi' dz' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int\int \omega a \varrho_{L1} \frac{1}{\rho'} \delta_{\{\rho'-a\}} \vec{e}_z d\rho' d\phi' \\
&= \frac{\mu_0}{2} \varrho_{L1} \vec{e}_z
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = 0 \\
\Longrightarrow \varrho_{L1} &= -\varrho_{L2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11

Im freien Halbraum $y < 0$ befinden sich bei $\vec{r}_1 = -a\vec{e}_\mathrm{x} - b\vec{e}_\mathrm{y}$ die Ladung $Q_1 = Q$ und bei $\vec{r}_2 = a\vec{e}_\mathrm{x} - b\vec{e}_\mathrm{y}$ die Ladung $Q_2 = -Q$. An der Stelle $y = 0$ soll $V = 0$ gelten. Bestimmen Sie Ort und Größe zweier weiterer Ladungen im freien Halbraum $y > 0$, so dass die Randbedingung bei $y = 0$ erfüllt ist.

Lösung zu Aufgabe 11

Die Lösung zu dieser Aufgabe ist einfach mit der Spiegelungsmethode zu finden. Aber auch ohne Kenntnis der Methode lässt sich das Ergebnis leicht ermitteln. Dazu kann zunächst verwendet werden, dass die verwendeten Maxwellgleichungen linear sind, und daher das Superpositionsprinzip gelten muss: die beiden Ladungen können einzeln betrachtet werden. Ihre Potenziale sind an jedem Punkt aufzuaddieren.
Wenn es also gelingt, zu jeder Ladung eine komplementäre Ladung zu finden, die gerade das Potenzial bei $y = 0$ aufhebt, verschwindet auch das Gesamtpotenzial aller vier Ladungen bei $y = 0$. Zunächst wird unmittelbar klar, dass die komplementären Ladungen jeweils entgegengesetzt gleich groß sein müssen.
Die Triviallösung, die komplementäre Ladung am gleichen Ort wie die ursprüngliche Ladung anzubringen, bedeutet, dass letztlich keine Ladungen im Raum vorhanden sind und entsprechend das Potenzial im gesamten Raum verschwindet. Gefordert ist $y > 0$. Also ist dies nicht die gesuchte Lösung!
Die andere Möglichkeit besteht darin, die komplementäre Ladung spiegelbildlich zur y-Achse anzubringen. Dann kompensieren sich die Potenziale beider Ladungen gerade auf der y-Achse, wie es gefordert war. Die Lösung lautet also:
Ordne zwei Ladungen $Q_1' = -Q$ und $Q_2' = Q$ bei $\vec{r}_1 = -a\vec{e}_\mathrm{x} + b\vec{e}_\mathrm{y}$ und bei $\vec{r}_2 = a\vec{e}_\mathrm{x} + b\vec{e}_\mathrm{y}$ an.

Aufgabe 12

Im Medium mit Brechzahl n_1 breitet sich eine ebene monochromatische Welle mit Kreisfrequenz ω aus und trifft unter dem Einfallswinkel von $\Theta = 80^\circ$ (zum Einfallslot) auf eine Grenzfläche zum Medium mit Brechzahl $n_2 = \frac{1}{2}n_1$. Wie weit dringen die Felder in das Medium mit Brechzahl n_2 ein, bis sie auf $1/\mathrm{e}$ abgefallen sind?

Hinweis: $\cos\{80^\circ\} = 0.17, \quad \sin\{80^\circ\} = 0.98$

Lösung zu Aufgabe 12

Für die k-Vektoren in den Medien mit Brechzahl n_1 und n_2 gilt

$$\begin{aligned}\vec{k}_1 &= k_0 n_1 \cos\Theta_\mathrm{in}\vec{e}_n + k_0 n_1 \sin\Theta_\mathrm{in}\vec{e}_t \\ \vec{k}_2 &= k_0 n_2 \cos\Theta_\mathrm{tr}\vec{e}_n + k_0 n_2 \sin\Theta_\mathrm{tr}\vec{e}_t\end{aligned} \tag{1}$$

Wobei Θ_{in} und Θ_{tr} die Winkel von einfallender und transmittiertem k-Vektor beschreiben und $k_0 = \frac{\omega}{c}$ eingesetzt wurde. $\vec{e}_n$ und $\vec{e}_t$ sind bezüglich der Grenzfläche Einheitsvektoren in Normal- bzw. Tangentialrichtung. Die Tangentialkomponenten der k-Vektoren müssen an der Grenzfläche gleich sein. Daher gilt

$$\vec{k}_2 = k_0 n_2 \cos\Theta_{\text{tr}} \vec{e}_n + k_0 n_1 \sin\Theta_{\text{in}} \vec{e}_t \tag{2}$$

Benutzen wir nun das Brechungsgesetz $n_1 \sin\Theta_{\text{in}} = n_2 \sin\Theta_{\text{tr}}$ und den Zusammenhangs $\sin^2 + \cos^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
(\cos\Theta_{\text{tr}})^2 &= \left(1 - \sin^2\Theta_{\text{tr}}\right) = 1 - \sin^2\Theta_{\text{in}} \left(\frac{n1}{n2}\right)^2 \\
n_2^2 \cos^2\Theta_{\text{tr}} &= n_2^2 - n_1^2 \sin^2\Theta_{\text{in}} \\
n_2 \cos\Theta_{\text{tr}} &= n_1 \sqrt{\frac{1}{4} - \sin^2\Theta_{\text{in}}} \\
&= \mathrm{i} n_1 \cdot 0.84
\end{aligned}$$

Laut Aufgabenstellung gilt $n_2 = n_1/2$. Für die Normalkomponente des k-Vektors im Medium 2 folgt also

$$k_0 n_2 \cos\Theta_{\text{tr}} = \pm \mathrm{i} k_0 n_1 \, 0.84 \quad . \tag{3}$$

Man beachte bitte, dass dieser imaginär ist. Das bedeutet, im Medium 2 fällt die Intensität der Felder mit zunehmendem Abstand von der Grenzfläche ab oder steigt exponentiell an. Laut Aufgabenstellung wird jedoch die abfallenden Lösung gesucht. Daher wählen wir nur die Lösung mit dem Pluszeichen. Wenn man nun den k-Vektor in den Ansatz für die ebene Welle

$$\begin{aligned}
\vec{E}_2 &= \vec{E}_0 \exp(\mathrm{i}(\vec{k}_2 \circ \vec{r} - \omega t)) \\
&= \vec{E}_0 \ldots \exp(\mathrm{i}(\mathrm{i} k_0 n_1 \, 0.84) z) \\
&= \vec{E}_0 \ldots \exp(-k_0 n_1 \, 0.84 z)
\end{aligned}$$

einsetzt, wird deutlich, dass es sich um eine im Medium 2 abfallende Welle handelt. (Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass $\vec{e}_n = \vec{e}_z$ gilt.) Die Eindringtiefe lautet demnach

$$d = \frac{1}{0.84 n_1 k_0} \quad .$$

Aufgabe 13

In welche Richtung fliegt ein Elektron nachdem es das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \cos^2\left\{\pi\frac{x}{d}\right\} \mathrm{rect}\left\{\frac{x}{d}\right\} \vec{e}_{\mathrm{y}}$$

durchflogen hat, wenn es zuvor die Geschwindigkeit $\vec{v_0} = v_0 \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}}$ hatte?

Lösung zu Aufgabe 13

Die Geschwindigkeit des Elektrons ist $\vec{v} = v_0\vec{e_x} + v_y\vec{e_y}$. Bevor es das Feld durchfliegt, ist $v_y = 0$ erfüllt. Da das gegebene Feld das Elektron nur in v_y-Richtung beschleunigt, bleibt die Geschwindigkeit in x-Richtung stets konstant.

$$x = v_x \cdot t$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v_x$$

Für die Geschwindigkeitskomponente v_y gilt

$$\begin{aligned} v_y &= \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} a_y \mathrm{d}t = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \frac{F_y}{m_e}\mathrm{d}t = \int\limits_{t=-\infty}^{\infty} \frac{qE_y}{m_e}\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \frac{qE_y}{m_e}\frac{\mathrm{d}x}{v_x} \quad . \end{aligned}$$

Wobei m_e die Masse des Elektrons und a_y die Beschleunigung in y-Richtung bezeichnen. Einsetzen und integrieren liefert

$$\begin{aligned} v_y &= \int\limits_{x=-\infty}^{\infty} \frac{qE_0}{m_e v_x} \cos^2\left(\pi\frac{x}{d}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{x}{d}\right) \mathrm{d}x \\ &= \int\limits_{x=-d/2}^{d/2} \frac{qE_0}{m_e v_x} \cos^2\left(\pi\frac{x}{d}\right) \mathrm{d}x \\ &= \frac{qE_0}{m_e v_x}\frac{d}{2} \quad . \end{aligned}$$

Nach dem Durchfliegen des Feldes hat das Elektron demnach die Geschwindigkeit

$$\vec{v}_2 = v_0\vec{e}_x + \frac{qE_0 d}{m_e v_x 2}\vec{e}_y$$

Aufgabe 14

Gegeben ist das magnetische Feld

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} A_m \sin\{m\pi\frac{x}{a}\} + B_m \cos\{m\pi\frac{x}{a}\} \\ 0 \\ i\frac{m\pi}{\beta a}\left(A_m \cos\{m\pi\frac{x}{a}\} - B_m \sin\{m\pi\frac{x}{a}\}\right) \end{pmatrix} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}$$

im Halbraum $x < 0$. Der Halbraum wird durch eine Metallwand begrenzt. Die Koeffizienten A_m, B_m und $m \in \mathbb{N}_0$ sind zunächst frei wählbar. Wie lauten die Bedingungen an die Koeffizienten, so dass die Randbedingungen an der Wand erfüllt sind? Berechnen Sie den Flächenstrom unter der Voraussetzung, dass das magnetische Feld im Halbraum $x > 0$ verschwindet.

Lösung zu Aufgabe 14

Die Begrenzung durch eine Metallwand bedeutet, dass dort das tangentiale elektrische Feld verschwinden muss. Das elektrische Feld resultiert aus der Maxwell-Gleichung

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \quad .$$

Die Zeitableitung ist wie üblich mit $-i\omega$ zu ersetzen, außerdem gilt im freien Raum $\vec{D} = \epsilon_0\vec{E}$. Es resultiert

$$\nabla\times\vec{H} = i\frac{1}{\beta}\left(\beta^2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\right)\left(A_m \sin\{m\pi\frac{x}{a}\} + B_m \cos\{m\pi\frac{x}{a}\}\right)\exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

und damit

$$\vec{E} = -\frac{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\beta\omega\epsilon_0}\left(A_m \sin\{m\pi\frac{x}{a}\} + B_m \cos\{m\pi\frac{x}{a}\}\right)\exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y} \quad .$$

An der Stelle $x = 0$ muss das tangentiale elektrische Feld verschwinden. Der Normalenvektor auf die Wand ist $\vec{e}_\mathrm{x}$ und damit resultiert, dass $\vec{E}\circ\vec{e}_\mathrm{y}\Big|_{x=0} = 0$ und $\vec{E}\circ\vec{e}_\mathrm{z}\Big|_{x=0} = 0$ gelten muss. Die zweite Bedingung ist sowieso erfüllt. Die erste Bedingung erfordert

$$-\frac{\beta^2 + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}{\beta\omega\epsilon_0} B_m \exp\{i(\beta z - \omega t)\} = 0 \quad .$$

Da sowohl die $\exp$- Funktion als auch der Bruch für $\omega > 0$ nicht verschwinden können, muss für $B_m = 0$ gefordert werden. Sowohl das elektrische als auch das magnetische Feld verschwinden für $m = 0$, was nicht sein darf. Es ist also $m > 0$ zu fordern. Die Amplitude A_m lässt sich aus den Vorgaben nicht bestimmen.

Die Flächenstromdichte resultiert direkt aus der Stetigkeitsbedingung

$$\vec{j}_{\mathrm{S}} = \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right) \Big|_{x=0} \quad .$$

Das magnetische Feld $\vec{H}_1 = \vec{H}$ steht parallel zur Grenzfläche und $\vec{H}_2 = 0$, so dass direkt

$$\vec{j}_S = iA_m \frac{m\pi}{\beta a} \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \vec{e}_{\mathrm{y}}$$

resultiert.

Aufgabe 15

Wie lautet das Verhältnis von reflektierter zu einfallender Leistung für eine zirkular polarisierte ebene monochromatische Welle, die im Vakuum unter dem Einfallswinkel Θ (zum Einfallslot) auf eine Grenzfläche zum Medium mit $\epsilon = \mu = 2$ trifft?

Lösung zu Aufgabe 15

Die Leistung der im Winkel Θ_{in} einfallenden zirkular polarisierten Welle setzt sich zu gleichen Teilen aus TE- und TM- Polarisation zusammen. Da sie aus Vakuum kommend auf die Grenzfläche trifft, lauten die Amplitudenreflexionsfaktoren für TE und TM-Polarisation

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{TE}} &= \frac{\cos\Theta_{\mathrm{in}} - \frac{n\cos\Theta_{\mathrm{tr}}}{\mu}}{\cos\Theta_{\mathrm{in}} + \frac{n\cos\Theta_{\mathrm{tr}}}{\mu}} \\ r_{\mathrm{TM}} &= \frac{\cos\Theta_{\mathrm{in}} - \frac{n\cos\Theta_{\mathrm{tr}}}{\epsilon}}{\cos\Theta_{\mathrm{in}} + \frac{n\cos\Theta_{\mathrm{tr}}}{\epsilon}} \end{aligned} \tag{4}$$

Der Term $n\cos\Theta_{\mathrm{tr}}$ kann durch die Umformungen

$$\begin{aligned} \sin\Theta_{\mathrm{in}} &= n\sin\Theta_{\mathrm{tr}} \\ \cos\Theta_{\mathrm{tr}} &= \sqrt{1 - \sin^2\Theta_{\mathrm{tr}}} = \sqrt{1 - \left(\frac{\sin\Theta_{\mathrm{in}}}{n}\right)^2} \\ &= \frac{1}{n}\sqrt{n^2 - \sin^2\Theta_{\mathrm{in}}} \\ n\cos\Theta_{\mathrm{tr}} &= \sqrt{\mu\epsilon - \sin^2\Theta_{\mathrm{in}}} \end{aligned}$$

jeweils als Funktion von Θ_{in} geschrieben werden. Das gefragte Verhältnis von einfallender und reflektierter Leistung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} R &= \frac{r_{\mathrm{TE}}^2 + r_{\mathrm{TM}}^2}{2} \\ &= \left(\frac{\cos\Theta_{\mathrm{in}} - \frac{\sqrt{4-\sin^2\Theta_{\mathrm{in}}}}{2}}{\cos\Theta_{\mathrm{in}} + \frac{\sqrt{4-\sin^2\Theta_{\mathrm{in}}}}{2}} \right)^2 \quad , \end{aligned}$$

wobei $n = \sqrt{\mu\epsilon}$ und $\mu = \epsilon = 2$ eingesetzt wurde.