Aufgabe 1

Im freien Raum wird das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \left(\frac{x}{a}\right)^2 \vec{e}_y$$

gemessen. Wie groß ist die elektrische Ladung in einem würfelförmigen Raumbereich der Kantenlänge a

Lösung zu Aufgabe 1

Die Ladung in dem Raumbereich resultiert aus der Raumladungsdichte

$$\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E} = \varrho_{\mathrm{V}}$$

welche in diesem Fall Null ist. Damit ergibt sich $Q_{\mathrm{V}} = 0$

Aufgabe 2

Gegeben ist in einem linearen Dielektrikum die Dielektrizitätszahl ε sowie das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \vec{e}_x \exp\{\mathrm{i}\omega t\} \quad .$$

Wie gross ist die Polarisationsstromdichte $\vec{j}_{\mathrm{pol}}$?

Lösung zu Aufgabe 2

$$\vec{j}_{\mathrm{pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0 \vec{E} \tag{2}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \tag{3}$$

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\, \varepsilon_0 \vec{E} \tag{4}$$

$$\vec{j}_{\mathrm{pol}} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = i\omega(\varepsilon - 1)\varepsilon_0\, E_0\, \exp\{i\omega t\}\vec{e}_{\mathrm{x}} \tag{5}$$

Aufgabe 3

Ein Kugelkondensator besteht aus einer kugelförmigen Elektrode mit Radius a und einer äußeren Elektrode mit Radius b. Zwischen den Elektroden befindet sich bis zu einem Radius c $(a < c < b)$ ein Dielektrikum mit $\varepsilon_1 = 2$ und anschließend $\varepsilon_2 = 4$ mit ladungsfreier Grenzfläche bei c. Die innere Elektrode trägt die Ladung Q. Wie gross ist die Potenzialdifferenz zwischen den Elektroden?

Lösung zu Aufgabe 3

1. Lösungsmöglichkeit: durch Addition der Kapazitäten

$$\frac{1}{C_{ges}} = \frac{1}{C_1} \mid_a^c + \frac{1}{C_2} \mid_c^b$$

mit der Kapazität eines Kugelkondensators von

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \Rightarrow U = \frac{Q_{ges}}{C_{ges}}$$

Die Gesamtkapazitä ergibt sich dann zu

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{ges}} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{c}}{\varepsilon_1} + \frac{\frac{1}{c}-\frac{1}{b}}{\varepsilon_2}\right] \\ &= \frac{1}{16\pi\varepsilon_0}\left[\frac{2}{a} - \frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right] \end{aligned}$$

2. Lösungsmöglichkeit: Gausssches Gesetz

$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon} \cdot \frac{1}{r^2}$$

$$\begin{aligned} U &= \int_b^a \vec{E} \circ d\vec{l} \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left[-\frac{1}{\varepsilon_1 r}\right]_a^c + \left[-\frac{1}{\varepsilon_2 r}\right]_c^b\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\left(\frac{1}{\varepsilon_2} - \frac{1}{\varepsilon_1}\right)\frac{1}{c} + \frac{1}{\varepsilon_1 a} - \frac{1}{\varepsilon_2 b}\right) \\ &= \frac{Q}{16\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Im freien Raum befindet sich im Bereich

$$-\frac{a}{2} \leq x \leq \frac{a}{2} \tag{6}$$

$$0 \leq y \leq b \tag{7}$$

$$-2c \leq z \leq 0 \tag{8}$$

die Raumladungsdichte

$$\varrho_\mathrm{V} = \varrho_0 \cdot x \cdot (y - \frac{b}{2}) \cdot (z + c) \cdot \left(\delta\{x + \frac{a}{2}\}\delta\{y\}\delta\{z + 2c\} + \delta\{x - \frac{a}{2}\}\delta\{y - b\}\delta\{z\}\right)$$

Wie lautet die zugehörige elektrische Feldstärke $\vec{E}$?

Lösung zu Aufgabe 4

Bei der angegebenen Ladungsdichte handelt es sich um zwei Punktladungen an den Orten $(-a/2, 0, -2c)$ und $(a/2, b, 0)$. Ihre Ladung beträgt jeweils $-\varrho_0 \frac{abc}{4}$ und $\varrho_0 \frac{abc}{4}$ und damit resultiert das elektrische Feld wie aus der Vorlesung bekannt zu

$$\vec{E} = \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{abc}{4} \left(\frac{(x - a/2)\vec{e}_x + (y - b)\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{(x - a/2)^2 + (y - b)^2 + z^2}^3} - \frac{(x + a/2)\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z + 2c)\vec{e}_z}{\sqrt{(x + a/2)^2 + y^2 + (z + 2c)^2}^3} \right) \quad .$$

Aufgabe 5

Der Halbraum 1 ($x < 0$) habe die relative Dielektrizitätszahl ε_1 und die Leitfähigkeit σ_1, in Halbraum 2 ($x \geq 0$) gelte ε_2 sowie σ_2. In Halbraum 1 beträgt die statische Stromdichte $\vec{j}_1 = j_\mathrm{x}\vec{e}_x + j_\mathrm{y}\vec{e}_y$. In welchem Verhältnis müssen die Materialkonstanten σ und ε stehen, damit die Grenzfläche ladungsträgerfrei ist? Wie groß ist unter diesen Voraussetzungen die Stromdichte $\vec{j}_2$ im Halbraum 2?

Lösung zu Aufgabe 5

Die Grenzfläche muß den Stetigkeitsbedingungen $\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{x}$:

$$\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_\mathrm{S} \qquad \text{mit} \qquad \vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\, \vec{E} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma}\, \vec{j} \tag{9}$$

genügen. Aus der Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\, \rho_\mathrm{v}\{\vec{r}, t\} + \nabla \circ \vec{j}_\mathrm{v}\{r, t\} = 0 \tag{10}$$

folgt die Bedingung für den elektrischen Strom an der Grenzfläche

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial}{\partial t}\, \rho_\mathrm{S} \qquad \text{mit} \qquad \vec{j} = \sigma \vec{E} \tag{11}$$

Wenn die Grenzfläche ladungsfrei ist und bleiben soll, muß gelten:

$$\rho_\mathrm{S} = 0 \qquad \text{sowie} \qquad \frac{\partial}{\partial t}\, \rho_\mathrm{S} = 0 \tag{12}$$

also

$$\vec{n} \circ \left(\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\sigma_2}\, \vec{j}_1 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\sigma_1}\, \vec{j}_2 \right) = 0 \tag{13}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = 0 \tag{14}$$

daraus folgt

$$\vec{j}_1 \circ \vec{e}_\mathrm{x} = \vec{j}_2 \circ \vec{e}_\mathrm{x} \qquad \Longrightarrow \qquad j_{1\mathrm{x}} = j_{2\mathrm{x}} \tag{15}$$

und

$$\frac{\varepsilon_2}{\sigma_2} = \frac{\varepsilon_1}{\sigma_1} \tag{16}$$

Die Tangentialkomponente $\vec{j}_2 \times \vec{n}$ ist durch die Stetigkeit des elektrischen Feldes an der Grenzfläche gegeben

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\vec{j}_2 \circ \vec{e}_\mathrm{y}}{\sigma_2} = \frac{\vec{j}_1 \circ \vec{e}_\mathrm{y}}{\sigma_1} \qquad \Longrightarrow \qquad \vec{j}_2 \circ \vec{e}_\mathrm{y} = \vec{j}_1 \circ \vec{e}_\mathrm{y} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \tag{18}$$

$$\vec{j}_2 = j_{\mathrm{x}2}\, \vec{e}_\mathrm{x} + j_{\mathrm{y}2}\, \vec{e}_\mathrm{y} = j_\mathrm{x}\, \vec{e}_\mathrm{x} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\, j_\mathrm{y}\, \vec{e}_\mathrm{y} \tag{19}$$

Aufgabe 6

Durch die Reflexion einer zirkular polarisierten Welle an der Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien bei $x = 5$ entsteht eine linear polarisierte Welle. Für Medium 1 $(x < 5)$ gilt $n_1 = 1$, für Medium 2 $(x > 5)$ $n_2 = 2$. Bestimmen sie die Größe des reflektierten Anteils der Welle.

Lösung zu Aufgabe 6

Um nur einen linear polarisierten Anteil der Welle zu erhalten, muss diese unter dem Brewsterwinkel auf die Grenzfläche in ein optisch dichteres Medium treffen. Aus dieser Annahme folgt:

$$r_{\mathrm{TM}} = 0 \Rightarrow r_{\mathrm{k}} = r_{\varepsilon}$$

mit

$$r_{\varepsilon} = \frac{\varepsilon_{in} - \varepsilon_{tr}}{\varepsilon_{in} + \varepsilon_{tr}} = \frac{1-4}{1+4} = -\frac{3}{5} \quad .$$

Wegen der unmagnetischen Medien ist $r_{\mu} = 0$ und damit $r_{\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{k}}$ also

$$r_{\mathrm{TE}} = -\frac{3}{5}$$

Aufgabe 7

In einem Medium mit $\varepsilon = 1$ und $\mu = 10$ herrscht das Magnetfeld

$$\vec{B} = B_0 \frac{a}{\rho} \cos\{2\pi f t\} \vec{e}_z \quad .$$

Wie groß ist der Wert von

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad ,$$

wenn der Integrationsweg durch

$$\rho = b, \quad \varphi \in \{0, 2\pi\}, \quad z = c$$

beschrieben wird?

Lösung zu Aufgabe 7

Das gesuchte Integral resultiert aus dem Faradaygesetz

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

nach Anwendung des Stokesschen Satzes zu

$$\oint_{C_{\mathrm{S}}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_{S} \vec{B} \, \mathrm{d}^2\vec{r} \quad .$$

Hier ist der Integrationsweg für das Ringintegral als Kreisring mit Radius b in der Höhe c und mit Drehrichtung ϕ vorgegeben. Die dazu gehörige Fläche ist der Kreis mit dem Oberflächenelement

$$\mathrm{d}^2\vec{r} = \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi \vec{e}_z \quad .$$

Das Flächenintegral resultiert also zu

$$\begin{aligned}\iint_S \vec{B} \,\mathrm{d}^2\vec{r} &= \int_0^{2\pi}\int_0^b B_0 \frac{a}{\rho} \cos\{2\pi f t\} \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi \\ &= B_0 a \cos\{2\pi f t\} \int_0^{2\pi}\int_0^b \mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\phi = B_0 \cos\{2\pi f t\} 2\pi a b\end{aligned}$$

und das Ergebnis des Ringintegrals lautet

$$\oint_{C_\mathrm{S}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \;=\; B_0 \sin\{2\pi f t\} (2\pi)^2 f a b \quad .$$

Alternativ kann auch der Weg über $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ genommen werden (linke Seite bestimmen und aufintegrieren). Das Ergebnis lautet dann

$$\oint_{C_\mathrm{S}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \;=\; -\frac{B_0 \sin\{2\pi f t\} a}{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 f b} \quad .$$

Der Zusammenhang zwischen den beiden Gleichungen wird durch die Dispersionsrelation

$$\frac{1}{\rho^2} + \frac{\omega^2}{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} = 0$$

hergestellt.

Aufgabe 8

In einem Medium mit den Materialkonstanten μ und ε herrscht das elektrische Feld

$$\vec{E} \;=\; E_0 \exp\left\{\mathrm{i}\left(\omega t - k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right\} \vec{e}_x .$$

Wie groß ist $\vec{H}$?

Lösung zu Aufgabe 8

Das gegebene Feld erfüllt nicht die Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0, \tag{20}$$

jedoch kann formal $\vec{H}$ bis auf einen konstanten Anteil bestimmt werden

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = -\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mu_0\vec{H}) \quad = \quad \nabla\times\vec{E}.$$

Da $\vec{H}$ wie $\vec{E}$ als zeitharmonisch angenommen werden kann, also $\vec{H} = \vec{H}_0\exp\{i\omega t\}$ folgt:

$$\begin{aligned} -\mu\mu_0\cdot i\omega\,\vec{H} &= \frac{\partial}{\partial z}(\vec{E}\circ\vec{e}_\mathrm{x})\cdot\vec{e}_\mathrm{y} - \frac{\partial}{\partial y}(\vec{E}\circ\vec{e}_\mathrm{x})\cdot\vec{e}_\mathrm{z} \\ &= E_0\exp\left\{i\left(\omega t - k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right\}\cdot - ik\,\frac{z\vec{e}_\mathrm{y} - y\vec{e}_\mathrm{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \end{aligned} \tag{21}$$

$$\Longrightarrow \qquad \vec{H} = \frac{k}{\omega\mu\mu_0}\,\frac{z\vec{e}_\mathrm{y} - y\vec{e}_\mathrm{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,E_0\exp\left\{i\left(\omega t - k\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)\right\}$$

Alternative Lösung, hier als Sonderfall, da $\nabla\times\vec{E} = 0$ erfüllt ist. Diese Lösung gilt jedoch nicht allgemein. Das gegebene elektrische Feld kann auch durch den Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0\{\vec{r}\}\ \exp\{i(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r})\}. \tag{22}$$

mit $\vec{k} = k\vec{e}_\mathrm{r}$ ausgedrückt werden. Alternativ kann $\vec{k}$ auch wie in kartesichen Koordinaten beschrieben werden: $\vec{k} = k\,(x\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y} + z\vec{e}_\mathrm{z})\,(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$. Damit folgt:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\frac{\vec{B}}{\mu\mu_0} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \qquad \frac{\nabla\times\vec{E}}{\mu\mu_0}. \tag{23}$$

Unter Verwendung eines zeitharmonischen Ansatztes folgt damit:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= -\frac{1}{i\omega\mu\mu_0}\left(\nabla\times\vec{E}\right) \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu\mu_0}\left[\left(\nabla\times\vec{E}_0\{\vec{r}\}\right)\exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\} + \left(\nabla\exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\}\right)\times\vec{E}_0\{\vec{r}\}\right] \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu\mu_0}\left[\left(\nabla\times\vec{E}_0\{\vec{r}\}\right)\ \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\} - ik\exp\{i(\omega + \vec{k}\circ\vec{r})\}\,\vec{e}_\mathrm{r}\times\vec{E}_0\{\vec{r}\}\right] \\ &= -\frac{1}{i\omega\mu\mu_0}\left(\nabla\times\vec{E}_0\{\vec{r}\}\right)\ \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\} + \frac{k}{\omega\mu\mu_0}\exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\}\left(\vec{e}_\mathrm{r}\times\vec{E}_0\{r\}\right). \end{aligned} \tag{24}$$

Für die Umformung wurde die Identität $\nabla \times \left(a\,\vec{f}\right) = \left(\nabla \times \vec{f}\right) a + (\nabla a) \times \vec{f}$ aus dem Anhang im Skript verwendet. Diese Identität erlaubt das Umschreiben der Rotation. Erfüllt nun das Vektorfeld die Bedingung $\nabla \times \vec{E}_0\{\vec{r}\} = 0$, wie in dieser Aufgabe, kann als Spezialfall über

$$\vec{H} = \frac{k}{\omega\mu\mu_0} \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\right)\right\}\left(\vec{e}_\mathrm{r} \times \vec{E}_0\{\vec{r}\}\right) \tag{25}$$

das magnetische Feld bestimmt werden, jedoch nicht allgemein. Im Skript wird dieser alternative Ansatz in Zusammenhang mit ebenen Wellen eingeführt. Das gegebene elektrische Feld ist jedoch mitnichten eine ebene Welle. Der gemachte Ansatz darf nicht ohne Prüfung der gemachten Voraussetzungen verwendet werden!

Aufgabe 9

Das Zentrum einer rotierenden Scheibe mit Radius R und homogener Oberflächenladung ϱ_S befindet sich auf der z-Achse bei $z = 2a$. Sie rotiert mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \cdot \vec{e}_z$. Bestimmen Sie das magnetische Feld auf der z-Achse.
Hinweis:

$$\int \frac{t^2}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dt = -\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}} + \ln\left\{t - \sqrt{t^2+a^2}\right\}$$

Lösung zu Aufgabe 9

Hinweis (B209):

$$\int \frac{t^3}{(t^2+a^2)^{\frac{3}{2}}} dt = \sqrt{t^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{t^2+a^2}}$$

Es wird nur die z-Achse betrachtet $\vec{e}_\phi$-Anteile sind Null!!

$$\begin{aligned}
\vec{j} &= \varrho_S \cdot \omega \cdot \rho' \cdot \delta\{z-2a\} \cdot \vec{e}_\phi; (0 < \rho < R) \\
d^3r' &= \rho' d\rho' d\phi' dz \\
\vec{r} - \vec{r}' &= \rho' \vec{e}_{\rho'} + (z-z')\vec{e}_z \\
|\vec{r} - \vec{r}'|^2 &= \rho'^2 + (z-z')^2 \\
\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}') &= \varrho_S \cdot \omega \cdot \rho' \cdot \delta\{z-2a\} \cdot \vec{e}_\phi \times (\rho'\vec{e}_{\rho'} + (z-z')\vec{e}_z) \\
&= \varrho_S \cdot \omega \cdot \rho' \cdot \delta\{z-2a\}(-\vec{e}_z \cdot \rho' - (z-z')\vec{e}_\rho) \\
&= \varrho_S \cdot \omega \cdot \rho'^2 \cdot \delta\{z-2a\}(-\vec{e}_z) \\
& \text{(keine } \vec{e}_\rho\text{-Anteile auf der z-Achse)}
\end{aligned}$$

somit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}d^3r' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\cdot 2\pi\cdot\varrho_S\cdot\omega(-\vec{e}_z)\int\limits_0^R \frac{\rho'^3}{(\rho' 2+(z-2a)^2)^{\frac{2}{3}}}d\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{2}\cdot\varrho_S\cdot\omega(-\vec{e}_z)\left[\sqrt{\rho'^2+(z-2a)^2}+\frac{(z-2a)^2}{\sqrt{\rho'^2+(z-2a)^2}}\right]_0^R \\
&= \frac{\mu_0}{2}\cdot\varrho_S\cdot\omega(-\vec{e}_z)\left(\sqrt{R^2+(z-2a)^2}+\frac{(z-2a)^2}{\sqrt{R^2+(z-2a)^2}}-2\cdot(z-2a)\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

In einem homogenen Medium herrscht das elektrische Feld

$$\vec{E}_1 = E_0\sin\{5\pi\frac{x}{a}\}\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\cos\{\omega t-\beta z\}\vec{e}_y \quad .$$

Das Medium wird durch die Materialkonstanten ε_1 und μ_1 charakterisiert. Bei $x = 0.8a$ schließt sich ein Medium mit ε_2 und μ_2 an. Bestimmen Sie $\vec{E}_2$ und $\vec{B}_2$ an der strom- und ladungsfreien Grenzfläche im angrenzenden Medium.

Lösung zu Aufgabe 10

Die Felder auf der anderen Seite der Grenzfläche resultieren aus den Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}
\vec{n}\times(\vec{E}_2-\vec{E}_1)\Big|_{x=0.8a} &= 0 \\
\vec{n}\times(\vec{H}_2-\vec{H}_1)\Big|_{x=0.8a} &= 0 \\
\vec{n}\circ(\vec{D}_2-\vec{D}_1)\Big|_{x=0.8a} &= 0 \\
\vec{n}\circ(\vec{B}_2-\vec{B}_1)\Big|_{x=0.8a} &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Hier ist $\vec{n} = \vec{e}_x$. Da $\vec{E}_1$ keine Normalkomponente aufweist, kann das elektrische Feld an der Grenzfläche direkt bestimmt werden und resultiert zu

$$\vec{E}_2\{x=0.8a\} = \vec{E}_1\{x=0.8a\} = 0 \quad .$$

Das magnetische Feld resultiert aus

$$\nabla\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

wobei die linke Seite

$$\begin{aligned}\nabla\times\vec{E} &= \frac{5\pi}{a}E_0\cos\{5\pi\frac{x}{a}\}\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\cos\{\omega t-\beta z\}\vec{e}_z \\ &\quad -\beta E_0\sin\{5\pi\frac{x}{a}\}\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\sin\{\omega t-\beta z\}\vec{e}_x\end{aligned}$$

ergibt. Durch einfaches Integrieren folgt

$$\begin{aligned}\vec{B} &= \frac{5\pi}{\omega a}E_0\cos\{5\pi\frac{x}{a}\}\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\sin\{\omega t-\beta z\}\vec{e}_z \\ &\quad +\frac{\beta}{\omega}E_0\sin\{5\pi\frac{x}{a}\}\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\cos\{\omega t-\beta z\}\vec{e}_x\end{aligned}$$

und damit direkt

$$\vec{e}_x\circ\vec{B}_2\Big|_{x=0.8a} = \vec{e}_x\circ\vec{B}_1\Big|_{x=0.8a} = 0$$

und

$$\vec{e}_z\circ\vec{B}_2\Big|_{x=0.8a} = \frac{\mu 2}{\mu_1}\vec{e}_z\circ\vec{B}_1\Big|_{x=0.8a} = \frac{5\pi}{\omega a}\frac{\mu_2}{\mu_1}E_0\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\sin\{\omega t-\beta z\}$$

also

$$\vec{B}_2\{x=0.8a\} = \frac{5\pi}{\omega a}\frac{\mu_2}{\mu_1}E_0\cos\{2\pi\frac{y}{b}\}\sin\{\omega t-\beta z\}\vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 11

Gegeben ist das elektrische Feld

$$\vec{E} = \left(E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\}\,\vec{e}_{\mathrm{r}} + E_\theta\{r,\theta\}\,\vec{e}_\theta\right)\exp\{\mathrm{i}\,(\omega t - kr)\} \quad .$$

Die Komponenten $E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\}$ und $E_\theta\{r,\theta\}$ seien reell. Die zeitgemittelte Leistung, die durch eine Halbkugeloberfläche mit Radius R geht, soll bestimmt werden. Welche Komponente von $\vec{H}$ muss dafür bestimmt werden? Wie resultiert diese Komponente aus $\vec{E}$? Wie lautet der Integralausdruck (mit Integrationsgrenzen) für die Leistung?

Lösung zu Aufgabe 11

$$P = \int\int \bar{\vec{S}}\circ d^2\vec{r} \qquad ; \qquad \bar{\vec{S}} \qquad \text{zeitgemittelter Poyntingvektor} \tag{26}$$

$$d^2\vec{r} = r^2\sin\{\theta\}d\varphi\, d\theta\vec{e}_{\mathrm{r}} \tag{27}$$

für Flächen $r = \text{constant}$

$\Longrightarrow$ $\vec{e}_{\mathrm{r}}$- Komponente von $\bar{\vec{S}}$ bzw. $\vec{S}$ ist gesucht

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^* \tag{28}$$

$\rightarrow$ nur φ-Komponente von $\vec{H}$ macht einen Beitrag zur r-Komponente von $\vec{S}$

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H} \circ \vec{e}_\varphi\right)\, \mu_0 &= \left(\nabla \times \vec{E}\right) \circ \vec{e}_\varphi \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\vec{E} \circ \vec{e}_\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\vec{E} \circ \vec{e}_{\mathrm{r}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\theta\{r,\theta\} \exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial \theta}\, E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\} \exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\}\right] \\
&= \frac{\exp\{i\omega t\}}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(rE_\theta\{r,\theta\} \exp\{-ikr\}\right)\right. \\
&\qquad \left. - \frac{\partial}{\partial \theta}\left(E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\} \exp\{-ikr\}\right)\right] \\
&= \frac{\exp\{i(\omega t - kr)\}}{r} \\
&\qquad \cdot \left[(1 - ikr)\, E_\theta\{r,\theta\} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(E_\theta\{r,\theta\}\right) - \frac{\partial}{\partial \theta}\, E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\}\right]
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\vec{H} \circ \vec{e}_\varphi = \frac{\exp\left\{i(\omega t - kr)\right\}}{-i\omega r \mu_0}\left[(1 - ikr)\, E_\theta\{r,\theta\} + r\frac{\partial}{\partial r}\, E_\theta\{r,\theta\} - \frac{\partial}{\partial \theta}\, E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\}\right] \tag{30}$$

$$\vec{S} \circ \vec{e}_{\mathrm{r}} = \vec{e}_{\mathrm{r}} \circ \left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \frac{E_\theta\{r,\theta\}}{+i\omega r \mu_0}\left[(1 + ikr)\;\, E_\theta\{r,\theta\} + r\frac{\partial}{\partial r}\, E_\theta\{r,\theta\} - \frac{\partial}{\partial \theta}\, E_{\mathrm{r}}\{r,\theta\}\right] \tag{31}$$

$$\begin{aligned}
\bar{\vec{S}} \circ \vec{e}_{\mathrm{r}} = \frac{1}{2}\, Re\left\{\vec{S} \circ \vec{e}_{\mathrm{r}}\right\} = \frac{1k}{2\omega}\frac{E_\theta\{r,\theta\}^2}{\mu_0} &= \frac{1}{2}\frac{E_\theta\{r,\theta\}^2}{c\mu_0} = \frac{E_\theta\{r,\theta\}^2}{2Z} \\
&= \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\,\frac{1}{2}\, E_\theta\{r,\theta\}^2 \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}}_{=\frac{1}{2Z_0}=\frac{1}{2\mu_0 c}=\frac{k}{2\mu_0\omega}} \qquad E_\theta\{r,\theta\}^2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
P &= \frac{k}{2\mu_0\omega} \int\limits_{\theta=0}^{\pi/2} \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} E_\theta^2\{r,\theta\}\,|_{r=R}\; r^2 \sin\{\theta\} d\varphi d\theta \\
&= \frac{k}{2\mu_0\omega} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\varphi=0}^{\pi} E_\theta^2\{r,\theta\}\,|_{r=R}\, r^2 \sin\{\theta\} d\varphi d\theta \qquad (32)
\end{aligned}
$$

wobei die Beziehung $k = 2\pi/\lambda$, $\omega = 2\pi f$ verwendet wurde, sowie $c = 1/\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$, $Z = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}$.

Aufgabe 12

Im Zentrum der x–y-Ebene befindet sich eine ringförmige unendlich dünne Linienladung mit der Ladung ϱ_{L} und dem Durchmesser $2a$. Bestimmen Sie das dadurch erzeugte elektrische Feld auf der z-Achse.

Lösung zu Aufgabe 12

Mit:

$$
\begin{aligned}
\varrho_V &= \varrho_L \cdot \delta\{z'\} \cdot \delta\{\rho' - a\} \\
d^3r' &= \rho' \cdot d\rho' d\phi' dz' \\
\vec{r} - \vec{r}'|_{\text{Achse}} &= -\rho'\vec{e}_{\rho'} + (z - z')\vec{e}_z \\
|\vec{r} - \vec{r}'|^2 &= \rho'^2 + (z - z')^2
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\varrho \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3r' \\
&= \frac{\varrho_L}{4\pi\varepsilon_0} \cdot 2\pi \int \frac{(z - z') \cdot a \cdot \delta\{z'\}}{(a^2 + (z - z')^2)^{\frac{3}{2}}} dz' \vec{e}_z \\
&= \frac{\varrho_L}{2\varepsilon_0} \cdot \frac{z \cdot a}{(a^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \vec{e}_z
\end{aligned}
$$

Aufgabe 13

Zwei homogene Medien stoßen bei $y = b$ aneinander. Im Bereich $y \geq b$ läuft eine Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\vec{H}_2 = H_0 \exp\{i3k_0 y\} \exp\{i4k_0 z\} \exp\{i\omega t\} \vec{e}_x \quad .$$

Die Brechzahl im Bereich $y < b$ ist $n = \sqrt{17}$. Im gesamten Raum gilt $\varepsilon = 1$. Wie lautet die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1$ im Bereich $y < b$?

Lösung zu Aufgabe 13

Hier handelt es sich um eine Welle, die in $-y$- und $-z$- Richtung läuft. Damit bewegt sie sich auf die Grenzfläche zu. An der Grenzfläche wird sie reflektiert und transmittiert. Der Transmissionsfaktor errechnet sich aus dem Reflektionsfaktor welcher für TE- und TM-Wellen unterschiedlich ist. Mit $\vec{n} = -\vec{e}_y$ und $\vec{n} \circ \vec{H} = 0$ ergibt sich, dass es sich hier um eine TM-Welle handelt. Die magnetische Feldstärke $\vec{H}_1 = \vec{H}_{\text{tr}}$ ist gesucht. Bei einer reinen TM-Welle resultiert diese aus der Feldstärke der einfallenden Welle $\vec{H}_{\text{in}} = \vec{H}_2$ zu

$$\vec{H}_1 = (1 + r_{\text{TM}}) \vec{H}_2 \quad .$$

Für den Reflexionsfaktor

$$r_{\text{TM}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)} = \frac{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\text{in}} - \vec{k}_{\text{tr}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\text{in}} + \vec{k}_{\text{tr}} \right)}$$

werden die Normalkomponenten der Ausbreitungsvektoren benötigt. Einfach ist das für die einfallende Welle $\vec{k}_{\text{in}} = -(3\vec{e}_y + 4\vec{e}_z)^T k_0$ mit $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = -3k_0$. Die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle errechnet sich aus

$$\|\vec{k}_{\text{tr}}\|^2 = (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})^2 + \|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}}\|^2 = (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})^2 + \|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|^2 \quad .$$

Mit $\|\vec{k}_{\text{tr}}\|^2 = 17k_0^2$ und $\|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|^2 = 16k_0^2$ resultiert $(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})^2 = k_0^2$ und damit $r_{\text{TM}} = 0.5$ $(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = k_0)$ und somit

$$\vec{H}_1 = 1.5 H_0 \exp\{ik_0 y\} \exp\{i4k_0 z\} \exp\{i\omega t\} \vec{e}_x \quad .$$

Achtung: Das Vorzeichen von $\vec{n}$ ist hier entscheidend. Es wird aus $\vec{k}$ bestimmt, genau gesagt aus der Laufrichtung der einfallenden Welle die ja mit $\text{Re}\left\{\vec{k}_{\text{in}}\right\}$ bestimmt wird. Wenn man sich nicht sicher ist, welches Vorzeichen gilt, kann man versuchsweise ein $\vec{\tilde{n}} = \vec{e}_y$ festlegen. Der richtige Normalenvektor ergibt sich dann mit

$$\vec{n} = \frac{\mathrm{Re}\left\{\vec{\tilde{n}} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}\right\}}{\left|\mathrm{Re}\left\{\vec{\tilde{n}} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}\right\}\right|}\vec{\tilde{n}}$$