Aufgabe 1 (2 Punkte)

Eine Punkladung Q soll durch eine Kugel mit Radius a und der Oberflächenladung ϱ_{SO} ersetzt werden. Wie groß muss ϱ_{SO} gewählt werden, damit die elektrischen Felder für $r > a$ identisch sind?

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Für die Erdung einer Anlage wird angenommen, dass der Erder aus einer metallischen kugelförmigen Elektrode vom Durchmesser $d = 4\,\mathrm{cm}$ besteht. Sie ist zur Hälfte in den Erdboden eingelassen. Die Leitfähigkeit des Boden beträgt σ. Durch die Elektrode fließt der Strom J in den Boden. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt der Elektrode ist das Potenzial auf $1\,\%$ abgefallen?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Das modifizierte Durchflutungsgesetz in einem leitfähigen Medium lautet

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\mathrm{Ohm}}$$

mit der Ohmschen Stromdichte $\vec{j}_{\mathrm{Ohm}} = \sigma\vec{E}$ und der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$. Überführen sie obige Differentialgleichung in die entsprechende Integralform.

Aufgabe 4 (2 Punkte)

Eine Ladung $Q = 2q_0$ mit der Masse m_{Q} bewegt sich bei $z = -\frac{1}{2}a$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_z$. Im Bereich $-\frac{1}{2}a < z < \frac{1}{2}a$ existiert das elektrische Feld $\vec{E} = E_{\mathrm{x}}\vec{e}_x + E_{\mathrm{y}}\vec{e}_y + E_{\mathrm{z}}\vec{e}_z$. Welche Feldstärke muss das Feld $\vec{E}$ besitzen, damit die Ladung Q bei $z = \frac{1}{2}a$ die Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_x + v_0\vec{e}_z$ besitzt?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Ein unendlich langes gerades ideal leitfähiges Koaxialkabel mit verlustlosem Dielektrikum wird vom Strom J durchflossen. Der Strom ist im Außen- und Innenleiter homogen verteilt und fließt entgegengesetzt zueinander. Der Radius des Innenleiters ist a, der Außenleiter erstreckt sich im

Bereich $b \leq \rho \leq c$. Zwischen Innen- und Außenleiter wird die Spannung U gemessen. Wie lautet der Poyntingvektor im gesamten Raum? Berechnen Sie die durch das Kabel transportierte Leistung.

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Betrachtet wird ein ebener Plattenkondensator, der auf die Spannung U geladen ist. Die Platten befinden sich im Abstand d zueinander. Aufgrund der großen Abmessungen der Platten können Anteile des elektrischen Feldes in der Plattenebene vernachlässigt werden. Ein mit der Ladung Q geladenes Ion der Masse m löst sich aus einer Elektrode und prallt auf die Gegenelektrode. Mit welcher Geschwindigkeit findet der Aufprall statt?

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Vier dünne Stromfäden sind parallel zur z-Achse so angeordnet, dass sie im Querschnitt ein Quadrat mit der Kantenlänge a aufspannen. Der Schwerpunkt des Quadrates soll auf die z-Achse fallen. Jeder Stromfaden wird von einem Strom I in positiver z-Richtung durchflossen. Bestimmen sie die magnetische Induktion auf der z-Achse und für grosse Abstände ($\rho >> a$). (Begründung oder Rechnung!)

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Die Welle $\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - k_\mathrm{x} x - k_\mathrm{z} z)\}(\frac{\vec{e}_\mathrm{x}}{k_\mathrm{z}} - \frac{\vec{e}_\mathrm{z}}{k_\mathrm{x}})$ trifft auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien mit den Brechzahlen n_1 und n_2. Die Grenzfläche liegt bei $z = h$, die einfallende Welle läuft im Medium 1 ($z < h$). Welche Größe hat der Leistungs-Transmissionsfaktor?

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Durch eine atmosphärische Blitzentladung entsteht in einer auf der Erdoberfläche aufgestellten quadratischen Rahmenantenne eine magnetische Feldstärke $\vec{H} = H_0 \exp\{-\frac{t^2}{\Delta t^2}\}\vec{e}_\mathrm{z}$. Die Antenne ist in Abbildung 1 dargestellt, wobei sich die Enden '1' und '2' der Antenne in vernachlässigbar kleinem Abstand befinden. Wie lautet der zeitliche Verlauf der zwischen den Enden der Antenne entstehenden Spannung U_{12}?

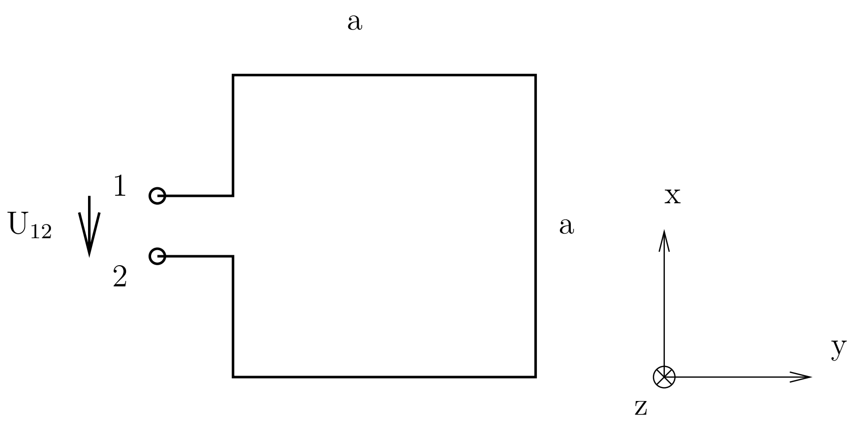

Abbildung 1: Rahmenantenne mit Orientierung.

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Eine reale Spule (Länge l, Innendurchmesser d_i, Außendurchmesser d_a) befindet sich im Schwerpunkt $\vec{r} = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$. Sie ist um den Winkel ϕ_x in Richtung der x-Achse und um den Winkel ϕ_y in Richtung der y-Achse verkippt. Sie wird von einem Strom I (siehe Abbildung 2) durchflossen. Bestimmen Sie eine weitere Spule (im Bereich $z < 0$) so, dass in der xy-Ebene das magnetische Feld keine z-Komponente besitzt. (Begründung)

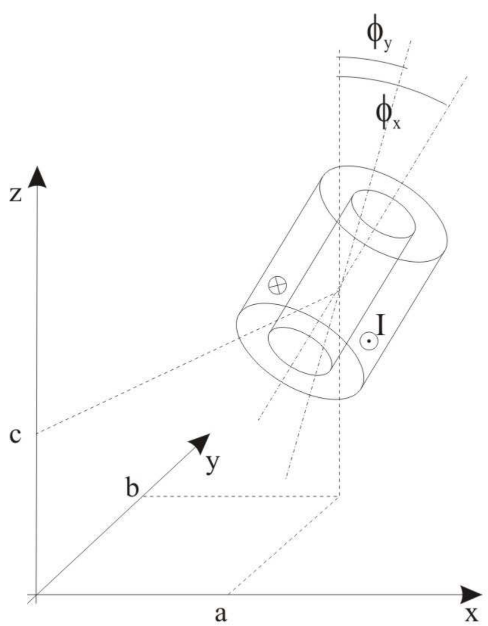

Abbildung 2: Reale Spule im freien Raum. Der Schwerpunkt liegt bei $\vec{r} = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$.

Aufgabe 11 (6 Punkte)

Die Ebene $z = 0$ bildet die Grenze zwischen dem homogenen Halbraum 1 ($z < 0$) mit Materialparametern $\mu_1, \varepsilon_1, \sigma_1$ sowie dem Halbraum 2, in dem Vakuum herrscht. Im Medium 1 liegt die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1 = (H_{11} \exp\{-iax\} + H_{12} \exp\{iax\}) \exp\{i(\omega t - \beta z)\} \vec{e}_{\mathrm{y}}$ vor. Wie groß ist die Tangentialkomponente der elektrische Feldstärke $\vec{E}_2$ im Medium 2 an der Grenzfläche?

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = p\vec{e}_{\mathrm{z}}$ lautet

$$\begin{aligned} \vec{A} &= A_{\mathrm{z}} \vec{e}_{\mathrm{z}} \\ A_{\mathrm{z}} &= \frac{\mu_0 \mathrm{i} \omega p}{4\pi r} \exp\left\{\mathrm{i}(\omega t - k_0 r)\right\} \\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \ . \end{aligned}$$

Stellen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten und den zugehörigen Einheitsvektoren dar. Berechnen Sie aus dem bestimmten Vektorpotential $\vec{A}$ die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ des Hertzschen Dipols für $k_0 r \gg 1$ (Fernfeld); berücksichtigen Sie nur die dominierenden Terme.

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Im freien Raum lautet das magnetische Feld einer Welle

$$\vec{H} = H_0 \left(\exp\left(i \left(\frac{\pi x}{a} + \omega t \right) \right) \vec{e}_y + \exp\left(i \left(\frac{\pi y}{b} + \omega t \right) \right) \vec{e}_z \right)$$

Wie lautet das zugehörige elektrische Feld?

Aufgabe 14 (6 Punkte)

In einem geraden Metallrohr, dessen Achse parallel zur z-Achse liegt, wird das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A} = (A \sin\{k_{\mathrm{x}} x\} + B \cos\{k_{\mathrm{x}} x\}) \exp\{i(\omega t - k_{\mathrm{z}} z\} \vec{e}_{\mathrm{y}}$ eingeprägt. Der rechteckige Querschnitt des Rohres hat die Abmessungen a und b in x- und y-Richtung. Wie groß muss k_{x} mindestens sein, damit die Randbedingungen auf den ideal leitfähigen Wänden erfüllt sind? Wie ist dann A und B zu wählen? Welche Größe hat k_{z}?

Aufgabe 15 (7 Punkte)

Zwischen den Elektroden eines Kugelkondensators ($r_\mathrm{i} = a$ und $r_\mathrm{a} = 2a$) wurde folgender Potentialverlauf gemessen:

$$V = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\exp\left\{\frac{2r}{a}\right\} + \sin\left\{\frac{r}{a}\right\}\right)$$

Der Kondensator enthält einen idealen Isolierstoff mit Dielektrizitätskonstante ε. Bestimmen Sie die Volumenladungsträgerdichte zwischen den beiden Elektroden.

Aufgabe 16 (11 Punkte)

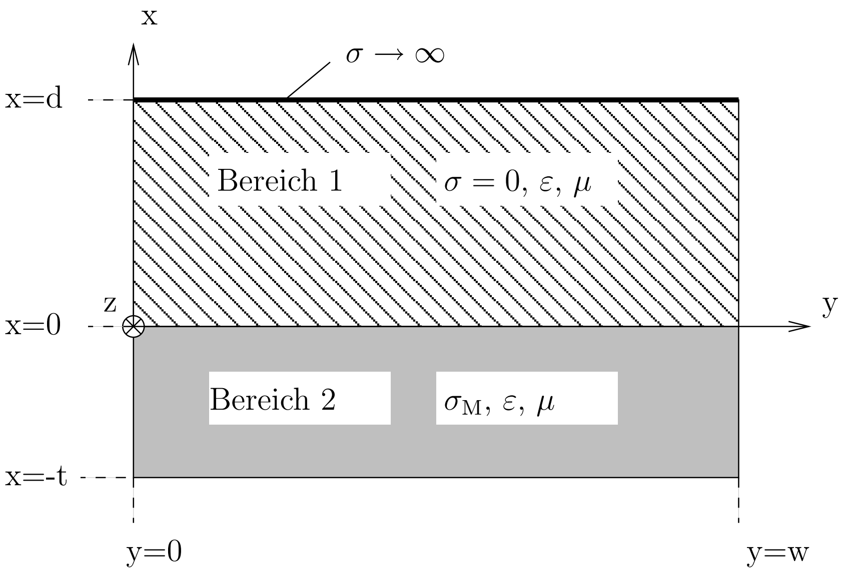

Abbildung 3: Bandleitung mit Dielektrikum.

In der unendlich ausgedehnten Bandleitung mit Querschnitt gemäß Abbildung 3 breiten sich harmonische Wellen aus. Die Materialien der Bandleitung sind homogen und linear. In den verlustbehafteten ($\sigma \neq 0$) Medien gilt das modifizierte Ampèresche Gesetz

$$\nabla\times\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

das für $\sigma = 0$ in das normale Ampèresche Gesetz übergeht. Die anderen Materialgleichungen ändern sich nicht. Im Bereich 1 ($\sigma = 0$) soll sich eine TEM-Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\vec{H}_1 = H_1 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - \beta z\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

ausbreiten. Im Bereich 2 ($\sigma \neq 0$) ist der Ansatz

$$\vec{H}_2 = H_2 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_2 \circ \vec{r})\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

mit komplexwertigem $\vec{k}_2$ zu wählen. Welche Größe hat β? Wie lautet die Wellengleichung für $\vec{H}_2$? Welche Vereinfachung ergibt sich, wenn $\sigma_\mathrm{M} \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0$ gilt? Welche Größe hat $\vec{k}_2$ dann?

Aufgabe 17 (11 Punkte)

Ein Stab der Länge l mit ortsfester Linienladung ϱ_L rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Schwerpunkt (im Ursprung des Koordinatensystems) in positiver $\vec{e}_\phi$-Richtung, so dass die Rotationsebene die xy-Ebene ist. Wie gross ist die resultierende magnetische Induktion $\vec{B}$ auf der z-Achse?

Mögliche Integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \\
\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left\{x + \sqrt{a^2+x^2}\right\} \\
\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}
\end{aligned}$$