Aufgabe 1

Eine Leiterschleife mit dem Mittelpunkt $\vec{r_\mathrm{L}} = 2a \cdot \vec{e}_\mathrm{z}$ und Radius $R_\mathrm{L} = 2a$ ist parallel zur xy-Ebene ausgerichtet. Sie wird von einem Strom I in $\vec{e}_\phi$-Richtung durchflossen. Bestimmen Sie eine weitere Leiterschleife so (Position und Strom), dass das resultierende magnetische Feld in der xy-Ebene keine z-Komponente besitzt (mit Begründung).

Lösung zu Aufgabe 1

Es muss sich um eine geometrisch identische 2. Leiterschleife ($\vec{r}_{L2} = 2a$) mit entgegengesetztem Stromfluss ($-I$ oder oder I in $-\vec{e}_\phi$-Richtung) handeln. Damit das resultierende magnetische Feld in der xy-Ebene keine z-Komponente besitzt. Sie muss parallel zur 1. Leiterschleife ausgerichtet sein, mit einem Mittelpunkt bei $\vec{r}_{L2} = -2a$. (Vergleich - Spiegelladung)

Aufgabe 2

Eine ebene Welle trifft wie in Abbildung 1 skizziert auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei verschiedenen elektrischen Isolatoren, ohne dabei reflektiert zu werden. Was lässt sich über die Materialdaten ε_2 und μ_2 im Medium 2 aussagen, wenn die Daten des Mediums 1 bekannt sind (Berechnung)?

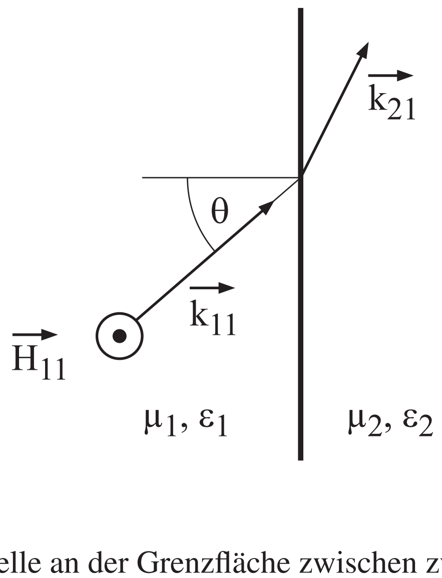


Abbildung 1: Ebene Welle an der Grenzfläche zwischen zwei homogenen Isolatoren.

Lösung zu Aufgabe 2

Bei der angegebenen Welle handelt es sich um eine TM-Welle. Der Reflexionsfaktor lautet mit den in der Vorlesung verwendeten Winkeln

$$r_{\mathrm{TM}} = = \frac{Z_{\mathrm{in}} \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} - Z_{\mathrm{tr}} \cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}{Z_{\mathrm{in}} \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + Z_{\mathrm{tr}} \cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}} \quad . \tag{1}$$

Hier ist $Z_{\mathrm{in}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} Z_0$ und $Z_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} Z_0$.
Der hier verwendete Einfallswinkel ist um $\pi/2$ gegen den in der Vorlesung verwendeten Winkel verdreht. Damit wird im Reflexionsfaktor jeder $\cos$ zum $\sin$.
Da die Welle nicht reflektiert wird, muss sie unter dem Brewsterwinkel auf die Grenzfläche getroffen sein. Dann gilt aber $\theta_{\mathrm{in}} + \theta_{\mathrm{tr}} = \pi/2$ bzw. $\sin\{\theta_{\mathrm{tr}}\} = \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}$ und somit resultiert

$$\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \tan\{\theta_{\mathrm{in}}\} \quad .$$

Aufgabe 3

Eine ebene Welle breite sich gemäß

$$\vec{E} = E_0 \vec{\mathrm{e}}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_{\mathrm{x}} x + k_z z - \omega t)}$$

im Vakuum aus. Welche mittlere Leistung tritt durch den mit $z = 0; x^2 + y^2 < a^2$ gegebenen Kreis?

Lösung zu Aufgabe 3

Für das elektrische und magnetische Feld sowie Ausbreitungsvektor der gegebenen ebenen Welle gilt

$$\vec{E} = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_z z - \omega t)} \vec{e}_y \tag{2}$$

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \mu \mu_0} = \frac{E_0}{\omega \mu \mu_0} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_x x + k_z z - \omega t)} \left(k_x \vec{e}_z - k_z \vec{e}_x\right) \tag{3}$$

$$\vec{k} = k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z \tag{4}$$

Der zeitgemittelte Pointingvektor und der Flächennormalenvektor $\vec{n}$ lauten

$$\frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\vec{\bar{S}}\right\} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\} = \frac{|E_0|^2}{2\omega \mu \mu_0} \vec{e}_y \times \left(k_x \vec{e}_z - k_z \vec{e}_x\right) = \frac{|E_0|^2}{2\omega \mu \mu_0} \left(k_x \vec{e}_x + k_z \vec{e}_z\right) \tag{5}$$

$$\vec{n} = \vec{e}_z \tag{6}$$

Daraus ergibt sich

$$P_{\text{Kreis}} = \iint\limits_{\text{Kreis}} \bar{\vec{S}} \cdot \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{7}$$

$$= \iint\limits_{r,\phi} \bar{\vec{S}} \cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\phi\vec{n} \tag{8}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2\omega\mu\mu_0}\pi a^2 k_z \tag{9}$$

$$= \frac{|E_0|^2}{2Z\sqrt{k_x^2+k_y^2}}\pi a^2 k_z \tag{10}$$

Aufgabe 4

Ein elektrisch geladenes Gas (Volumenladungsträgerdichte ϱ_{V}) strömt mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_{\mathrm{z}}$ durch ein Rohr vom Radius R. Bestimmen Sie die dadurch erzeugte magnetische Feldstärke $\vec{H}$.

Lösung zu Aufgabe 4

Der Stromdichte ergibt sich aus der Volumenladungsträgerdichte und der Strömungsgeschwindigkeit:

$$\vec{j} = \varrho_V \cdot \vec{v}$$

Die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ ergibt sich aus:

$$\oint \vec{H} d\vec{r} = \int\int \vec{j} d^2\vec{r}$$

somit ergibt sich für $\vec{H}_{\{\rho\}} = H_{\{\rho\}} \cdot \vec{e}_\phi$ innerhalb des Rohres ($\rho \leq r$)

$$\begin{aligned} H_{\{\rho\}} \cdot \rho \cdot 2\pi &= \varrho_V \cdot v_0 \cdot \pi\rho^2 \\ H_{\{\rho\}} &= \frac{\varrho_V \cdot v_0 \cdot \rho}{2} \end{aligned}$$

und ausserhalb ($\rho > r$)

$$\begin{aligned} H_{\{\rho\}} \cdot \rho \cdot 2\pi &= \varrho_V \cdot v_0 \cdot \pi R^2 \\ H_{\{\rho\}} &= \frac{\varrho_V \cdot v_0 \cdot R^2}{2 \cdot \rho} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

Zwei koaxiale, ideal leitfähige, unendlich lange Rohre werden homogen vom Strom J wie in Abbildung 2 dargestellt durchflossen. Der Zwischenbereich ist mit einem magnetischen Medium gefüllt. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im gesamten Querschnittsbereich des äußeren Rohres.

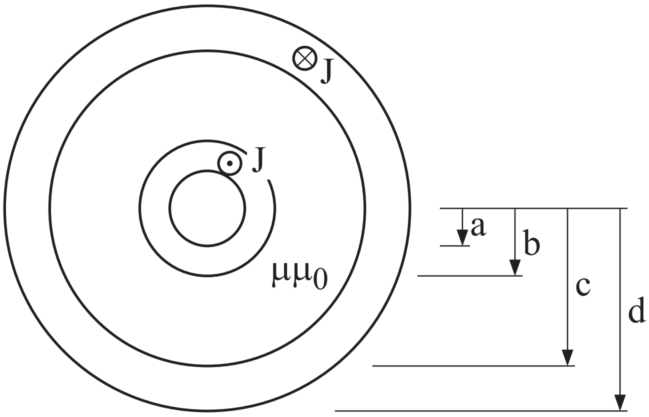


Abbildung 2: Koaxiale kreiszylinderische Rohre.

Lösung zu Aufgabe 5

Bei der hier verwendeten Geometrie handelt es sich um ein vollständig zylindersymmetrisches Problem. Das Koordinatensystem sei wie üblich mit der z-Achse entlang der Achsen der Rohre orientiert. Da keine Linienströme auftreten, bietet es sich an, das Durchflutungsgesetz zu verwenden:

$$\oint_{C_\mathrm{S}} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint_S \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} \quad .$$

Der linke Teil ergibt wegen der Symmetrie

$$\oint_{C_\mathrm{S}} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \int_0^{2\pi} (\vec{H} \circ \vec{e}_\phi) R \, \mathrm{d}\phi = 2\pi R H_\phi \quad .$$

Der rechte Teil ist im Bereich $0 \leq R \leq a$

$$\iint_S \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \int_0^R \int_0^{2\pi} (\vec{j} \circ \vec{e}_\mathrm{z}) \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = 0 \quad ,$$

im inneren Leiter $a \leq R \leq b$ resultiert

$$\iint_S \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = J \frac{R^2 - a^2}{b^2 - a^2} \quad ,$$

zwischen den Leitern $b \leq R \leq c$ folgt

$$\iint_S \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = J \quad ,$$

und im Bereich des äußeren Leiters $c \leq R \leq d$ ist

$$\iint_S \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = J \frac{d^2 - R^2}{d^2 - c^2}$$

zu verwenden. Hierbei wurde jeweils $\vec{j} = \dfrac{J}{\pi(b^2 - a^2)} \vec{e}_\mathrm{z}$ bzw. $\vec{j} = \dfrac{-J}{\pi(d^2 - c^2)} \vec{e}_\mathrm{z}$ in den Leitern als Stromdichte verwendet. Somit lautet die magnetische Induktion

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} J \vec{e}_\phi \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a \leq R \leq b \\ \frac{R}{b^2-a^2} - \frac{a}{R}\frac{a}{b^2-a^2} & \text{für} \quad a \leq R \leq b \\ \frac{1}{R} & \text{für} \quad b \leq R \leq c \\ \frac{d}{R}\frac{d}{d^2-c^2} - \frac{R}{d^2-c^2} & \text{für} \quad c \leq R \leq d \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 6

In welche Richtung fliegt ein Elektron, nachdem es in dem magnetischen Feld

$$\vec{B} = B_0 \frac{t}{T} \mathrm{rect}\left\{\frac{t}{2T}\right\} \vec{e}_\mathrm{z}$$

zeitabhängig beschleunigt wird, wenn es zur Zeit $t < -T$ die Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0 \vec{e}_\mathrm{x}$ hat?

Lösung zu Aufgabe 6

Die Lorentzkraft für ein magnetisches Feld lautet

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad . \tag{11}$$

Für Zeiten $t < -T$ fliegt das Elektron in $\vec{e}_x$ Richtung. Das B-Feld zeigt stets in $\vec{e}_z$ Richtung. Die Lorentzkraft hält das Elektron auf einer Kreisbahn, deren Radiua u.a. von der Stärke des

B-Feldes abhängt. Wird das Koordinatensystem so gewählt, dass die z-Achse vertikal ausgerichtet ist, durchfliegt das Elektron eine Linkskurve für $\vec{B} \circ \vec{e}_z < 0$ und eine Rechtskurve für $\vec{B} \circ \vec{e}_z > 0$, wobei die negative Elementarladung des Elektrons berücksichtigt wurde. Laut Aufgabenstellung ist das B-Feld als unsymmetrische Zeitfunktion gegeben. Das Elektron durchfliegt folglich genauso lange Links- wie Rechtskurven. Für Zeiten $t > T$, fliegt das Elektron wieder in $\vec{e}_x$-Richtung, wobei seine Flugbahn einen Parallelversatz aufweisen kann.

Aufgabe 7

In einem D-förmigen Linienleiter fließt der Strom I wie in Abbildung 3 skizziert. Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im homogen unmagnetischen Raum in einiger Entfernung zur Leiterschleife.

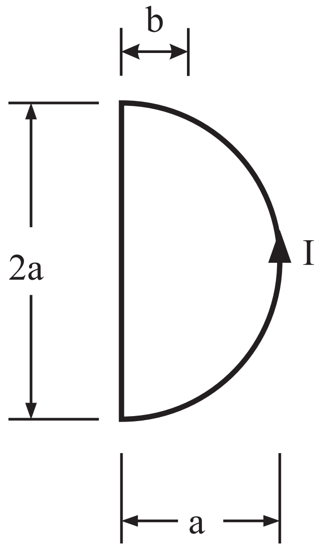


Abbildung 3: D-förmige Leiterschleife im freien Raum. Der Schwerpunkt liegt $b = 0.4244a$ von der flachen Seite entfernt.

Lösung zu Aufgabe 7

Die magnetische Feldstärke lässt sich für ein elektrostatische Problem mit Hilfe des Biot-Savart Gesetzes bestimmen. Hier ist die Feldstärke in einiger Entfernung zur Leiterschleife gefragt. Dann kann die Feldstärke Näherungsweise mit Hilfe des magnetischen Dipolmoments bestimmt werden. Die Leiterschleife ist eben, somit folgt direkt

$$m = I\frac{\pi}{2}a^2 \quad .$$

Wird das Koordinatensystem so gelegt, dass der Ursprung im Schwerpunkt der Leiterschleife liegt und die z-Achse senkrecht zur Schleife (aus der Papierebene heraus), ergibt sich $\vec{m} = m\vec{e}_\mathrm{z}$. Der Schwerpunkt liegt wie angegeben etwa $0.4a$ von der flachen Seite entfernt und ansonsten auf der Symmetrieachse der Schleife. Die x- und y-Achse können noch frei gewählt werden. Der Vollständigkeit halber sei folgende Annahme gemacht: die x-Achse zeige in Richtung des kreisförmigen Leiterstücks und sei mit der Symmetrieachse identisch. Die magnetische Induktion ist gemäß Vorlesung mit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{m} \circ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \tag{12}$$

und die magnetische Feldstärke im freien Raum ist einfach $\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$.

Aufgabe 8

Im freien Raum befindet sich eine magnetisierbare Platte mit Durchmesser d und Dicke h. Im gesamten Raum außerhalb der Platte herrscht die homogene magnetische Induktion $\vec{B}$, wie in Abbildung 4 skizziert. Bestimmen Sie, soweit vorhanden, die Grenzflächenladungen und -Ströme.

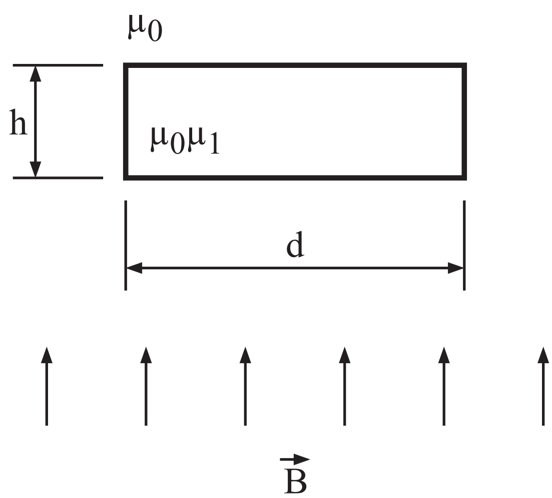


Abbildung 4: Magnetisierbare Scheibe in homogenem magnetischen Feld.

Lösung zu Aufgabe 8

Da das gegebene magnetische Feld zeitunabhängig ist, wird kein elektrisches Feld induziert. Außerdem ist kein elektrisches Feld eingeprägt und somit existieren auch keine Grenzflächenladungen.
Für die magnetischen Felder müssen die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= \vec{j}_{\text{S}} \end{aligned}$$

erfüllt sein. Dabei ist der Normalenvektor in Bezug auf die Grenzflächen zu nehmen. Sei das Koordinatensystem so gewählt, dass die z-Achse durch den Mittelpunkt der Platte senkrecht zur Oberfläche orientiert ist. Am Boden und Deckel ist somit $\vec{n} = \vec{e}_{\text{z}}$ zu wählen, auf dem Mantel gilt $\vec{n} = \vec{e}_\rho$.
Die eingeprägte magnetische Induktion normal zur Oberfläche erzwingt auch in der Platte die gleiche Induktion. Damit ergibt sich außerhalb der Platte $\vec{H}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}$ und innerhalb der Platte $\vec{H}_1 = \frac{1}{\mu_1\mu_0}\vec{B}$ mit $\vec{B} = B\vec{e}_{\text{z}}$. Auf dem Mantel resultiert für den Flächenstrom

$$\vec{j}_{\text{S}} = (\vec{e}_\rho \times \vec{e}_{\text{z}})\frac{1}{\mu_0}(1 - \frac{1}{\mu_1})B\Big|_{\rho=\text{d}/2} = -\frac{1}{\mu_0}(1 - \frac{1}{\mu_1})B\vec{e}_\Phi \quad .$$

Aufgabe 9

Leiten Sie die Wellengleichung des elektrischen Felds $\vec{E}$ für ein homogenes Medium mit zeitlich varianter Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \varepsilon\{t\}$ aus den Maxwell'schen Gleichungen her.

Lösung zu Aufgabe 9

Auch für Medien mit zeitlich veränderlicher Dielektrizitätskonstante muß eine Wellengleichung erfüllt werden. Sie lautet

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \tag{13}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \tag{14}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\nabla \times \vec{B} \tag{15}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mu\mu_0\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{D}\right) \tag{16}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\epsilon(t)\epsilon_0\vec{E}\right) \tag{17}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\epsilon_0\mu\mu_0\left\{\left(\frac{\partial}{\partial t}\epsilon(t)\right)\vec{E} + \epsilon(t)\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right)\right\} \tag{18}$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\epsilon_0\mu\mu_0\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon(t)\right)\vec{E} + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\epsilon(t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) + \epsilon(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}\right)\right\} \tag{19}$$

Unter der Annahme, dass keine freien Ladungen vorhanden sind ($\varrho = 0 = \nabla \circ \vec{D}$), läßt sie sich schreiben als

$$\Delta\vec{E} = \epsilon_0\mu\mu_0\left\{\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\epsilon(t)\right)\vec{E} + 2\left(\frac{\partial}{\partial t}\epsilon(t)\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) + \epsilon(t)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}\right)\right\} \quad . \tag{20}$$

Für zeitlich konstante ϵ vereinfacht sie sich weiter und geht in die bekannte Wellengleichung homogener Medien mit konstantem Dielektrikum über.

Aufgabe 10

Im Raumbereich $0 \leq z \leq 2a$ befindet sich das homogene Material 1 (ε_1, μ_1) mit der Polarisation $\vec{P}_1 = -P_0\vec{e}_z$, im Bereich $2a < z \leq 4a$ Material 2 (ε_2, μ_2) mit der Polarisation $\vec{P}_2 = -2P_0\vec{e}_z$. Zwischen $z = 0$ und $z = 4a$ wird die Spannung U gemessen. Bestimmen Sie die Grenzflächenladungen auf den beiden äußeren Grenzflächen unter der Voraussetzung, dass die mittlere Grenzfläche ladungsfrei und der Außenraum feldfrei ist. Wie lautet das Potential entlang der z-Achse?

Lösung zu Aufgabe 10

Die eingeprägte Polarisation ist vom Feld unabhängig. Damit handelt es sich hier im strengen Sinn um ein nichtlineares Material. Die Gleichung $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ lässt sich aber in der modifizierten Form

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}_\mathrm{p}$$

weiter verwenden, wobei hier $\vec{P}_\mathrm{p}$ für den permanenten Anteil der Polarisation steht. Angenommen wird, dass das elektrische Feld entgegen z-Richtung orientiert ist, also $\vec{E}_{1,2} = -E_{1,2}\vec{e}_z$. Die Grenzfläche zwischen den zwei Materialien ist ladungsfrei, somit gilt:

$$\begin{aligned}
0 &= \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \\
&= \varepsilon_0(\varepsilon_1 E_1 - \varepsilon_2 E_2) + (P_1 - P_2) \\
\varepsilon_2 E_2 - \varepsilon_1 E_1 &= \frac{P_1 - P_2}{\varepsilon_0} = \frac{-P_0}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

mit $\vec{n} = -\vec{e}_z$ und $P_{1,2} = \vec{n} \circ \vec{P}_{\mathrm{p}1,2}$. Die Spannung (minus bei $z = 0$) resultiert zu

$$\begin{aligned}
U &= E_1 \cdot 2a + E_2 \cdot 2a \\
\frac{U}{2a} &= E_1 + E_2 \quad .
\end{aligned}$$

Ineinander eingesetzt:

$$\begin{aligned}
(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E_1 &= \varepsilon_2 \frac{U}{2a} + \frac{P_0}{\varepsilon_0} \\
(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)E_2 &= \varepsilon_1 \frac{U}{2a} - \frac{P_0}{\varepsilon_0}
\end{aligned}$$

die Grenzflächenladungen sind:

$$\begin{aligned}
-\varrho_{\mathrm{S,unten}} = D_1 = \varepsilon_0\varepsilon_1 E_1 + P_1 &= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(\frac{U}{2a} + \frac{P_0}{2\varepsilon_0}\right) + P_0 \\
&= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{U}{2a} + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{P_0}{} \\
\varrho_{\mathrm{S,oben}} = D_2 &= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\left(\frac{U}{2a} - \frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) + 2P_0 \\
&= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{U}{2a} + \frac{2\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}\frac{P_0}{} \\
&= -\varrho_{\mathrm{S,unten}} \quad .
\end{aligned}$$

Für das Potenzial resultiert

$$\begin{aligned}
V_1 = V\{z=0\} + E_1 z &= V\{z=0\} + \left(\varepsilon_2 \frac{U}{2a} + \frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) \frac{z}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \\
V_2 = V_1|_{z=2a} + E_2(z-2a) &= V\{z=0\} + \left(\varepsilon_2 \frac{U}{2a} + \frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) \frac{2a}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \left(\varepsilon_1 \frac{U}{2a} - \frac{P_0}{\varepsilon_0}\right) \frac{z-2a}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \\
&= V\{z=0\} + \frac{U}{2a}\frac{\varepsilon_2 2a + \varepsilon_1(z-2a)}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} + \frac{P_0}{\varepsilon_0}\frac{4a-z}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \\
&= V\{z=0\} + U + \left(\frac{P_0}{\varepsilon_0} - \frac{U}{2a}\varepsilon_1\right) \frac{4a-z}{\varepsilon_1+\varepsilon_2} \quad .
\end{aligned}$$

Hierkann natürlich $V\{z=0\} = 0$ angenommen werden.

Aufgabe 11

Im leitfähigen Medium 1 existiert das homogene elektrische Feld $\vec{E}_1$ wie in Abbildung 5 skizziert. Bestimmen Sie das elektrische Feld im nichtleitenden Medium 2. Beide Medien sind homogen.

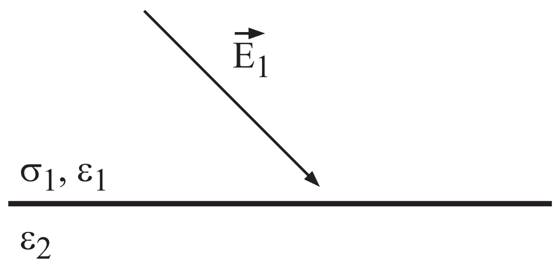


Abbildung 5: Grenzfläche zwischen zwei homogenen Medien.

Lösung zu Aufgabe 11

Wegen der Leitfähigkeit in Medium 1 muss neben den Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}
\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= \varrho_{\text{S}} \\
\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= 0
\end{aligned}$$

auch

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1)\Big|_{\text{Grenze}} = -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\text{S}}$$

beachtet werden. Es wird ein Koordinatensystem so eingeführt, dass die Normalenrichtung auf die Grenzfläche durch $\vec{e}_{\text{x}}$ beschrieben wird. Das elektrische Feld soll mit der zweiten Komponente in y-Richtung zeigen. Der Ursprung des Koordinatensystems liege auf der Grenzfläche. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{e}_{\text{x}} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{x=0} &= \varrho_{\text{S}} \\
\vec{e}_{\text{x}} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{x=0} &= 0 \\
\vec{e}_{\text{x}} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1)\Big|_{x=0} &= -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\text{S}} \quad ,
\end{aligned}$$

also $E_{2\text{y}} = E_{1\text{y}}$, $\varepsilon_0 (\varepsilon_2 E_{2\text{x}} - \varepsilon_1 E_{1\text{x}}) = \varrho_{\text{S}}$, $-\sigma_1 E_{1\text{x}} = -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\text{S}}$. Aus dem letzten Ausdruck folgt direkt

$$\varrho_{\text{S}} = \sigma_1 E_{1\text{x}}(t - t_0) + \varrho_{\text{S}0}$$

und somit

$$E_{2\text{x}} = \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\sigma_1}{\varepsilon_2\varepsilon_0}(t - t_0)\right) E_{1\text{x}} + \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon_2}\varrho_{\text{S}0}$$

Aufgabe 12

Zwei Dielektrika mit Dielektrizitätskonstanten ϵ_1 für $z < 0$ und ϵ_2 für $z > 0$ stoßen bei $z = 0$ aneinander. In der Grenzfläche fließe ein durch die Flächenstromdichte

$$\vec{j}_{\text{S}} = j_{\text{S}0}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\vec{e}_{\text{x}}$$

gegebener Flächenstrom. Im Dielektrikum bei $z < 0$ werde keine Leistung transportiert. Geben Sie eine mögliche Lösung der Wellengleichung für das elektrische Feld $\vec{E}$ im Dielektrikum bei $z > 0$ an, die die Stetigkeitsbedingungen erfüllt.

Lösung zu Aufgabe 12

Das elektrische und magnetische Feld im Medium bei $z > 0$ $\vec{E}$ und $\vec{H}$ müssen die Wellengleichung erfüllen und sind über den Wellenwiderstand miteinander verknüpft. Da die gegebene Flächenstromdichte in der Ebene $z = 0$ örtlich konstant ist, wird ein Ansatz gewählt, dessen

Lösung in dieser Ebene ebenfalls konstant ist.

$$\vec{E} = \hat{\vec{E}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} = Z \vec{H} \times \vec{e}_z \tag{21}$$

$$\vec{H} = \hat{\vec{H}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} = \frac{\vec{e}_z \times \vec{E}}{Z} \tag{22}$$

$$\tag{23}$$

Es handelt sich um eine in $\pm \vec{e}_z$ Richtung ausbreitende ebene Welle. Die Dispersionsrelation liefert $k_z = \pm\sqrt{\omega^2 \mu \mu_0 \epsilon_2 \epsilon_0}$. Die Stetigkeitsbedingungen lauten

$$\vec{n} \times \left(\vec{E}_2 - \vec{E}_1\right) = 0 \tag{24}$$

$$\vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1\right) = \vec{j}_S \tag{25}$$

Das setzten von $H_1 = 0$ gewährleistet, dass der Pointingvektor in Gebiet $z < 0$ verschwindet, und somit keine Energie transportiert wird. Ohne Berücksichtigung möglicher Gleich- und Normalanteile folgt

$$\vec{H}_2 \Big|_{z=0} = -j_{S0} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} \vec{e}_y = \hat{\vec{H}}_2 \tag{26}$$

und damit

$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} j_{S0} \vec{e}_x \mathrm{e}^{\mathrm{i}(k_z z - \omega t)} \tag{27}$$

Aufgabe 13

Bestimmen Sie das Potential auf der z-Achse, das von der in Zylinderkoordinaten gegebenen Raumladung

$$\varrho_V = \varrho_S \cdot \mathrm{rect}\left\{\frac{z}{2a}\right\} \cdot \delta\left\{\rho - a\right\}$$

erzeugt wird.

Hinweis:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + (b - x)^2}} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{a} \operatorname{arsinh}\left\{\frac{x - b}{a}\right\}$$

Lösung zu Aufgabe 13

$$V_{\{\vec{r}\}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int \frac{\varrho_{V\{\vec{r}'\}}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}d^3r'$$

Volumenelement in Zylinderkoordinaten $d^3r' = \rho' d\rho' d\varphi' dz'$

$$\begin{aligned}
V_{\{\vec{r}\}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{\varrho_S a}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}d\varphi' dz' \\
&= \frac{\varrho_S \cdot a \cdot 2\pi}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-a}^{a}\frac{1}{\sqrt{a^2+(z-z')^2}}dz' \\
&= \frac{\varrho_S \cdot a}{2\varepsilon_0}\left[arcsinh\left\{\frac{z'-z}{a}\right\}\right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{\varrho_S \cdot a}{2\varepsilon_0}\left(arcsinh\left\{\frac{a-z}{a}\right\} - arcsinh\left\{\frac{-a-z}{a}\right\}\right) \qquad (28)
\end{aligned}$$

Aufgabe 14

Drei unmagnetische Medien sind wie in Abbildung 6 skizziert geschichtet. Eine transversal magnetische ebene Welle fällt aus Medium 1 schräg auf die ungeladene stromfreie ebene Grenzfläche. Im Medium 2 bilden sich zwei partiell gegenläufige ebene Wellen aus, die ihrerseits mit der transmittierte Welle in Medium 3 kommunizieren. Geben Sie die Wellenzahlvektoren der Wellen in den Medien 2 und 3 als Funktion der Komponenten von $\vec{k}_{11}$ an. Wie lauten die Ansätze für die magnetischen Felder der Wellen in allen drei Schichten?

Lösung zu Aufgabe 14

Zunächst wird ein Koordinatensystem so eingeführt, dass die Wellenzahlvektoren jeweils nur eine x- und eine z-Komponente haben. Dabei soll die z-Komponente senkrecht auf den Grenzflächen stehen und von Medium 1 nach 2 weisen. Mit

$$\vec{k}_{11} = k_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + k_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

resultiert wegen der tangentialen Stetigkeit aller Wellenzahlvektoren

$$\vec{k}_{21} \circ \vec{e}_{\mathrm{x}} = \vec{k}_{22} \circ \vec{e}_{\mathrm{x}} = \vec{k}_{31} \circ \vec{e}_{\mathrm{x}} = k_{\mathrm{x}} \quad .$$

Mit $||\vec{k}||^2 = k^2$ und $k_{11} = k_1$, $k_{21} = k_{22} = k_2$, $k_{31} = k_3$ lässt sich feststellen: $k_2^2 = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k_1^2$ und $k_3^2 = \frac{\varepsilon_3}{\varepsilon_1}k_1^2$. Die jeweiligen Normalkomponenten der Wellenzahlvektoren folgen aus der

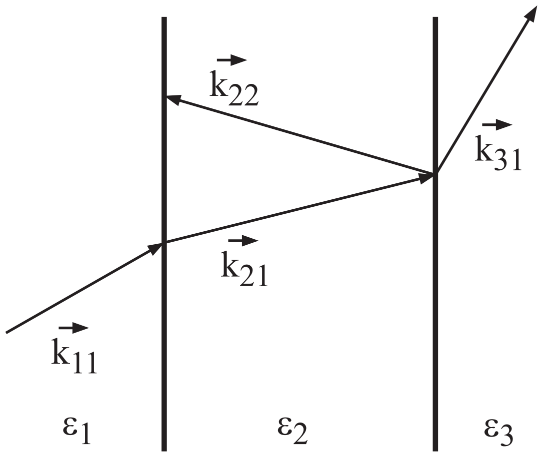


Abbildung 6: Wellenzahlvektoren ebener Wellen in einem geschichteten Medium.

Dispersionsrelation

$$\vec{k}_{21} \circ \vec{e}_\mathrm{z} = \sqrt{k_2^2 - k_\mathrm{x}^2} = \sqrt{k_2^2 - k_1^2 + k_\mathrm{z}^2} \quad ,$$

$$\vec{k}_{22} \circ \vec{e}_\mathrm{z} = -\sqrt{k_2^2 - k_\mathrm{x}^2} = -\sqrt{k_2^2 - k_1^2 + k_\mathrm{z}^2}$$

und

$$\vec{k}_{31} \circ \vec{e}_\mathrm{z} = \sqrt{k_3^2 - k_\mathrm{x}^2} = \sqrt{k_3^2 - k_1^2 + k_\mathrm{z}^2} \quad .$$

Die Ansätze für die magnetischen Feldstärken lauten

$$\vec{H}_{\ell,m} = H_{\ell,m} \exp\{i(\vec{k}_{\ell,m} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

mit $\ell \in \{1,2,3\}$, $m \in \{1,2\}$.

Aufgabe 15

Der Halbraum $z \geq 0$ sei mit Luft gefüllt (Brechzahl $n_1 = 1$). In ihm sei das elektrische Feld $\vec{E} = E_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + E_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y} + E_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}$ durch

$$\vec{E}(z,t) = E_0 \vec{e}_\mathrm{y} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_1 k_0 z - \omega t)}$$

gegeben. Bestimmen Sie die kleinstmögliche positive Brechzahl n_2 des Dielektrikums im Halbraum $z < 0$, so dass Re $\{E_\mathrm{y}(z = -\pi/(8k_0), t = 0)\} = 0$ gilt. Skizzieren Sie Re $\{E_\mathrm{y}(z, t = 0)\}$, Re $\{E_\mathrm{y}(z, t = \pi/(2\omega)\}$, sowie Re $\{E_\mathrm{y}(z, t = \pi/\omega)\}$ im Bereich $-4\pi/(n_2 k_0) \leq z \leq 2\pi/(n_1 k_0)$.

Lösung zu Aufgabe 15

Bei der für den Halbraum $z \geq 0$ gegebenen Welle handelt es sich um eine ebene Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet, sich also von der dielektrischen Grenzfläche bei $z = 0$ entfernt. Sie stellt eine transmittierte Welle E_{tr} dar. Das elektrische Feld im Halbraum $z < 0$ setzt sich folglich aus der Überlagerung von einfallender E_{in} und reflektierender Welle E_{ref} zusammen. Für den Amplitudenreflexionsfaktor bzw. Amplitudentransmissionsfaktor gelten

$$r = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}, \quad t = 1 + r.$$

Für einfallende und reflektierte Welle gelten

$$\vec{E}_{\text{in}}(z,t) = \frac{1}{1+r} E_0 \vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_2 k_0 z - \omega t)} \tag{29}$$

$$\vec{E}_{\text{ref}}(z,t) = \frac{r}{1+r} E_0 \vec{e}_y \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-n_2 k_0 z - \omega t)} \tag{30}$$

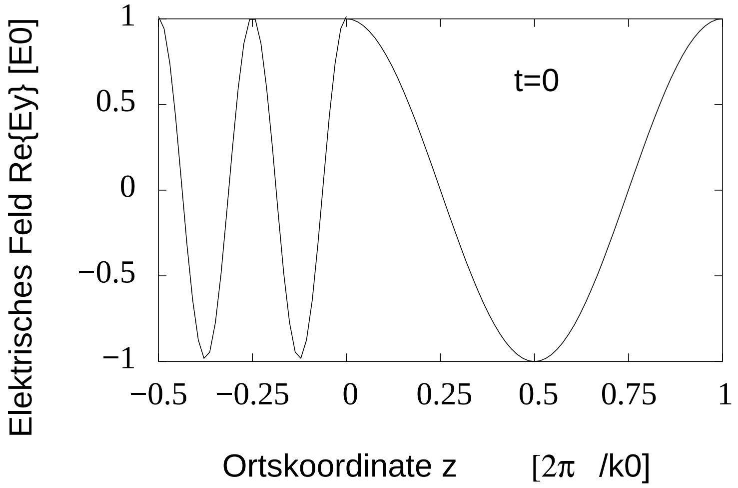
Der Realteil der Summe von E_{in} und E_{ref} soll laut Aufgabenstellung bei $z = -\pi/(8k_0)$ zum Zeitpunkt $t = 0$ verschwinden.

$$0 = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{1+r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_2 k_0 \cdot \pi/(8k_0))} + \frac{r}{1+r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-n_2 k_0 \cdot \pi/(8k_0))} \right\} \tag{31}$$

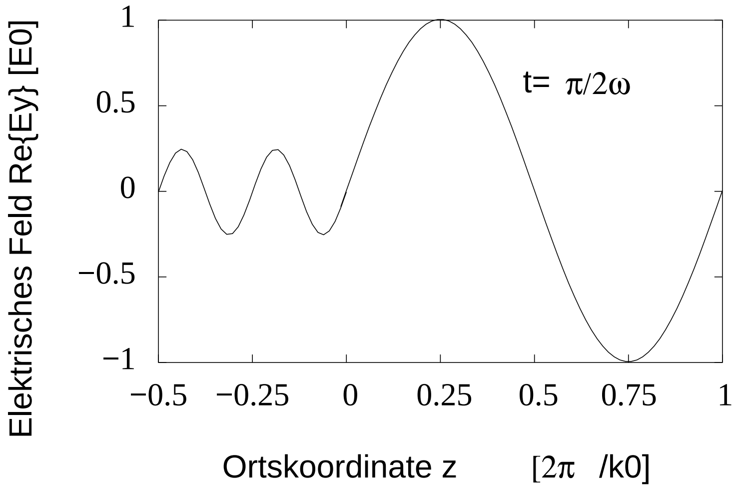
$$0 = \mathrm{Re}\left\{ \frac{1}{1+r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n_2 \pi/8)} \right\} + \mathrm{Re}\left\{ \frac{r}{1+r} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(-n_2 \pi/8)} \right\} \tag{32}$$

$$\tag{33}$$

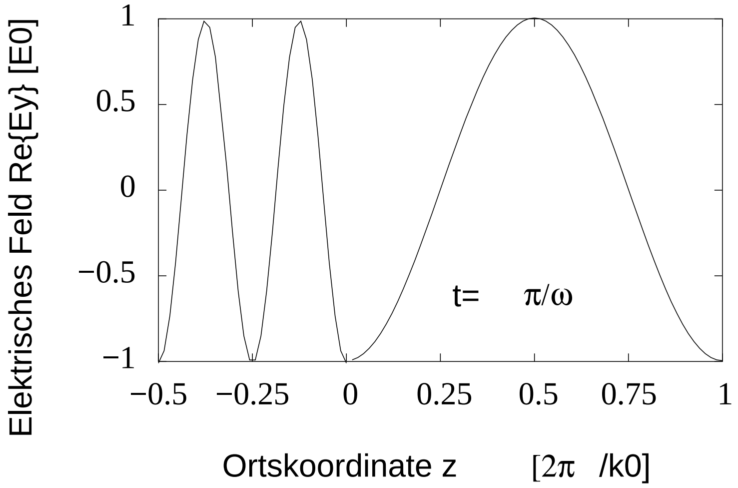
n_2 und damit auch r sind laut Aufgabenstellung positiv. Die beiden Summanden können sich daher nicht gegenseitig kompensieren. Jeder einzelne muss daher null werden. Das kleinste n_2, das dieser Forderung gerecht wird, lautet $n_2 = 4$. Daraus folgt ausserdem $r = 3/5$ und $t = 1 + r = 8/5$. Bei den Skizzen des Realteils des elektrischen Feldes ist zu beachten, dass sich für $z < 0$ zwei in entgegengesetzte Richtugen ausbreitende Wellen überlagern. Ausserdem ist die Wellenlänge 4 mal kleiner als bei $z > 0$. Dort existiert nur eine Welle, die sich in z-Richtung ausbreitet. Bei der Grenzfläche bei $z = 0$ muß das elektrische Feld zu jeder Zeit stetig sein.



Skizze zum Zeitpunkt $t = 0$. Einfallende und reflektierte Welle im Medium $z < 0$ überlagern sich konstruktiv.



Skizze zum Zeitpunkt $t = \pi/2\omega$. Die reflektierte Welle löscht die Einfallende teilweise aus.



Skizze zum Zeitpunkt $t = \pi/\omega$. Analog zu $t = 0$, jedoch invertiert.