Elektromagnetische Felder und Wellen

Klausur Frühjahr 2006

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Eine Leiterschleife mit dem Mittelpunkt $\vec{r_L} = 2a \cdot \vec{e}_z$ und Radius $R_L = 2a$ ist parallel zur xy-Ebene ausgerichtet. Sie wird von einem Strom I in $\vec{e}_\phi$-Richtung durchflossen. Bestimmen Sie eine weitere Leiterschleife so (Position und Strom), dass das resultierende magnetische Feld in der xy-Ebene keine z-Komponente besitzt (mit Begründung).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine ebene Welle trifft wie in Abbildung 1 skizziert auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen elektrischen Isolatoren, ohne dabei reflektiert zu werden. Was lässt sich über die Materialdaten ε_2 und μ_2 im Medium 2 aussagen, wenn die Daten des Mediums 1 bekannt sind (Berechnung)?

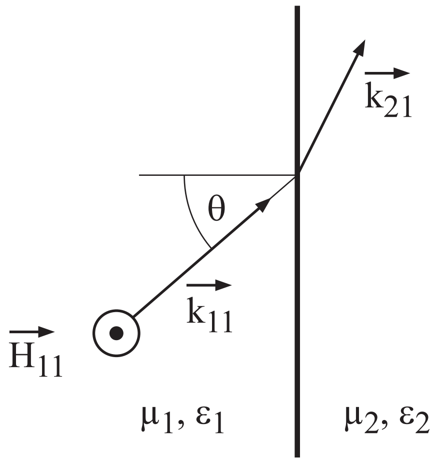

Abbildung 1: Ebene Welle an der Grenzfläche zwischen zwei homogenen Isolatoren.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine ebene Welle breite sich gemäß

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_\mathrm{x} x + k_\mathrm{z} z - \omega t)}$$

im Vakuum aus. Welche mittlere Leistung tritt durch den mit $z = 0; x^2 + y^2 < a^2$ gegebenen Kreis?

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein elektrisch geladenes Gas (Volumenladungsträgerdichte ϱ_V) strömt mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\mathrm{z}$ durch ein Rohr vom Radius R. Bestimmen Sie die dadurch erzeugte magnetische Feldstärke $\vec{H}$.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Zwei koaxiale, ideal leitfähige, unendlich lange Rohre werden homogen vom Strom J wie in Abbildung 2 dargestellt durchflossen. Der Zwischenbereich ist mit einem magnetischen Medium gefüllt. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im gesamten Querschnittsbereich des äußeren Rohres.

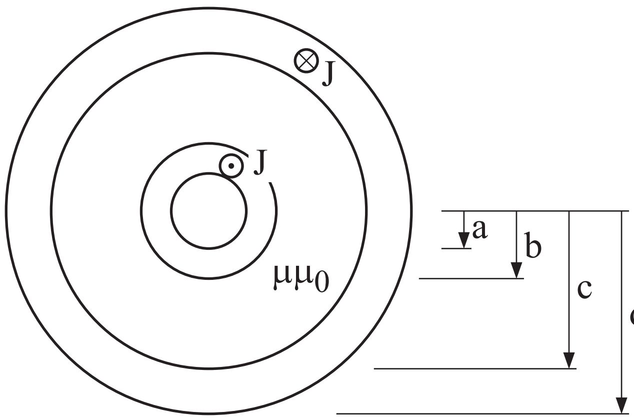

Abbildung 2: Koaxiale kreiszylinderische Rohre.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

In welche Richtung fliegt ein Elektron, nachdem es in dem magnetischen Feld

$$\vec{B} = B_0 \frac{t}{T} \mathrm{rect}\left\{\frac{t}{2T}\right\} \vec{e}_\mathrm{z}$$

zeitabhängig beschleunigt wird, wenn es zur Zeit $t < -T$ die Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\mathrm{x}$ hat?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

In einem D-förmigen Linienleiter fließt der Strom I wie in Abbildung 3 skizziert. Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im homogen unmagnetischen Raum in einiger Entfernung zur Leiterschleife.

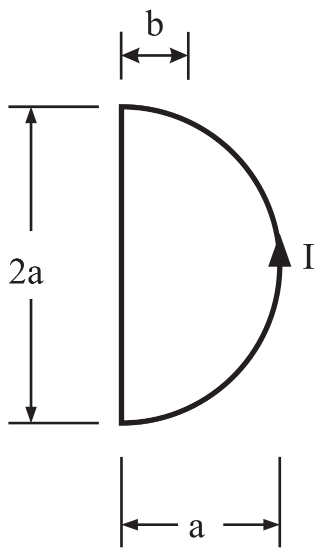

Abbildung 3: D-förmige Leiterschleife im freien Raum. Der Schwerpunkt liegt $b = 0.4244a$ von der flachen Seite entfernt.

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Im freien Raum befindet sich eine magnetisierbare Platte mit Durchmesser d und Dicke h. Im gesamten Raum außerhalb der Platte herrscht die homogene magnetische Induktion $\vec{B}$, wie in Abbildung 4 skizziert. Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Grenzflächenladungen und -Ströme.

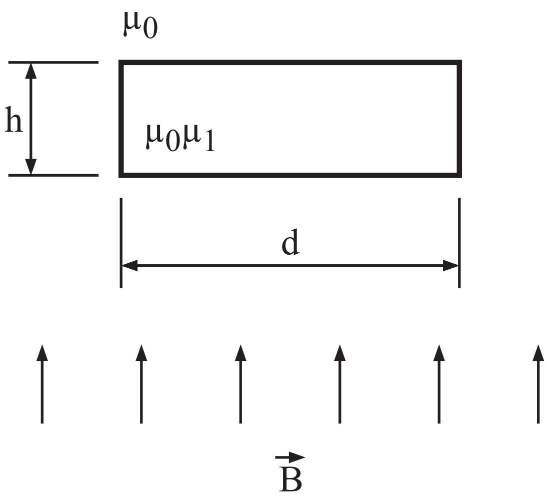

Abbildung 4: Magnetisierbare Scheibe in homogenem magnetischen Feld.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Leiten Sie die Wellengleichung des elektrischen Felds $\vec{E}$ für ein homogenes Medium mit zeitlich varianter Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon\{t\}$ aus den Maxwell'schen Gleichungen her.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Im Raumbereich $0 \leq z \leq 2a$ befindet sich das homogene Material 1 (ε_1, μ_1) mit der Polarisation $\vec{P}_1 = -P_0\vec{e}_z$, im Bereich $2a < z \leq 4a$ Material 2 (ε_2, μ_2) mit der Polarisation $\vec{P}_2 = -2P_0\vec{e}_z$. Zwischen $z = 0$ und $z = 4a$ wird die Spannung U gemessen. Bestimmen Sie die Grenzflächenladungen auf den beiden äußeren Grenzflächen unter der Voraussetzung, dass die mittlere Grenzfläche ladungsfrei und der Außenraum feldfrei ist. Wie lautet das Potential entlang der z-Achse?

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Im leitfähigen Medium 1 existiert das homogene elektrische Feld $\vec{E}_1$ wie in Abbildung 5 skizziert. Bestimmen Sie das elektrische Feld im nichtleitenden Medium 2. Beide Medien sind homogen.

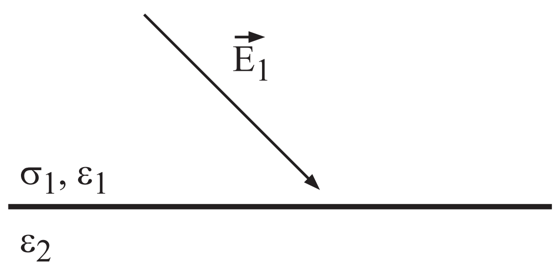

Abbildung 5: Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien.

Aufgabe 12 (9 Punkte)

Zwei Dielektrika mit Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 für $z < 0$ und ϵ_2 für $z > 0$ stoßen bei $z = 0$ aneinander. In der Grenzfläche fließe ein durch die Flächenstromdichte

$$\vec{j}_{\mathrm{S}} = j_{\mathrm{S0}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \vec{e}_{\mathrm{x}}$$

gegebener Flächenstrom. Im Dielektrikum bei $z < 0$ werde keine Leistung transportiert. Geben Sie eine mögliche Lösung der Wellengleichung für das elektrische Feld $\vec{E}$ im Dielektrikum bei $z > 0$ an, die die Stetigkeitsbedingungen erfüllt.

Aufgabe 13 (6 Punkte)

Bestimmen Sie das Potential auf der z-Achse, das von der in Zylinderkoordinaten gegebenen Raumladung

$$\varrho_V = \varrho_S \cdot \mathrm{rect}\left\{\frac{z}{2a}\right\} \cdot \delta\left\{\rho - a\right\}$$

erzeugt wird.

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b-x)^2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\,\mathrm{arsinh}\left\{\frac{x-b}{a}\right\}$$

Aufgabe 14 (8 Punkte)

Drei unmagnetische Medien sind wie in Abbildung 6 skizziert geschichtet. Eine transversal magnetische ebene Welle fällt aus Medium 1 schräg auf die ungeladene stromfreie ebene Grenzfläche. Im Medium 2 bilden sich zwei partiell gegenläufige ebene Wellen aus, die ihrerseits mit der transmittierte Welle in Medium 3 kommunizieren. Geben Sie die Wellenzahlvektoren der Wellen in den Medien 2 und 3 als Funktion der Komponenten von $\vec{k}_{11}$ an. Wie lauten die Ansätze für die magnetischen Felder der Wellen in allen drei Schichten?

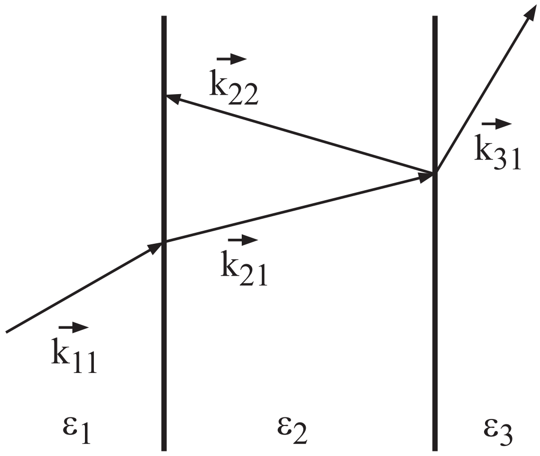

Abbildung 6: Wellenzahlvektoren ebener Wellen in einem geschichteten Medium.

Aufgabe 15 (10 Punkte)

Der Halbraum $z \geq 0$ sei mit Luft gefüllt (Brechzahl $n_1 = 1$). In ihm sei das elektrische Feld $\vec{E} = E_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + E_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y} + E_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}$ durch

$$\vec{E}(z,t) = E_0\vec{e}_\mathrm{y}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1 k_0 z - \omega t)}$$

gegeben. Bestimmen Sie die kleinstmögliche positive Brechzahl n_2 des Dielektrikums im Halbraum $z < 0$, so dass $\mathrm{Re}\,\{E_\mathrm{y}(z = -\pi/(8k_0), t = 0)\} = 0$ gilt. Skizzieren Sie $\mathrm{Re}\,\{E_\mathrm{y}(z, t = 0)\}$, $\mathrm{Re}\,\{E_\mathrm{y}(z, t = \pi/(2\omega)\}$, sowie $\mathrm{Re}\,\{E_\mathrm{y}(z, t = \pi/\omega)\}$ im Bereich $-4\pi/(n_2 k_0) \leq z \leq 2\pi/(n_1 k_0)$.