Aufgabe 1

In einem verlustlosen Medium der Brechzahl n breitet sich eine ebene Welle gemäß $\exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\right)\right\}$ aus. Für den Wellenvektor soll $\vec{k} = a\vec{e}_\mathrm{x} + 2\pi b\vec{e}_\mathrm{y}$ gelten. Berechnen Sie a als Funktion von b und n.

Lösung zu Aufgabe 1

Für die ebene harmonische Welle gilt die Dispersionsrelation

$$\vec{k} \circ \vec{k} = \left(\frac{\omega n}{c}\right)^2 = a^2 + (2\pi b)^2 \ .$$

Damit folgt für

$$a = \sqrt{\left(\frac{\omega n}{c}\right)^2 - (2\pi b)^2} \ .$$

Aufgabe 2

Welche Energiedichte ist im elektrischen Feld der Welle $\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}\vec{e}_z$ mit $\vec{k} = a\vec{e}_x - ib\vec{e}_y$ gespeichert, wenn sie in einem unmagnetischen Medium der Brechzahl n läuft?

Lösung zu Aufgabe 2

Zu dem magnetischen Feld

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}\vec{e}_z$$

gehört das elektrische Feld

$$\begin{aligned}\vec{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{H}\times\vec{k} &= H_0\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}(a\vec{e}_x - ib\vec{e}_y)\times\vec{e}_z \\ &= -H_0\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}(a\vec{e}_y + ib\vec{e}_x) \quad .\end{aligned}$$

Die elektrische Energiedichte ist definitionsgemäß

$$w_\mathrm{el} = \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D}$$

und damit

$$w_{\mathrm{el}} = H_0^2 \frac{1}{2\omega^2 \varepsilon\varepsilon_0} \exp\{2i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}(a^2 - b^2) \quad .$$

Berücksichtigt man noch $|\vec{k}|^2 = a^2 - b^2 = \omega^2 \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0$ aus der Dispersionsrelation, ergibt sich

$$w_{\mathrm{el}} = \frac{1}{2}\mu\mu_0 H_0^2 \exp\{2i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\} \quad .$$

Die Energiedichte des elektrischen und des magnetischen Feldes sind also gleich groß.

Aufgabe 3

Im Bereich $|x| < a$ und $0 < y < b$ befindet sich ein Rechteckhohlleiter mit ideal leitenden Wänden unendlicher Ausdehnung in z-Richtung. In diesem Hohlleiter wird folgende Feldverteilung gemessen:

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= H_x \cdot \vec{e}_x + H_y \cdot \vec{e}_y \\
H_x &= A_0 \cdot L \cdot \sin\{K \cdot x\} \cdot \cos\{L \cdot y\} \cdot \exp\{i(\omega t - \beta z)\} \\
H_y &= -A_0 \cdot K \cdot \cos\{K \cdot x\} \cdot \sin\{L \cdot y\} \cdot \exp\{i(\omega t - \beta z)\}
\end{aligned}$$

Bestimmen Sie die Mindestgrößen von K und L.

Lösung zu Aufgabe 3

Zunächst muss die Wellengleichung erfüllt sein. Einsetzen von $\vec{H}$ ergibt die Bedingung

$$\beta^2 - K^2 - L^2 - \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 0 \quad .$$

Damit lässt sich keine Bedingung für die Größen von K und L finden. Auf den Wellenleiterwänden muss gelten:

$$\vec{E}_{\tan}\Big|_{\mathrm{Rand}} = 0$$

Aus $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ ergibt sich das elektrische Feld zu zu

$$\begin{aligned}
E_x &= \frac{\beta}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} H_y \\
E_y &= -\frac{\beta}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} H_x \\
E_z &= \frac{K^2 + L^2}{i\omega\varepsilon\varepsilon_0} A_0 \sin\{K \cdot x\} \sin\{L \cdot y\} \exp\{i(\omega t - \beta z)\}
\end{aligned}$$

Aus den Randbedingungen folgt, dass das tangentiale elektrische Feld an den Wänden, also bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ verschwinden muss. Das lässt sich nur erreichen, wenn

$$\begin{aligned} K &= 0; \frac{\pi}{a}; 2 \cdot \frac{\pi}{a}; \ldots \\ L &= 0; \frac{\pi}{a}; 2 \cdot \frac{\pi}{a}; \ldots \end{aligned}$$

erfüllt sind. K und L dürfen aber nicht gleichzeitig null werden, also gilt

$$\begin{aligned} K &= m\tfrac{\pi}{a} & m \in \mathbb{N}_0 \\ L &= n\tfrac{\pi}{b} & n \in \mathbb{N}_0 \\ m \cdot n &> 0 \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Ein unendlich ausgedehnter Plattenkondensator besitzt ein inhomogenes Dielektrikum mit $\varepsilon = \exp\left\{\frac{x}{a}\right\}$. Auf den Platten sind die Potentiale $V\{x = 0\} = 0$ und $V\{x = d\} = V_0$ eingeprägt. Es gilt für die Raumladung $\varrho_{\mathrm{v}} = 0$. Wie lautet die Laplace- bzw. Poissongleichung in der Anordnung? Berechnen Sie den Potenzialverlauf im Kondensator.

Lösung zu Aufgabe 4

Innerhalb des Plattenkondensator gilt die Poissongleichung

$$\Delta V\{\vec{r}\} = -\frac{\varrho\{\vec{r}\}}{\varepsilon\varepsilon_0} \ .$$

die in die verknüpfte Laplacegleichung übergeht, sobald keine Raumladung ($\varrho\{\vec{r}\} = 0$) vorausgesetzt wird. Der Plattenkondensator besitzt eine zweidimensionale Symmetrie. Damit folgt für vektorielle Grössen $\vec{E} = E\vec{e_{\mathrm{x}}}$ und die Operatoren $\nabla \circ \vec{E} = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}x}$.
Eine der Maxwellgleichungen fordert Quellenfreiheit des magnetischen Feldes

$$\nabla \circ \vec{D} = \nabla \circ \left(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\right) = 0 = (\varepsilon_0\nabla\varepsilon) \circ \vec{E} + \varepsilon_0\varepsilon\left(\nabla \circ \vec{E}\right) = 0 \ .$$

Mit gegebenen Verteilung der Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = \exp\left\{\frac{x}{a}\right\}$ vereinfacht sich dies zur Differentialgleichung für $\vec{E} = E\vec{e_{\mathrm{x}}}$

$$\frac{E}{a} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}E = 0$$

Eine Lösung dieser Gleichung folgt aus dem charakteristischen Polynom $1/a + \lambda = 0$ mit $E = E_0 \exp\left\{-\frac{x}{a}\right\}$ Das elektrische Feld und Potential stehen im Zusammenhang $-\nabla V = \vec{E}$ also $V = E_0 a \exp\left\{-\frac{x}{a}\right\} + V_0$ Die Randwerte sind in der Aufgabenstellung angegeben

$$V\{x = 0\} = 0$$

also

$$E_0 a + V_0 = 0; \; \rightarrow V_0 = -E_0 a; \; .$$

An der zweiten Berandung gilt

$$V\left\{x = d\right\} = V_0$$

also

$$E_0 a \left(\exp\left\{-\frac{d}{a}\right\} - 1\right) = V_0; \; .$$

und damit ist

$$V = V_0 \frac{\exp\left\{-\frac{x}{a}\right\} - 1}{\exp\left\{-\frac{d}{a}\right\} - 1} \; .$$

Aufgabe 5

Wie lautet die magnetische Feldstärke zu dem elektrischen Feld $\vec{E} = h\{\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\}(E_\mathsf{x}, E_\mathsf{y}, E_\mathsf{z})^T$ mit $\vec{k} = (k_\mathsf{x}, k_\mathsf{y}, k_\mathsf{z})^T$ unter der Voraussetzung, dass h eine stetig differenzierbare Funktion ist?

Lösung zu Aufgabe 5

Aus dem elektrischen Feld

$$\vec{E} = h\{\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\}(E_\mathsf{x}, E_\mathsf{y}, E_\mathsf{z})^T$$

mit $\vec{k} = (k_\mathsf{x}, k_\mathsf{y}, k_\mathsf{z})^T$ und $\vec{E}_0 = (E_\mathsf{x}, E_\mathsf{y}, E_\mathsf{z})^T$ ergibt sich das magnetische Feld, wenn die Maxwellgleichung

$$\nabla \times \vec{E} = -\dot{\vec{B}}$$

verwendet wird. Daraus lässt sich formal recht einfach

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu \mu_0} \int \nabla \times \vec{E} \, \mathrm{d}t$$

herleiten.
Mit der Substitution $\xi = \omega t - \vec{k} \circ \vec{r}$ ergibt sich zunächst für die Rotation

$$
\begin{aligned}
\nabla\times\vec{E} &= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}h\right)\nabla\times(\xi E_0) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}h\right)\vec{k}\times E_0 \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}h\right)(k_\mathsf{x},k_\mathsf{y},k_\mathsf{z})^T\times(E_\mathsf{x},E_\mathsf{y},E_\mathsf{z})^T) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial\xi}h\right)((k_\mathsf{y}E_\mathsf{z}-k_\mathsf{z}E_\mathsf{y})\vec{e}_x+(k_\mathsf{z}E_\mathsf{x}-k_\mathsf{x}E_\mathsf{z})\vec{e}_y+(k_\mathsf{x}E_\mathsf{y}-k_\mathsf{y}E_\mathsf{x})\vec{e}_z) \quad .
\end{aligned}
$$

Nun muss das Zeitintegral ausgeführt werden. Auf Grund der Tatsache, dass $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}h = \omega\left(\frac{\partial}{\partial\xi}h\right)$ ist, ergibt sich

$$
\int\left(\frac{\partial}{\partial\xi}h\right)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\omega}h\{\xi\} = \frac{1}{\omega}h\{\omega t-\vec{k}\circ\vec{r}\}
$$

und damit resultiert für die magnetische Feldstärke

$$
\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{\omega\mu\mu_0}h\{\omega t-\vec{k}\circ\vec{r}\}\vec{k}\times\vec{E}_0 \\
&= \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\vec{k}\times\vec{E}
\end{aligned}
$$

wie im Skript für ebene Wellen mit harmonischer Zeitabhängigkeit dargestellt wurde.

Aufgabe 6

In einem Hohlleiter (y-Ausdehung: b, z-Ausdehnung: c) wird folgende Feldverteilung gemessen:

$$\vec{E} = E_0 \sin\left\{n \cdot \pi \frac{y}{b}\right\} \cdot \sin\left\{p \cdot \pi \frac{z}{c}\right\} \cdot \exp\{i(\omega t - \beta x)\} \cdot (\vec{e}_z - \vec{e}_y)$$

Bei $x = \frac{b}{2}$ und $z = \frac{2c}{3}$ wird ein gerader infinitesimal dünner, ideal leitfähiger Draht in y-Richtung orientiert eingefügt. Welche Konsequenz hat dies für n und p? Bestimmen Sie die minimale Kreisfrequenz ω des Feldes.

Lösung zu Aufgabe 6

Wenn der Hohlleiter mit einer Kante auf der x-Achse liegt, ergibt sich zunächst für n und p

$$\begin{aligned} n &= 1,\ 2, ... \in \mathbb{N} \\ p &= 1,\ 2, ... \in \mathbb{N} \quad . \end{aligned}$$

Bei $x = \frac{b}{2}$, $z = \frac{2c}{3}$ muss $\vec{E}|_{tan} = E_{\mathrm{y}}\vec{e}_y = 0$ gelten. Nach einsetzten ergibt sich:

$$\vec{E} = E_0 \cdot \sin\{n \cdot \pi \cdot \frac{y}{b}\} \cdot \sin\{p \cdot \pi \cdot \frac{2c}{3c}\} \cdot \exp\{i(\omega t - \beta \cdot \frac{b}{2})\} \cdot (\vec{e}_z - \vec{e}_y)$$

Somit ergibt sich für p eine Änderung:

$$p = \frac{3}{2},\ \frac{6}{2}, ...$$

und gleichzeitig muss $p \in \mathbb{N}$ erfüllt sein. Also

$$\frac{p}{3} \in \mathbb{N} \quad .$$

Die Grenze der Kreisfrequenz des Feldes ergibt sich aus der Dispersionsrealtion für verschwindendes β:

$$\omega_{\mathrm{gr}} = c\pi \sqrt{\left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{p}{c}\right)^2}$$

und die kleinste Kreisfrequenz ergibt sich für die beiden kleinsten Werte $n = 1$ und $p = 3$.

Aufgabe 7

Gegeben ist im Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$, $-\infty \leq z \leq \infty$ das Vektorfeld

$$\vec{H} = (H_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + H_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} + H_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}) \cos\{\omega t - k_{\mathrm{z}} z\}$$

mit

$$H_{\mathrm{x}} = H_0 \sin\{k_{\mathrm{x}} x\} \cos\{k_{\mathrm{y}} y\}, H_{\mathrm{z}} = 0.$$

Finden Sie ein H_{y} für das $\vec{H}$ die Maxwellgleichungen (inklusive der Wellengleichung) erfüllt und überprüfen Sie Ihr Ergebnis.

Lösung zu Aufgabe 7

Das magnetische Feld muss quellenfrei sein

$$\begin{aligned}
\nabla \circ \vec{B} = \nabla \circ \left(\mu\mu_0 \vec{H}\right) &= 0 \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}\left(\vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}}\right)}{\mathrm{d}x} + \frac{\mathrm{d}\left(\vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}}\right)}{\mathrm{d}y} &= 0 \\
\Rightarrow \vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} = \int \frac{\mathrm{d}\left(\vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}}\right)}{\mathrm{d}x} \mathrm{d}y \\
= -\frac{H_0 k_{\mathrm{x}}}{k_{\mathrm{y}}} \cos\{k_{\mathrm{x}x}\} \cdot \sin\{k_{\mathrm{y}} y\}
\end{aligned}$$

Damit ist eine mögliche Lösung von H_{y} festgelegt. Diese muss zusätzlich die Wellengleichung

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0$$

erfüllen. Eingesetzt mit

$$\Delta\vec{H} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H_{\mathrm{x}}}{\partial x^2} + & \frac{\partial^2 H_{\mathrm{x}}}{\partial y^2} + & \frac{\partial^2 H_{\mathrm{x}}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 H_{\mathrm{y}}}{\partial x^2} + & \frac{\partial^2 H_{\mathrm{y}}}{\partial y^2} + & \frac{\partial^2 H_{\mathrm{y}}}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 H_{\mathrm{z}}}{\partial x^2} + & \frac{\partial^2 H_{\mathrm{z}}}{\partial y^2} + & \frac{\partial^2 H_{\mathrm{z}}}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

ergibt sich komponentenweise

$$\begin{aligned}
\left(\Delta\vec{H}\right) \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}} = (-k_{\mathrm{x}} - k_{\mathrm{y}} - k_{\mathrm{z}}) \cdot \vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}} &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{x}}} \\
\left(\Delta\vec{H}\right) \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} = (-k_{\mathrm{x}} - k_{\mathrm{y}} - k_{\mathrm{z}}) \cdot \vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \vec{H} \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{y}}} \\
\left(\Delta\vec{H}\right) \circ \vec{\mathrm{e}_{\mathrm{z}}} = 0 &= \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \cdot \vec{H} \circ \mathrm{e}_{\mathrm{z}}
\end{aligned}$$

Es geschieht häufig der Fehler, dass der Laplace-Operator falsch, also zum Beispiel als Skalar oder nur auf eine Vektorkomponente angewendet wird.

Aufgabe 8

Eine ebene Welle fällt aus dem Medium 1 mit Brechzahl n_1 auf eine Schicht der Brechzahl $n_2 > n_1$ und Schichtdicke d, die Ihrerseits durch Luft begrenzt ist. In der Luft soll sich keine Welle von der Grenzfläche wegbewegen. In welchem Bereich muss dazu der Einfallswinkel liegen?

Lösung zu Aufgabe 8

Zur Lösung des Problems wird das Snellius-Brechungsgesetz in der vektoriellen Darstellung herangezogen:

$$\vec{n}\times(\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}}) = 0$$

Die zur Grenzfläche tangentiale Komponente der einfallenden Welle ist
$\vec{n}\times(\vec{k}_{\mathrm{in}} = n_1 k_0 \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}$, wenn wie üblich der Winkel gegen die Normale auf die Grenzfläche gemessen wird. In der Luft soll sich keine Welle von der Grenzfläche weg bewegen. Das bedeutet, dass der Realteil der Normalkomponente von $\vec{k}$ in der Luft verschwindet. Die Normalkomponente ergibt sich aus der Dispersionsrelation zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{Luft}} = \sqrt{|\vec{k}_{\mathrm{Luft}}|^2 - |\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{Luft}}|^2}$$

Da das Snelliusgesetz verlangt, dass die Tangentialkomponente von $\vec{k}$ an allen parallelen Grenzflächen gleich ist, kann $\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{Luft}}$ durch $\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{in}}$ ersetzt werden. Die Forderung, dass der Realteil von $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{Luft}}$ verschwindet, bedeutet, dass

$$|\vec{n}\times\vec{k}_{\mathrm{Luft}}| \quad > \quad |\vec{k}_{\mathrm{Luft}}|$$

gelten muss. Es resultiert also mit $|\vec{k}_{\mathrm{Luft}}| = k_0$

$$n_1 k_0 \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\} \quad > \quad k_0$$

oder

$$\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\} \quad > \quad \frac{1}{n_1} \quad .$$

Aufgabe 9

Ein doppelt geschirmtes Koaxialkabel idealer Leitfähigkeit ist wie folgt aufgebaut:

Innenleiter	$0 < r < a$	
erste Abschirmung	$b < r < c$	$(b > a)$
zweite Abschirmung	$d < r < e$	$(d > c)$

In der ersten Abschirmung fließt der Strom I in positiver z-Richtung, auf der zweiten Abschirmung wird der dreifache Strom in negativer z-Richtung eingeprägt, zwischen dem Innenleiter und der ersten Abschirmung wird die Spannung U gemessen und zwischen den beiden Abschirmungen $2U$. Bestimmen sie den Poyntingvektor zwischen den Leitern ($c < r < d$ und $a < r < b$) und den Strom auf dem Innenleiter, wenn der Bereich $r > e$ feldfrei ist.

Lösung zu Aufgabe 9

Der Strom auf dem Innenleiter beträgt $2I$. Die Felder ergeben sich wie folgt (siehe auch Übungen):

$$a < \varrho < b$$

$$\vec{H}_I = \tfrac{2 \cdot I}{2\pi\varrho} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \vec{E}_I = \pm \frac{U}{\ln\{\frac{b}{a}\}} \frac{1}{\varrho} \vec{e}_\varrho$$

$$c < \varrho < d$$

$$\vec{H}_{II} = \tfrac{3 \cdot I}{2\pi\varrho} \cdot \vec{e}_\varphi \quad \vec{E}_{II} = \pm \frac{2 \cdot U}{\ln\{\frac{d}{c}\}} \frac{1}{\varrho} \vec{e}_\varrho$$

aus

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$$

ergeben sich die beiden Pointingvektoren zu:

$$\begin{aligned} \vec{S}_I &= \pm \frac{I \cdot U}{\pi\varrho^2 \ln\{\frac{b}{a}\}} \cdot \vec{e}_z \\ \vec{S}_{II} &= \pm \frac{3 \cdot I \cdot U}{\pi\varrho^2 \ln\{\frac{d}{c}\}} \cdot \vec{e}_z \end{aligned}$$

Aufgabe 10

Ein angeschliffener Saphirkristall mit den Materialkonstanten $n = 1.768$ und $\mu = 1$ wird von eine Welle mit

$$\vec{E} = (\exp\{i(\omega t - kz)\})\,(E_x\vec{e}_x + E_y\vec{e}_y)\,.$$

bestrahlt. Der Kristall ist so angeschliffen, dass das am Kristall reflektierte Licht linear polarisiert ist und und diese Polarisation mit einer Achse des Koordinatensystems übereinstimmt. Entlang welcher Achse ist dieses Licht polarisiert? Welcher Einfallswinkel α ist zu wählen? Welches μ müsste der Kristall haben, damit auch unter demselben Einfallswinkel α keine der beiden einfallenden Polarisationen reflektiert wird? Nehmen sie hierbei an, dass ε bei Änderung von μ konstant bleibt.

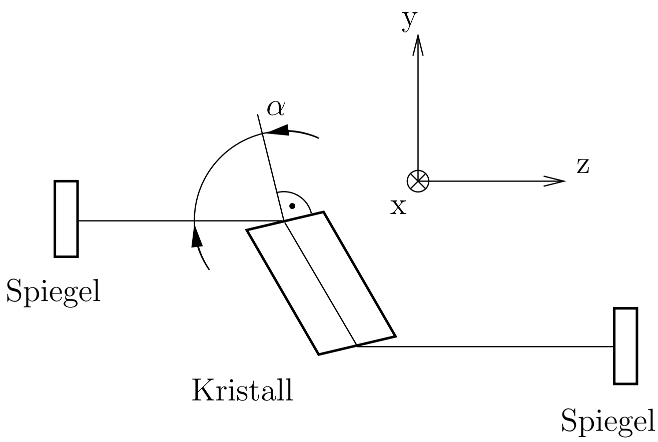

Abbildung 1: Saphirkristall und einfallendes Licht.

Lösung zu Aufgabe 10

Die Oberfläche des Kristalls hat die Normale $\vec{n} = n_{\mathrm{y}} \cdot \vec{\mathrm{e_y}} + n_{\mathrm{z}} \cdot \vec{\mathrm{e_z}}$ Der TE polarisierte Anteil $\vec{E} \circ \vec{n} = 0$ ergibt sich aus der x-Kompontente von E, also $\vec{E_{\mathrm{TE}}} = E_{\mathrm{x}} \cdot \vec{\mathrm{e_x}} = 1,056(\mathrm{arc}) = 60,507°$. Nimmt der Einfallswinkel $\theta = \arctan\left\{\frac{n_{\mathrm{Kristall}}}{n_{\mathrm{Luft}}}\right\}$ verschwindet der TM polarisierte Anteil aus der Reflektierten Welle und das reflektierte Licht ist nur TE polarisiert.
Wenn $r_\mu = \frac{\mu_{\mathrm{in}}-\mu_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{in}}+\mu_{\mathrm{tr}}} = r_{\mathrm{k}} = \frac{\vec{n}\circ(k_{\mathrm{in}}-k_{\mathrm{tr}})}{\vec{n}\circ(k_{\mathrm{in}}+k_{\mathrm{tr}})}$, dann wird der Reflektionsfaktor r_{TE} zu Null und am Kristall wird die Einfallende Welle komplett transmittiert. In diesem Fall gilt $\mu = \varepsilon = n = 1,768$.

Aufgabe 11

Die ebene Welle $\vec{E} = E_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\}\vec{e}_x$ mit $\vec{k} = k_2\vec{e}_y + k_3\vec{e}_z$ fällt auf die Grenzfläche $z = h$ zwischen zwei unmagnetischen Medien. Die Amplitude der transmittierten magnetischen Feldstärke ist genauso groß wie die des reflektierten Feldes. Welche relative Dielektrizitätskonstante hat das Medium, an dem die Welle reflektiert wird? Die einfallende Welle läuft in einem Medium mit der Brechzahl n.

Lösung zu Aufgabe 11

Die Amplituden der magnetischen Feldstärke der einfallenden und der reflektierten Wellen sollen gleich groß sein. Bei den Feldstärkamplituden ist immer $|\vec{E}|$ oder $|\vec{H}|$ gemeint, es werden also **keine Richtungen berücksichtigt**. Die Amplituden der magnetischen und der elektrischen Feldstärke hängen über der Wellenwiderstand miteinander zusammen: $E = ZH = \frac{Z_0}{n}H$. Zur Festlegung der Nomenklatur wird hier angenommen, dass die Welle aus Medium 1 auf das Medium 2 trifft.
Hier handelt es sich um eine TE-Welle. Als Basis muss die elektrische Feldstärke betrachtet werden. Die magnetische Feldstärke wird daraus abgeleitet

$$\begin{aligned}
E_{\text{ref}} &= |r_{\text{E,TE}}|E_{\text{in}} = |r_{\text{TE}}|E_{\text{in}} \quad , \\
E_{\text{tr}} &= |t_{\text{E,TE}}|E_{\text{in}} = |(1 + r_{\text{TE}})|E_{\text{in}}
\end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned}
H_{\text{ref}}Z_{\text{ref}} &= |r_{\text{TE}}|H_{\text{in}}Z_{\text{in}} \hookrightarrow H_{\text{ref}} = |r_{\text{TE}}|H_{\text{in}} \\
H_{\text{tr}}Z_{\text{tr}} &= |(1 + r_{\text{TE}})|H_{\text{in}}Z_{\text{in}} \quad .
\end{aligned}$$

Da die magnetischen Feldstärken der reflektierten und der transmittierte Welle die gleiche Amplitude haben sollen, muss gelten (es werden Quadrate verwendet, um die Betragsbildung direkt zu erreichen)

$$r_{\text{TE}}^2 = \frac{n_2^2}{n_1^2}(1 + r_{\text{TE}})^2 \quad .$$

Zu berücksichtigen ist der Reflexionsfaktor

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}})}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}})}$$

und der Transmissionsfaktor

$$t_{\mathrm{TE}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{2\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}})} \quad .$$

Damit lässt sich folgendes errechnen:

$$(\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}}))^2 = 4\frac{n_2^2}{n_1^2}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})^2$$

Es gilt $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}} = k_z$ und wegen des Snelliusgesetzes und der Dispersionsrelation $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{k_0^2 n_2^2 - k_x^2}$. also im unmagnetischen Medium mit $n^2 = \varepsilon$

$$\left(k_z - \sqrt{k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2}\right)^2 = 4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k_z^2 \quad .$$

Dies führt nach kurzer Umrechnung auf eine quadratische Gleichung mit der gesuchten Größe ε_2:

$$\begin{aligned}
k_z^2 + 2k_z\sqrt{k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2} + \varepsilon_2 k_0^2 - k_x^2 &= 4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k_z^2 \\
2k_z\sqrt{k_0^2\varepsilon_2 - k_x^2} &= 4\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}k_z^2 - \varepsilon_2 k_0^2 + k_x^2 - k_z^2 \\
&= \varepsilon_2\left(\frac{4k_z^2}{\varepsilon_1} - k_0^2\right) + k_x^2 - k_z^2
\end{aligned}$$

$$\varepsilon_2^2\left(\frac{4k_z^2}{\varepsilon_1} - k_0^2\right)^2 + 2\varepsilon_2\left[\left(k_x^2 - k_z^2\right)\left(\frac{4k_z^2}{\varepsilon_1} - k_0^2\right) - 2k_z^2k_0^2\right] + 4k_x^2k_z^2 + \left(k_x^2 - k_z^2\right)^2 \;=\; 0 \quad .$$

Das Problem kann als gelöst angesehen werden, wenn folgende Substitution verwendet wird:

$$\begin{aligned}
A &= \left(\frac{4k_z^2}{\varepsilon_1} - k_0^2\right)^2 \\
B &= 2k_z^2k_0^2 - \left(k_x^2 - k_z^2\right)\left(\frac{4k_z^2}{\varepsilon_1} - k_0^2\right) \\
C &= 4k_x^2k_z^2 + \left(k_x^2 - k_z^2\right)^2
\end{aligned}$$

(hier sind alle Größen bekannt), da dann einfach resultiert

$$\varepsilon_2 = \frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{C}{A} - \frac{B^2}{A^2}} \quad .$$

Zu beachten ist, dass natürlich $\varepsilon_2 > 0$ resultieren muss!

Aufgabe 12

Durch ein $\vec{B}$-Feld wird ein geladenes Teilchen der Masse m und Ladung q auf einer Kreisbahn von Radius R gehalten. Das Teilchen bewegt sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega} = \omega \cdot \vec{e}_\mathrm{z}$. Wie gross ist $\vec{B}$?

Lösung zu Aufgabe 12

Die Bewegungsgleichungen ergeben:

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= R \cdot \vec{e}_\varrho \\
\vec{v} &= \omega \cdot R \cdot \vec{e}_\varphi \\
\vec{a} &= -\omega^2 \cdot R \cdot \vec{e}_\varrho
\end{aligned}$$

Das Kräftegleichgewicht mit der Lorenzkraft ergibt:

$$\begin{aligned}
m \cdot \vec{a} &= q \left(\vec{v} \times \vec{B} \right) \\
-m\omega^2 R \vec{e}_\varrho &= q \left(\omega R \vec{e}_\varphi \times \vec{B} \right)
\end{aligned}$$

Damit das Kreuzprodukt erfüllt ist, muss $\vec{B} = B \cdot \vec{e}_z$ sein. Somit ergibt sich:

$$B = -\frac{m\omega}{q}$$

Aufgabe 13

Ein unendlich ausgedehnter flächiger Halbleiter/Halbleiter-Übergang besteht aus zwei leitfähigen Materialien. Das Material im Bereich $0 \leq x \leq i$ hat die spezifische Leitfähigkeit σ_1 und die relative Dielektrizitätskonstante ε_1, im Bereich $i \leq x \leq d$ gilt σ_2 sowie ε_2. Das Potenzial ist in den Punkten $V\,\{x = 0\} = 0$ und $V\,\{x = d\} = V_0$ vorgegeben. In diesen Punkten existiert keine

Flächenladung. Die Bereiche mit $0 \leq x < i$ und $i < x \leq d$ sind raumladungsfrei. Berechnen Sie den Potenzialverlauf im Bereich $0 \leq x \leq d$. Bestimmen Sie die Flächenladungsdichte ϱ_S in der Ebene $x = i$.

Lösung zu Aufgabe 13

Die Anordnung hat eine zweidimensionale Symmetrie

$$\begin{aligned} V &= V\{x\} \\ \vec{E} &= E \cdot \vec{\mathrm{e}_\mathrm{x}} \\ \vec{j} &= j \cdot \vec{\mathrm{e}_\mathrm{x}} \; . \end{aligned}$$

An den Stellen $x = i$ gilt $\vec{n} \circ \left(\vec{j}_2 - \vec{j}_1\right) = 0$ sowie $\vec{n} \circ \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \varrho_\mathrm{s} = \vec{n} \circ \vec{j}\left(\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1}\right)$ mit $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}\vec{j}$. Die Potentiale wachsen linear in den Schichten

$$\begin{aligned} V_1 &= V_{01} + V_{11}\frac{x}{i} \\ V_2 &= V_{02} + V_{12}\frac{x-i}{d-i} \; . \end{aligned}$$

An den Berandungen ist das Potential eingeprägt

$$\begin{array}{rcll} V_1\{x=0\} &=& 0 & \Rightarrow\; V_{01} = 0 \\ V_2\{x=i\} &=& V_1\{x=i\} & \Rightarrow\; V_{02} = V_{11} \\ V_2\{x=d\} &=& V_0 & \Rightarrow\; V_{02} + V_{12} = V_0 \\ \vec{j}_1 \circ \vec{\mathrm{e}_\mathrm{x}} &=& \vec{j}_2 \circ \vec{\mathrm{e}_\mathrm{x}} & \Rightarrow\; \dfrac{V_{11}}{i}\sigma_1 = \dfrac{V_{12}}{d-1}\sigma_2 \\ & & & \Rightarrow\; V_{11} = V_{12}\dfrac{i}{d-i} \cdot \dfrac{\sigma_2}{\sigma_1} \end{array}$$

damit folgt

$$\begin{aligned} V_{02} + V_{12} = V_{12}\left(1 + \frac{i}{d-i} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right) &= \\ V_{12}\frac{\sigma_1 d + (\sigma_2 - \sigma_1)i}{\sigma_1(d-i)} &= V_0 \\ V_{12} &= V_0\frac{\sigma_1(d-i)}{\sigma_1 d + (\sigma_2 - \sigma_1)i} \end{aligned}$$

Das Potential in den Bereichen 1 und 2 lautet damit

$$\begin{aligned} V_1 &= V_0\frac{\sigma_2 x}{\sigma_1 d + (\sigma_2 - \sigma_1)i} \\ V_2 &= V_0\frac{\sigma_1 x + (\sigma_2 - \sigma_1)i}{\sigma_1 d + (\sigma_2 - \sigma_1)i} \end{aligned}$$

Aufgabe 14

Zwei kreisförmige Leiterschleifen vom Radius R sind koaxial im Abstand d zueinander angeordnet. In einer Schleife fließt der Strom I. Welcher Strom muss in der anderen Schleife fließen, wenn diese mit der Kraft F abgestoßen wird?

Lösung zu Aufgabe 14

Eine der beiden Leiterschleifen sei in der x-y-Ebene angeordnet. Der Strom fließe in φ-Richtung (Zylinderkoordinaten). Dann kann das magnetische Dipolmoment einfach als $\vec{m}_1 = m_1\vec{e}_z$ mit $m_1 = \pi R^2 I$ angegeben werden. Die Kraft auf den zweiten Leiter ergibt sich aus dem Integral

$$\vec{F} = \iiint \vec{j}_2 \times \vec{B}_1 \, \mathrm{d}^3 r_2 \quad .$$

Da es sich hier um einen Stromfaden handelt, kann das Volumenintegral auf das Linienintegral umgeformt werden (Konzept des Stromfadens). Hier wird angenommen, dass auch der zweite Strom in φ-Richtung läuft: $\vec{j}_2 = I_2\delta\{z-d\}\delta\{\rho - R\}\vec{e}_\varphi$. Das Linienelement lautet dann einfach $\mathrm{d}\vec{\ell} = \rho \, \mathrm{d}\varphi\vec{e}_\varphi$. Die magnetische Induktion ist

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\left(\vec{m}\circ\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \vec{m}}{|\vec{r}|^3}$$

Für $\vec{r}$ kann am Ort der zweiten Stromschleife immer $\vec{r}_2 = d\vec{e}_z + R\vec{e}_\rho$ eingesetzt werden. Der Betrag lautet $|\vec{r}|^2 = R^2 + d^2$. Mit $\vec{m}\circ\vec{r} = m_1 d$ resultiert die magnetische Induktion am Ort der zweiten Stromschleife

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3m_1 d \dfrac{d\vec{e}_z + R\vec{e}_\rho}{R^2+d^2} - m_1\vec{e}_z}{\sqrt{R^2+d^2}^3} = m_1\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\left(\dfrac{3d^2}{R^2+d^2} - 1\right)\vec{e}_z + \dfrac{3dR}{R^2+d^2}\vec{e}_\rho}{(R^2+d^2)^{(3/2)}} \\
&= m_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2d^2 - R^2)\vec{e}_z + 3dR\vec{e}_\rho}{(R^2+d^2)^{(5/2)}} \quad .
\end{aligned}$$

Das Kreuzprodukt zur Berechnung der Kraft ergibt

$$\vec{e}_\varphi \times \vec{B} = m_1 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(2d^2 - R^2)\vec{e}_\rho - 3dR\vec{e}_z}{(R^2+d^2)^{(5/2)}} \quad .$$

Unter Berücksichtigung, dass $\oint \vec{e}_\rho \, \mathrm{d}\varphi = 0$ und $\oint \vec{e}_z \, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\vec{e}_z$ ergibt, resultiert für die Kraft

$$\vec{F} \quad = \quad -I_2 m_1 \frac{\mu_0}{2} \frac{3dR}{(R^2+d^2)^{(5/2)}} \vec{e}_z \quad .$$

Die Kraft soll nach Aufgabe $F\vec{e}_z$ sein. Damit ergibt sich für den Strom in der zweiten Leiterschleife

$$I_2 \quad = \quad -F \frac{2}{I_1 \mu_0 \pi} \frac{(R^2+d^2)^{(5/2)}}{3dR^3} \quad .$$