Aufgabe 1

Eine Punkladung Q soll durch eine Kugel mit Radius a und der Oberflächenladung ϱ_{SO} ersetzt werden. Wie groß muss ϱ_{SO} gewählt werden, damit die elektrischen Felder für $r > a$ identisch sind?

Lösung zu Aufgabe 1

Das Gleichsetzen des Potentials einer Punktladung und einer Kugel mit Oberflächenladung, ergibt:

$$\varrho_{SO} = \frac{Q}{4\pi a^2}$$

Aufgabe 2

Für die Erdung einer Anlage wird angenommen, dass der Erder aus einer metallischen kugelförmigen Elektrode vom Durchmesser $d = 4\,\mathrm{cm}$ besteht. Sie ist zur Hälfte in den Erdboden eingelassen. Die Leitfähigkeit des Boden beträgt σ. Durch die Elektrode fließt der Strom J in den Boden. In welcher Entfernung vom Mittelpunkt der Elektrode ist das Potenzial auf $1\,\%$ abgefallen?

Lösung zu Aufgabe 2

Für das Potenzial im Erdboden gilt die Laplacegleichung. Es herrscht Kugelsymmetrie für das Potenzial (sowohl oberhalb als auch unterhalb der Grenzfläche sind die Medien zwar unterschiedlich, aber homogen und ladungsfrei). Somit muss

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} V\right) = 0$$

gelten. Somit kann für den Raum außerhalb der Kugel das Potenzial

$$V = V_0 \frac{d}{2r}$$

angenommen werden. Auf der Kugeloberfläche herrscht das Potenzial V_0. Das Potenzial ist auf $1\,\%$ bei $r = 50d = 2\,\mathrm{m}$ abgesunken.

Aufgabe 3

Das modifizierte Durchflutungsgesetz in einem leitfähigen Medium lautet

$$\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\mathrm{Ohm}}$$

mit der Ohmschen Stromdichte $\vec{j}_{\mathrm{Ohm}} = \sigma\vec{E}$ und der dielektrischen Verschiebungsdichte $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$. Überführen sie obige Differentialgleichung in die entsprechende Integralform.

Lösung zu Aufgabe 3

Angenommen wir das Durchflutungsgesetz in einem leitfähigen Medium:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} \;=\; \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{\mathrm{Ohm}} \qquad .$$

Wird $\vec{H}$ als differenzierbares Vektorfeld angenommen, kann die Differentialgleichung behelfs des Stokesschen Satzes

$$\iint_{S_{\mathrm{C}}} \mathrm{rot}\,\vec{T}\{\vec{r}\}\circ \mathrm{d}^2\vec{S} \;=\; \oint_{\mathrm{C}} \vec{T}\{\vec{r}\}\circ \mathrm{d}\vec{l}$$

in eine Integralform gebracht werden. Die betrachtete Fläche S_{C} wird von der Kurve C umschlossen. Die Differentialgleichung lautet damit:

$$\begin{aligned}\iint_{S_{\mathrm{C}}} \mathrm{rot}\,\vec{H}\{\vec{r}\}\circ \mathrm{d}^2\vec{S} \;&=\; \oint_{\mathrm{C}} \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial\vec{E}\{\vec{r}\}}{\partial t}\circ \mathrm{d}^2\vec{S} + \oint_{\mathrm{C}} \vec{j}\{\vec{r}\}\circ \mathrm{d}^2\vec{S} \\ &=\; \oint_{\mathrm{C}} \vec{H}\{\vec{r}\}\circ \mathrm{d}\vec{l} \qquad .\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Eine Ladung $Q = 2q_0$ mit der Masse m_Q bewegt sich bei $z = -\frac{1}{2}a$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_z$. Im Bereich $-\frac{1}{2}a < z < \frac{1}{2}a$ existiert das elektrische Feld $\vec{E} = E_\mathrm{x}\vec{e}_x + E_\mathrm{y}\vec{e}_y + E_\mathrm{z}\vec{e}_z$. Welche Feldstärke muss das Feld $\vec{E}$ besitzen, damit die Ladung Q bei $z = \frac{1}{2}a$ die Geschwindigkeit $\vec{v} = v_0\vec{e}_x + v_0\vec{e}_z$ besitzt?

Lösung zu Aufgabe 4

Keine Änderung in v_z und v_y somit sind E_z und E_y gleich Null.

Die Änderung in x-Richtung:

$$\Delta v_x = v_0 = \frac{Q}{m}\int_0^t E_x dt$$

bei konstantem E_x ergibt sich:

$$v_0 = \frac{QE_x t}{m}$$

mit der Druchflugzeit t über die Strecke a:

$$a = \int_0^t v_z dt = v_z t$$

ergibt sich das Feld:

$$E_x = \frac{m \cdot v_0^2}{2q \cdot a}$$

Aufgabe 5

Ein unendlich langes gerades ideal leitfähiges Koaxialkabel mit verlustlosem Dielektrikum wird vom Strom J durchflossen. Der Strom ist im Außen- und Innenleiter homogen verteilt und fließt entgegengesetzt zueinander. Der Radius des Innenleiters ist a, der Außenleiter erstreckt sich im Bereich $b \le \rho \le c$. Zwischen Innen- und Außenleiter wird die Spannung U gemessen. Wie lautet der Poyntingvektor im gesamten Raum? Berechnen Sie die durch das Kabel transportierte Leistung.

Lösung zu Aufgabe 5

Das Koaxialkabel sei so orientiert, dass es koaxial zur z-Achse liegt und der Strom im Innenleiter in z- Richtung fließt. Es herrscht wegen der homogenen Stromdichte in den Leitern die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = J\vec{e}_\phi \begin{cases} \frac{\rho^2}{a^2}\frac{1}{2\pi\rho} & \text{für} \quad \rho \le a \\ \frac{1}{2\pi\rho} & \text{für} \quad a < \rho \le b \\ \frac{c^2-\rho^2}{c^2-b^2}\frac{1}{2\pi\rho} & \text{für} \quad b < \rho \le c \\ 0 & \text{für} \quad c < \rho < \infty \end{cases}$$

Das elektrische Feld im Außenraum ist wegen der fehlenden magnetischen Feldstärke für den Poyntingvektor irrelevant. Daher kann angenommen werden, dass der Außenleiter geerdet ist. In den idealen Leitern verschwindet das elektrische Feld. Somit resultiert zwischen den Leitern

$$\vec{E} = \frac{U}{\ln\{\frac{b}{a}\}}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho \quad ,$$

wenn das Potenzial am Innenleiter größer als am Außenleiter ist. Der Poyntingvektor ist demnach also fast überall 0, bis auf den Raum zwischen den beiden Leitern. Hier ergibt sich

$$\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} = \frac{U}{\ln\{\frac{b}{a}\}}\frac{1}{\rho}J\frac{1}{2\pi\rho}\vec{e}_z \quad .$$

Die Leistung, die in z-Richtung transportiert wird, resultiert aus der Integration über den gesamten Querschnitt senkrecht zur z-Achse, also

$$P = \iint \vec{S}\circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \int_a^b \int_0^{2\pi} \vec{S}\circ(\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho\vec{e}_z) = \int_a^b \int_0^{2\pi} \frac{U}{\ln\{\frac{b}{a}\}}\frac{1}{\rho}J\frac{1}{2\pi\rho}\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}\rho = UJ$$

wie zu erwarten war.

Aufgabe 6

Betrachtet wird ein ebener Plattenkondensator, der auf die Spannung U geladen ist. Die Platten befinden sich im Abstand d zueinander. Aufgrund der großen Abmessungen der Platten können Anteile des elektrischen Feldes in der Plattenebene vernachlässigt werden. Ein mit der Ladung Q geladenes Ion der Masse m löst sich aus einer Elektrode und prallt auf die Gegenelektrode. Mit welcher Geschwindigkeit findet der Aufprall statt?

Lösung zu Aufgabe 6

Klassische Lösung: Im Plattenkondensator herrscht das homogene elektrische Feld $E = \frac{U}{d}$, wobei $\vec{E} = E\vec{n}$ in Richtung des Normalenvektors der Platten zeigt. Die Flugbahn des Teilchens in Normalenrichtung

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \circ \vec{n}\right) = \vec{a} \circ \vec{n} = \frac{\vec{F} \circ \vec{n}}{m} = \frac{QE}{m}$$

integriert sich zu

$$v_{\max} = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \circ \vec{n}\right) \mathrm{d}t = \int_0^T \frac{QE}{m} \mathrm{d}t = \frac{QE}{m} t$$

mit T der Zeit bis zum Aufprall des Ions in der Gegenelektrode. Die vom Ion bis zum Aufprall zurückgelegte Strecke

$$s = \int_0^T \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{r} \circ \vec{n}\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{QE}{m}T^2 = d$$

also $T = \sqrt{2\frac{md}{QE}}$ führt auf die Ionengeschwindigkeit beim Einschlag: $v_{\max} = \sqrt{\frac{2QU}{m}}$. Alternativ führt Gleichsetzen von kinetischer Ionenenergie $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$ und potentieller Energie $E_{\mathrm{pot}} = QU$ auf das gleiche Ergebnis.

Aufgabe 7

Vier dünne Stromfäden sind parallel zur z-Achse so angeordnet, dass sie im Querschnitt ein Quadrat mit der Kantenlänge a aufspannen. Der Schwerpunkt des Quadrates soll auf die z-Achse fallen. Jeder Stromfaden wird von einem Strom I in positiver z-Richtung durchflossen. Bestimmen sie die magnetische Induktion auf der z-Achse und für grosse Abstände ($\rho >> a$). (Begründung oder Rechnung!)

Lösung zu Aufgabe 7

Auf der z-Achse ist das resultierende Feld Null, da sich Felder der gegenüberliegenden Stromfäden aufheben.

Für grosse Abstände verhält sich das Feld wie ein Stromfaden mit vierfachem Strom

$$\vec{B} = 4 \cdot I \frac{\mu_0}{2\pi\rho} \vec{e}_\rho$$

Aufgabe 8

Die Welle $\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - k_x x - k_z z)\}(\frac{\vec{e}_x}{k_z} - \frac{\vec{e}_z}{k_x})$ trifft auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien mit den Brechzahlen n_1 und n_2. Die Grenzfläche liegt bei $z = h$, die einfallende Welle läuft im Medium 1 ($z < h$). Welche Größe hat der Leistungs-Transmissionsfaktor?

Lösung zu Aufgabe 8

Der Leistungs-Transmissionsfaktor ergibt sich mit dem Leistungs-Reflexionsfaktor R zu $T = 1 - R$. Under der Leistungs-Reflexionsfaktor resultiert aus dem (Amplituden-Reflexionsfaktor mit $R = |r|^2$, welcher noch zu bestimmen ist.

Aus den Angaben bezüglich der Grenzfläche folgt der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_z$. Der Ausbreitungsvektor der Welle ist $\vec{k} = k_x\vec{e}_x + k_z\vec{e}_z$. Der Hilfsvektor $\vec{e}_\ell$, der senkrecht zur Einfallsebene liegt, ist demnach $\vec{e}_\ell = \frac{(\vec{n}\times\vec{k})}{\|\vec{n}\times\vec{k}\|} = \vec{e}_y$. Da $\vec{H}$ keine Komponente in dieser Richtung aufweist, handelt es sich um eine transversal elektrische Welle. Der Reflexionsfaktor einer TE- Welle lautet

$$r = \frac{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}}{\omega \mu_{\mathrm{in}} \mu_0} - \dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\omega \mu_{\mathrm{tr}} \mu_0}}{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}}{\omega \mu_{\mathrm{in}} \mu_0} + \dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\omega \mu_{\mathrm{tr}} \mu_0}}$$

Der Wert von $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}$ ist k_{z}. Für die transmittierte Welle resultiert

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0 (n_2^2 - n_1^2) + k_{\mathrm{z}}^2} \quad .$$

Damit sind alle Größen bestimmt und der Reflexionsfaktor kann berechnet werden. In Folge ist somit auch der Leistungs-Transmissionsfaktor bestimmt.

Aufgabe 9

Durch eine atmosphärische Blitzentladung entsteht in einer auf der Erdoberfläche aufgestellten quadratischen Rahmenantenne eine magnetische Feldstärke $\vec{H} = H_0 \exp\{-\frac{t^2}{\Delta t^2}\} \vec{e}_{\mathrm{z}}$. Die Antenne ist in Abbildung 1 dargestellt, wobei sich die Enden '1' und '2' der Antenne in vernachlässigbar kleinem Abstand befinden. Wie lautet der zeitliche Verlauf der zwischen den Enden der Antenne entstehenden Spannung U_{12}?

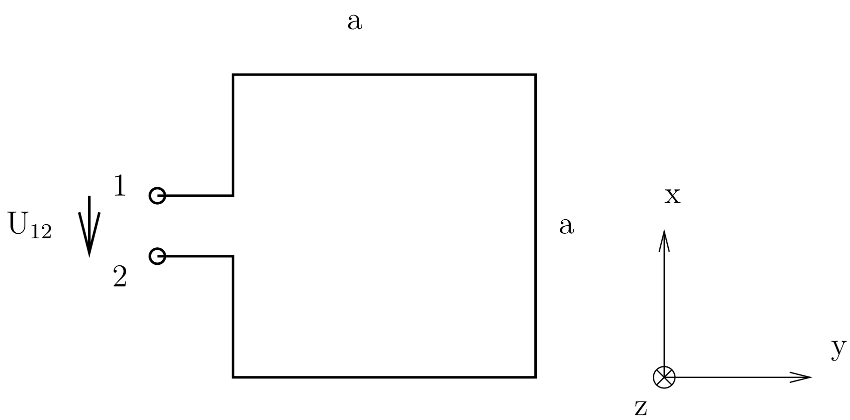

Abbildung 1: Rahmenantenne mit Orientierung.

Lösung zu Aufgabe 9

Das Faradaysche Induktionsgesetz liefert direkt die entstehende Induktionsspannung:

$$\begin{aligned}
U_{12} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S_\mathrm{C}} \vec{B}\circ \mathrm{d}^2\vec{S} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iint_{S_\mathrm{C}} \mu\mu_0\vec{H}\circ \mathrm{d}^2\vec{S} \\
&= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} \mu\mu_0 H_0 \exp\{-\frac{t^2}{\Delta t^2}\}\vec{e}_\mathrm{z}\circ\vec{e}_\mathrm{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}x \\
&= \mu\mu_0 a^2 H_0 \frac{2t}{\Delta t^2}\exp\{-\frac{t^2}{\Delta t}\} \qquad .
\end{aligned}$$

Anmerkung: Das in der Aufgabenstellung vorgegebene Feld $\vec{H}\,\{t\}$ erfüllt nicht die Maxwellgleichung in Dielektrika: $\mathrm{rot}\,\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}$. Das gewählte Feld erlaubt aber die einfache Auswertung des Flächenintegrals $\iint \vec{B}\circ \mathrm{d}^2\vec{S}$ und wurde deshalb für die Aufgabe vorgegeben.

Aufgabe 10

Eine reale Spule (Länge l, Innendurchmesser d_i, Außendurchmesser d_a) befindet sich im Schwerpunkt $\vec{r} = a\cdot\vec{e}_x + b\cdot\vec{e}_y + c\cdot\vec{e}_z$. Sie ist um den Winkel ϕ_x in Richtung der x-Achse und um den Winkel ϕ_y in Richtung der y-Achse verkippt. Sie wird von einem Strom I (siehe Abbildung 2) durchflossen. Bestimmen Sie eine weitere Spule (im Bereich $z < 0$) so, dass in der xy-Ebene das magnetische Feld keine z-Komponente besitzt. (Begründung)

Lösung zu Aufgabe 10

Die Spule wird geometrisch an der xy-Ebene gespiegelt (vgl. Spiegelladung), Strom in die entgegengesetzte Richtung.

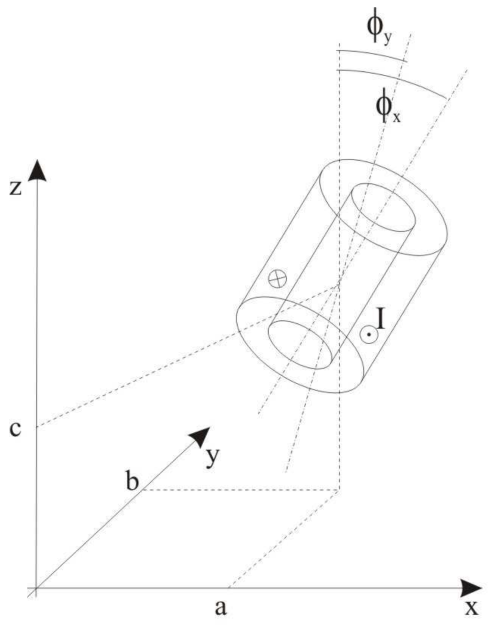

Abbildung 2: Reale Spule im freien Raum. Der Schwerpunkt liegt bei $\vec{r} = a \cdot \vec{e}_x + b \cdot \vec{e}_y + c \cdot \vec{e}_z$.

Aufgabe 11

Die Ebene $z = 0$ bildet die Grenze zwischen dem homogenen Halbraum 1 ($z < 0$) mit Materialparametern $\mu_1, \varepsilon_1, \sigma_1$ sowie dem Halbraum 2, in dem Vakuum herrscht. Im Medium 1 liegt die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1 = (H_{11}\exp\{-iax\} + H_{12}\exp\{iax\})\exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{y}$ vor. Wie groß ist die Tangentialkomponente der elektrische Feldstärke $\vec{E}_2$ im Medium 2 an der Grenzfläche?

Lösung zu Aufgabe 11

Zur Bestimmung der Größe des elektrischen Feldes im Medium 2 wird zunächst das entsprechende Feld im Medium 1 benötigt. Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche lässt sich dann das Feld im zweiten Medium an der Grenzfläche berechnen. Das elektrische Feld im resultiert für ebene Wellen aus $\vec{E} = \frac{\vec{H}\times\vec{k}}{\omega\varepsilon\varepsilon_0 - i\sigma}$. Nun ist $\vec{H}_1 = (H_{11}\exp\{-iax\} + H_{12}\exp\{iax\})\exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{y}$ eine Überlagerung zweier ebener Wellen mit den beiden Wellenzahlvektoren $\vec{k}_{11} = a\vec{e}_x + \beta\vec{e}_z$ und $\vec{k}_{12} = -a\vec{e}_x + \beta\vec{e}_z$. Damit ergibt sich

$$
\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= \frac{\vec{H}_{11}\times\vec{k}_{11} + \vec{H}_{12}\times\vec{k}_{12}}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 - i\sigma_1} \\
&= -\frac{H_{11}\exp\{-ax\}(a\vec{e}_\mathrm{z} + \beta\vec{e}_\mathrm{x}) + H_{12}\exp\{ax\}(-a\vec{e}_\mathrm{z} + \beta\vec{e}_\mathrm{x})}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 - i\sigma_1}\exp\{i(\omega t - \beta z)\} \\
&= -a\frac{H_{11}\exp\{-iax\} - H_{12}\exp\{iax\}}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 - i\sigma_1}\exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{z} \\
&\quad -\beta\frac{H_{11}\exp\{-iax\} + H_{12}\exp\{iax\}}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 - i\sigma_1}\exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{x} \quad .
\end{aligned}
$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes muss auf beiden Seiten gleich groß sein. Somit ergibt sich die Tangentialkomponente von $\vec{E}_2$ an der Grenzfläche $z = 0$ zu

$$(\vec{n}\times\vec{E}_2)\times\vec{n} = -\beta\frac{H_{11}\exp\{-iax\} + H_{12}\exp\{iax\}}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0 - i\sigma_1}\exp\{i\omega t\}\vec{e}_\mathrm{x} \quad .$$

Aufgabe 12

Das magnetische Vektorpotential eines Hertzschen Dipols mit dem Dipolmoment $\vec{p} = p\vec{e}_\mathrm{z}$ lautet

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}\\ A_\mathrm{z} &= \frac{\mu_0 \mathrm{i}\omega p}{4\pi r}\exp\left\{\mathrm{i}(\omega t - k_0 r)\right\}\\ r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \,.\end{aligned}$$

Stellen Sie das Vektorpotential $\vec{A}$ in Kugelkoordinaten und den zugehörigen Einheitsvektoren dar. Berechnen Sie aus dem bestimmten Vektorpotential $\vec{A}$ die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ des Hertzschen Dipols für $k_0 r \gg 1$ (Fernfeld); berücksichtigen Sie nur die dominierenden Terme.

Lösung zu Aufgabe 12

Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ lautet in Kugelkoordinaten:

$$\vec{A} = A_\mathrm{z}\left(\cos\{\theta\}\vec{e}_\mathrm{r} - \sin\{\theta\}\vec{e}_\theta\right)$$

Für die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ gilt

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\vec{A}\left(\cos\{\theta\}\vec{e}_\mathrm{r} - \sin\{\theta\}\vec{e}_\theta\right) \qquad .$$

Die Auswertung des Kreuzproduktes liefert für $\vec{H} = H\vec{e}_\varphi$

$$\begin{aligned}H \quad \mu\mu_0\frac{4\pi}{\mathrm{i}\omega p}\exp\left\{-\mathrm{i}\omega t\right\} &= \mathrm{rot}\left(\frac{1}{r}\exp\left\{-\mathrm{i}k_0 r\right\}\left(\cos\{\theta\}\vec{e}_\mathrm{r} - \sin\{\theta\}\vec{e}_\theta\right)\right) = \mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{H}}\\ &= \frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}(r\mathcal{H}_\theta) - \frac{\partial}{\partial\theta}\mathcal{H}_\varphi\right\}\\ &= \frac{1+\mathrm{i}k_0 r}{r^2}\exp\{-\mathrm{i}k_0 r\}\sin\{\theta\} \qquad .\end{aligned}$$

Somit lautet die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{\mathrm{i}\omega p}{4\pi}\exp\{i\,(\omega t - k_0 r)\}\frac{1+\mathrm{i}k_0 r}{r^2}\sin\{\theta\}\vec{e}_\varphi \qquad ,$$

welche mit der Näherung $k_0 r \gg 1$ im Fernfeld in

$$\vec{H} = \frac{\mathrm{i}\omega p}{4\pi}\exp\{i\,(\omega t - k_0 r)\}\frac{\mathrm{i}k_0}{r}\sin\{\theta\}\vec{e}_\varphi$$

übergeht.

Aufgabe 13

Im freien Raum lautet das magnetische Feld einer Welle

$$\vec{H} = H_0 \left(\exp\left(i \left(\frac{\pi x}{a} + \omega t \right) \right) \vec{e}_y + \exp\left(i \left(\frac{\pi y}{b} + \omega t \right) \right) \vec{e}_z \right)$$

Wie lautet das zugehörige elektrische Feld?

Lösung zu Aufgabe 13

Mit Gleichung (7.13, Skript) ergibt sich für die Superposition von zwei ebenen Wellen:

$$\vec{E}_1 = \frac{H_0}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\pi}{a} \exp\left\{ i \left(\pi \frac{x}{a} + \omega t \right) \right\} \vec{e}_z$$

$$\vec{E}_2 = \frac{H_0}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \frac{\pi}{b} \exp\left\{ i \left(\pi \frac{y}{b} + \omega t \right) \right\} \vec{e}_x$$

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

Aufgabe 14

In einem geraden Metallrohr, dessen Achse parallel zur z-Achse liegt, wird das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A} = (A \sin\{k_\mathrm{x} x\} + B \cos\{k_\mathrm{x} x\}) \exp\{i(\omega t - k_\mathrm{z} z\} \vec{e}_\mathrm{y}$ eingeprägt. Der rechteckige Querschnitt des Rohres hat die Abmessungen a und b in x- und y-Richtung. Wie groß muss k_x mindestens sein, damit die Randbedingungen auf den ideal leitfähigen Wänden erfüllt sind? Wie ist dann A und B zu wählen? Welche Größe hat k_z?

Lösung zu Aufgabe 14

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Wände gerade bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ liegen. Die Randbedingung in dem Rohr lautet, dass das tangentiale elektrische Feld auf den Rohrwänden verschwinden muss, also

$$(\vec{n} \times \vec{E}) \times \vec{n} = 0 \text{ für} \begin{cases} x \in \{0, a\} & \text{oder} \\ y \in \{0, b\} & \end{cases} \quad .$$

Das elektrische Feld lässt sich aus der magnetischen Induktion gewinnen, die Ihrerseits aus dem magnetischen Vektorpotenzial folgt. In dem hier vorliegendem strom- und ladungsfreien Fall resultiert

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \nabla\times\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times\vec{B} = \frac{1}{\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \frac{1}{\mu_0}(\nabla(\nabla\circ\vec{A}) - \Delta\vec{A}) \quad .$$

Das magnetische Vektorpotenzial ist hier Coulomb geeicht ($\nabla\circ\vec{A} = 0$). Also folgt

$$\vec{E} = \frac{k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{z}^2}{i\omega\varepsilon_0\mu_0}(A\sin\{k_\mathrm{x}x\} + B\cos\{k_\mathrm{x}x\})\exp\{i(\omega t - k_\mathrm{z}z\}\vec{e}_\mathrm{y} \quad .$$

Die Randbedingung an der Stelle $x = 0$ lässt sich nur erfüllen, wenn $B = 0$ gesetzt wird. An der Stelle $x = a$ muss $\sin\{k_\mathrm{x}a\} = 0$ erfüllt werden. Dafür ist dann $k_\mathrm{x} = m\frac{\pi}{a}$ zu wählen. Der kleinste Wert ergibt sich für $m = 1$.

Die Größe von k_z lässt sich nicht aus den Randbedingungen ermitteln, wohl aber aus der Dispersionsrelation $k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{z}^2 = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0$. Im Rohr ist $\varepsilon = 1$ und $\mu = 1$. Also ergibt sich

$$k_\mathrm{z} = \pm\sqrt{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 - k_\mathrm{x}^2}$$

Aufgabe 15

Zwischen den Elektroden eines Kugelkondensators ($r_\mathrm{i} = a$ und $r_\mathrm{a} = 2a$) wurde folgender Potentialverlauf gemessen:

$$V = \frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\exp\left\{\frac{2r}{a}\right\} + \sin\left\{\frac{r}{a}\right\}\right)$$

Der Kondensator enthält einen idealen Isolierstoff mit Dielektrizitätskonstante ε. Bestimmen Sie die Volumenladungsträgerdichte zwischen den beiden Elektroden.

Lösung zu Aufgabe 15

Poisson-Gleichung:

$$\Delta V_{\{\vec{r}\}} = -\frac{\varrho_V}{\varepsilon\varepsilon_0}$$

in Kugelkoordinaten (nur r-Komponente)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right) &= -\frac{\varrho_V}{\varepsilon\varepsilon_0}\\
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a}\exp\{\frac{2r}{a}\}+\frac{1}{a}\cos\{\frac{r}{a}\}\right)\right) &= -\frac{\varrho_V}{\varepsilon\varepsilon_0}\\
\frac{Q}{\varepsilon\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(\frac{4r}{a}\exp\{\frac{2r}{a}\}+\frac{4r^2}{a^2}\exp\{\frac{2r}{a}\}+\frac{2r}{a}\cos\{\frac{r}{a}\}-\frac{r^2}{a^2}\sin\{\frac{r}{a}\}\right) &= -\frac{\varrho_V}{\varepsilon\varepsilon_0}\\
-Q\left(\left(\frac{4}{ar}+\frac{4}{a^2}\right)\exp\{\frac{2r}{a}\}+\frac{2}{ar}\cos\{\frac{r}{a}\}-\frac{1}{a^2}\sin\{\frac{r}{a}\}\right) &= \varrho_V
\end{aligned}$$

Aufgabe 16

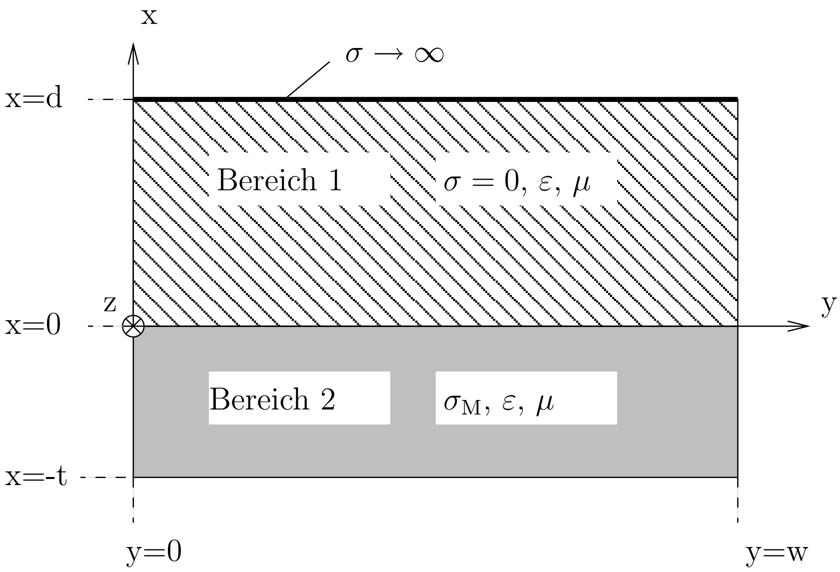

Abbildung 3: Bandleitung mit Dielektrikum.

In der unendlich ausgedehnten Bandleitung mit Querschnitt gemäß Abbildung 3 breiten sich harmonische Wellen aus. Die Materialien der Bandleitung sind homogen und linear. In den verlustbehafteten ($\sigma \neq 0$) Medien gilt das modifizierte Ampèresche Gesetz

$$\nabla\times\vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

das für $\sigma = 0$ in das normale Ampèresche Gesetz übergeht. Die anderen Materialgleichungen ändern sich nicht. Im Bereich 1 ($\sigma = 0$) soll sich eine TEM-Welle mit der magnetischen

Feldstärke

$$\vec{H}_1 = H_1 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - \beta z\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

ausbreiten. Im Bereich 2 ($\sigma \neq 0$) ist der Ansatz

$$\vec{H}_2 = H_2 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - \vec{k}_2 \circ \vec{r})\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

mit komplexwertigem $\vec{k}_2$ zu wählen. Welche Größe hat β? Wie lautet die Wellengleichung für $\vec{H}_2$? Welche Vereinfachung ergibt sich, wenn $\sigma_\mathrm{M} \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0$ gilt? Welche Größe hat $\vec{k}_2$ dann?

Lösung zu Aufgabe 16

Unter Vernachlässigung der Verluste in Bereich 2 gilt im nicht leitfähigen Bereich 1 $\beta = \frac{\omega}{c_1} = \frac{\omega}{c_0}\sqrt{\varepsilon\mu} = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$. Der in der Aufgabenstellung gegebene Zusammenhang für die Rotation der magnetische Feldstärke

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} \quad = \quad \sigma\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$$

wandelt sich durch Rotation und Einsetzen von $\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{H}$, sowie $\nabla\left(\nabla \circ \vec{H}\right) = 0$

$$\begin{aligned}
\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) &= \sigma\,\mathrm{rot}\,\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} \\
\nabla\left(\nabla \circ \vec{H}\right) - \Delta\vec{H} &= -\mu\mu_0\left(\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}\right) \\
-\Delta\vec{H} &= -\mu\mu_0\left(\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} + \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H}\right)
\end{aligned}$$

in die Wellengleichung für $\vec{H}$ um. Der zeitharmonische Ansatz $H = H_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\right)\right\}$ formt die Darstellung zu

$$-\Delta\vec{H} \quad = \quad -\mathrm{i}\omega\mu\mu_0\left(\sigma + \mathrm{i}\omega\varepsilon\varepsilon_0\right)\vec{H} = \left(\vec{k} \circ \vec{k}\right)\vec{H} \qquad .$$

Im Bereich 2 lautet die Wellengleichung damit $\Delta\vec{H}_2 = \mathrm{i}\omega\mu\mu_0\left(\sigma_\mathrm{M} + \mathrm{i}\omega\varepsilon\varepsilon_0\right)\vec{H}_2$, welche mit der Vereinfachung $\sigma_\mathrm{M} \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0$ zu $\Delta\vec{H}_2 \approx \mathrm{i}\omega\mu\mu_0\sigma_\mathrm{M}\vec{H}_2$. Der Wellenvektor im Bereich 2 folgt aus der Dispersionsrelation $\|\vec{k}_2\|^2 = k_\mathrm{x}^2 + \beta^2 \approx -\mathrm{i}\omega\mu\mu_0\sigma_\mathrm{M}$ sowie $k_\mathrm{x} = \|\vec{k}_2\|^2 - \beta^2 \approx \|\vec{k}_2\|^2$. Der tangentiale Wellenvektor ist an der Grenzfläche stetig, deshalb ist $\beta_2 = \beta$ und somit $\vec{k}_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0\sigma_\mathrm{M}}{2}}(1 - \mathrm{i})\vec{e}_\mathrm{x} + \beta\vec{e}_\mathrm{z}$.

Aufgabe 17

Ein Stab der Länge l mit ortsfester Linienladung ϱ_L rotiert mit einer Winkelgeschwindigkeit ω um seinen Schwerpunkt (im Ursprung des Koordinatensystems) in positiver $\vec{e}_\phi$-Richtung, so dass die Rotationsebene die xy-Ebene ist. Wie gross ist die resultierende magnetische Induktion $\vec{B}$ auf der z-Achse?

Mögliche Integrale:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^3}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= \frac{x^2+2a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} \\
\int \frac{x^2}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} + \ln\left\{x+\sqrt{a^2+x^2}\right\} \\
\int \frac{x}{(a^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 17

Die magnetische Induktion kann in diesem Fall mit dem Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\,\mathrm{d}^3r'$$

bestimmt werden. Der Stab ruft die Stromdichte

$$\vec{j} = \varrho_\mathrm{V}\rho\omega\vec{e}_\phi$$

hervor, die im Bereich $0 \leq \rho \leq \frac{l}{2}$ fließt. Die Ladungsdichte lautet

$$\begin{aligned}
\varrho_\mathrm{V} &= \varrho_\mathrm{L}\delta\{z\}\Big(\delta\Big\{\rho\big(\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\big)\Big\}+\delta\Big\{\rho\big(\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}-\pi\big)\Big\}\Big) \\
&= \varrho_\mathrm{L}\frac{1}{\rho}\delta\{z\}\Big(\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\big\}+\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}-\pi\big\}\Big)
\end{aligned}$$

mit der Modulo-Funktion $\mathrm{Mod}\{x,B\}$, die kontinuierliche Werte x auf das Band $(0,B)$ abbildet. Damit resultiert auf der z-Achse ($\rho=0$) nach Auswertung des Integrals in z'

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\ell/2}\int_0^{2\pi} \varrho_{\mathrm{L}}\omega\Big(\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\big\}+\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}-\pi\big\}\Big)\cdot \\
&\qquad \frac{\vec{e}_{\phi'}\times(-\rho'\vec{e}_{\rho'}+z\vec{e}_z)}{\sqrt{\rho'^2+z^2}^3}\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi' \\
&= \varrho_{\mathrm{L}}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\ell/2}\int_0^{2\pi}\Big(\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\big\}+\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}-\pi\big\}\Big) \\
&\qquad \frac{\rho'\vec{e}_z+z\vec{e}_{\rho'}}{\sqrt{\rho'^2+z^2}^3}\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi' \\
&= \varrho_{\mathrm{L}}\omega\frac{\mu_0}{4\pi}\int_0^{\ell/2}\int_0^{2\pi}\Big(\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\big\}+\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}-\pi\big\}\Big)\frac{\rho'^2}{\sqrt{\rho'^2+z^2}^3}\vec{e}_z + \\
&\qquad \Big(\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\big\}+\delta\big\{\phi-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}-\pi\big\}\Big)\frac{\rho' z}{\sqrt{\rho'^2+z^2}^3}\vec{e}_{\rho'}\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi' \quad .
\end{aligned}
$$

Mit $\vec{e}_{\rho'} = \cos\{\phi'\}\vec{e}_x + \sin\{\phi'\}\vec{e}_y$ ergibt die Integration von $\vec{e}_{\rho'}\delta\{\phi' - \mathrm{Mod}\{\omega t, 2\pi\}\}\,\mathrm{d}\phi' = \cos\{\phi'\}\vec{e}_x+\sin\{\phi'\}\vec{e}_y$ und $\vec{e}_{\rho'}\delta\{\phi'-\mathrm{Mod}\{\omega t,2\pi\}\pi\}\,\mathrm{d}\phi' = -\cos\{\phi'\}\vec{e}_x-\sin\{\phi'\}\vec{e}_y$, so dass der radiale Anteil nach der Integration verschwindet und nur noch der Anteil in z-Richtung übrig bleibt. Hier ergibt die Integration über $\mathrm{d}\phi'$ den Faktor 2. Mit $a = z$ im zweiten angegebenen Integral resultiert

$$
\begin{aligned}
\vec{B} &= \varrho_{\mathrm{L}}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\left[-\frac{\rho'}{\sqrt{z^2+\rho'^2}}+\ln\left\{\rho'+\sqrt{z^2+\rho'^2}\right\}\right]_0^{\ell/2}\vec{e}_z \\
&= \varrho_{\mathrm{L}}\omega\frac{\mu_0}{2\pi}\left(-\frac{\ell/2}{\sqrt{z^2+(\ell/2)^2}}+\ln\left\{\frac{\ell/2+\sqrt{z^2+(\ell/2)^2}}{z}\right\}\right)\vec{e}_z \quad .
\end{aligned}
$$