

Aufgabe 1

In einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl n_1 läuft die Welle

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(\omega t - \beta z)\} J_0\{\sqrt{k^2 - \beta^2} \rho\} \vec{e}_\rho \quad .$$

Dabei ist J die Besselfunktion und die Beschreibung der Welle erfolgt in einem konzentrischen Zylinderkoordinatensystem. Wie groß ist das elektrische Feld der Welle an der ungeladenen Grenzfläche im angrenzenden unmagnetischen Medium der Brechzahl n_2 , wenn die Grenzfläche durch $\rho = a$ beschrieben wird?

Lösung zu Aufgabe 1

Das elektrische Feld an der Grenzfläche resultiert aus den Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_{\text{Grenze}} &= \rho_s \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_{\text{Grenze}} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Hier ist der Normalenvektor auf die Zylinderoberfläche zu nehmen: $\vec{n} = \vec{e}_\rho$.

Das elektrische Feld im Zylinder hat nur eine Normalenkomponente bezüglich der Grenzfläche. Damit folgt aus der zweiten Stetigkeitsbedingung, dass das tangential elektrische Feld an der Grenzfläche auch im angrenzenden Medium verschwinden muss.

Die Grenzfläche ist ungeladen. Die dielektrische Verschiebung resultiert aus $\vec{D} = \varepsilon \varepsilon_0 \vec{E}$ mit $\varepsilon = n^2$ in unmagnetischen Medien. Somit ist Das elektrische Feld an der Grenzfläche im Außenraum gleich dem im Innenraum bis auf den Faktor $(n_1/n_2)^2$:

$$\vec{E}_2\{\rho = a\} = E_0 \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \exp\{i(\omega t - \beta z)\} J_0\{\sqrt{k^2 - \beta^2} a\} \vec{e}_\rho \quad .$$

Aufgabe 2

Eine ebene Welle mit der Winkelfrequenz ω trifft im Medium mit μ_1 senkrecht auf eine Grenzfläche bei $z = c$. Die Wellenzahl der einfallenden Welle ist k_1 , die Wellenzahl der transmittierten Welle ist k_2 . Das an der Grenzfläche reflektierte Feld H ist betragsmäßig halb so groß, wie das einfallende Feld. Wie groß ist ε_2 im Bereich der transmittierten Welle?

Lösung zu Aufgabe 2

Es gilt für einfallende und transmittierte Welle $k_1 = k_0\sqrt{\mu_1\epsilon_1}$ sowie $k_2 = k_0\sqrt{\mu_2\epsilon_2}$ mit $k_0 = \omega/c_0 = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$.

Der Reflektionsfaktor r_{TM} ist hier massgeblich, da \vec{H} berechnet werden soll, siehe Skript Kapitel 7.2., Tabelle 7.1:

$$r_{\text{TM}} = \frac{\vec{H}_{\text{ref}} \circ \vec{e}_l}{\vec{H}_{\text{in}} \circ \vec{e}_l} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\epsilon_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\epsilon_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\epsilon_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\epsilon_{\text{tr}}} \right)} \quad (1)$$

In der Aufgabe gilt senkrechter Einfall, also $\vec{k}_1 \circ \vec{n}/k_1 = k_1$ sowie $\vec{k}_2 \circ \vec{n}/k_2 = k_2$. Damit gilt

$$r_{\text{TM}} = \frac{\frac{k_1}{\epsilon_1} - \frac{k_2}{\epsilon_2}}{\frac{k_1}{\epsilon_1} + \frac{k_2}{\epsilon_2}} \quad (2)$$

$$\frac{k_2}{\mu_2} = \frac{k_1}{\mu_1} \frac{1 - r_{\text{TM}}}{1 + r_{\text{TM}}} \quad (3)$$

$$\frac{\sqrt{\mu_2\epsilon_2}}{\mu_2} = \frac{\sqrt{\mu_1\epsilon_1}}{\mu_1} \frac{1 - r_{\text{TM}}}{1 + r_{\text{TM}}} \quad (4)$$

$$\epsilon_2 = \frac{\mu_2}{\mu_1} \epsilon_1 \left(\frac{1 - r_{\text{TM}}}{1 + r_{\text{TM}}} \right)^2 \quad (5)$$

$$= \left(\frac{k_2}{k_0} \right)^2 \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{k_1}{k_0} \right)^2 \frac{1}{\mu_1^2} \left(\frac{1 - r_{\text{TM}}}{1 + r_{\text{TM}}} \right)^2 \quad (6)$$

$$\epsilon_2 = \frac{k_1 k_2}{k_0^2} \frac{1}{\mu_1} \frac{1 - r_{\text{TM}}}{1 + r_{\text{TM}}} \quad (7)$$

mit k_0 wie oben eingeführt.

Fallunterscheidung:

i) wenn $r_{\text{TM}} > 0$, also $k_0/k_1 > k_0/k_2 \rightarrow k_1 < k_2$, dann gilt nach Aufgabenstellung $r_{\text{TM}} = 0.5$ und $\epsilon_2 = k_1 k_2 / (k_0^2 \mu_1) (1 - 0.5) / (1 + 0.5) = 1/3 k_1 k_2 / (k_0^2 \mu_1)$.

ii) wenn $r_{\text{TM}} < 0$, also $k_0/k_1 < k_0/k_2 \rightarrow k_1 > k_2$, dann gilt nach Aufgabenstellung $r_{\text{TM}} = -0.5$ und $\epsilon_2 = k_1 k_2 / (k_0^2 \mu_1) (1 + 0.5) / (1 - 0.5) = 3 k_1 k_2 / (k_0^2 \mu_1)$.

Aufgabe 3

Eine ebene Welle fällt in der $y - z$ -Ebene unter dem Winkel θ (gemessen gegen die z -Achse) auf die Grenzfläche $z = 0$. Die Welle mit der Kreisfrequenz ω befindet sich in einem Medium mit $\mu_1 = 2$ und $\varepsilon_1 = 1$. Im angrenzenden Medium gilt $\mu_2 = 1$ und $\varepsilon_2 = 2$. Wie groß sind jeweils die Brechzahlen der Medien? Wie groß ist der Reflexionsfaktor der Welle für den Fall, dass sie bezüglich der Grenzfläche rein TE oder rein TM polarisiert ist?

Lösung zu Aufgabe 3

Die Reflexionsfaktoren sind definiert als

$$r_{\text{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)} \quad r_{\text{TM}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)} .$$

Zur Bestimmung der Reflexionsfaktoren müssen also die Wellenzahlvektoren, genau gesagt deren Normalkomponenten, bestimmt werden. Für die einfallende Welle gilt

$$\vec{k}_{\text{in}} = n_1 k_0 (\sin\{\theta\} \vec{e}_y + \cos\{\theta\} \vec{e}_z) .$$

Der Normalenvektor auf die Grenzfläche ist \vec{e}_z , die Brechzahl ist $n_1 = \sqrt{\mu_1 \varepsilon_1}$ und die Vakuumwellenzahl lautet $k_0 = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$.

Aus den Stetigkeitsbedingungen für den Wellenzahlvektor ebener Wellen

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{in}} + \vec{k}_{\text{ref}}) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{k}_{\text{in}} - \vec{k}_{\text{tr}}) &= 0 \\ \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} &= \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - k_{\text{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2} = \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|^2} \end{aligned}$$

mit $k_{\text{in}}^2 = \mu_1 \varepsilon_1 k_0^2$, $k_{\text{tr}}^2 = \mu_2 \varepsilon_2 k_0^2$, $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = n_1 k_0 \cos\{\theta\}$ und $\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}} = -n_1 k_0 \sin\{\theta\} \vec{e}_x$.

Somit ergibt sich für $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = \sqrt{2} k_0 \cos\{\theta\}$ wegen $n_1 = n_2 = \sqrt{2}$ und damit

$$r_{\text{TE}} = \frac{\frac{1}{\mu_1} - \frac{1}{\mu_2}}{\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{1}{3} \quad r_{\text{TM}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} .$$

Aufgabe 4

Es herrscht das Potential $V\{\vec{r}\} = V_0 G\{x\}$ mit zugehöriger Raumladung $\rho\{\vec{r}\}$. Reicht es allgemein, die Raumladung $\rho\{\vec{r}\}$ mit einem Faktor $H\{y\}$ zu multiplizieren, um das Potential $\tilde{V}\{\vec{r}\} = V_0 G\{x\} H\{y\}$ zu erzeugen? Begründen Sie Ihre Aussage (Rechnung). Nur eine einfache Antwort ja/nein wird nicht gewertet.

Lösung zu Aufgabe 4

Es gilt die Poisson Gleichung

$$\Delta V\{\vec{r}\} = \frac{\rho\{\vec{r}\}}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (8)$$

In Kartesischen Koordinaten gilt $\Delta V\{\vec{r}\} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V + \frac{\partial^2}{\partial y^2} V + \frac{\partial^2}{\partial z^2} V$ und mit

$$V\{\vec{r}\} = V\{x\} = V_0 G\{x\} \quad (9)$$

$$\Delta V\{\vec{r}\} = V_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} G\{x\} \right) \quad (10)$$

$$= -\frac{\rho\{x\}}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (11)$$

Entsprechend lautet der Laplace Operator auf das Potential $\tilde{V}\{\vec{r}\} = V\{\vec{x}\} H\{\vec{y}\}$ angewendet:

$$\Delta \tilde{V}\{\vec{r}\} = V_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} G\{x\} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} H\{y\} \right) \quad (12)$$

$$\neq V_0 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} G\{x\} \right) \cdot H\{y\} = -\frac{\rho\{\vec{x}\} H\{y\}}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (13)$$

Es genügt allgemein nicht, die Raumladung $\rho\{\vec{r}\}$ mit einem Faktor $H\{y\}$ zu multiplizieren, um dem Potential $\tilde{V}\{\vec{r}\} = V_0 G\{x\} H\{y\}$ zu genügen. Dies gilt bis auf den Spezialfall: $H\{y\} = 1$ also $\frac{\partial^2}{\partial x^2} H\{y\} = 0$.

Aufgabe 5

Zwei unendlich lange koaxiale Kreiszyylinder tragen die Oberflächenladung ρ_S bzw. $-\rho_S$. Die Spannung zwischen dem inneren und dem äußeren Zylinder ist U . Welchen Innenradius hat der äußere Zylinder, wenn der Radius des inneren Zylinders a ist? Der Raum zwischen den beiden Zylindern ist mit einem Dielektrikum ϵ gefüllt.

Lösung zu Aufgabe 5

Die Spannung U zwischen den Zylindern entspricht der Potenzialdifferenz. Das Potenzial geht aus

$$\Delta V = 0$$

hervor. Hier herrscht vollständige Zylindersymmetrie, so dass

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial V}{\partial \rho} \right)$$

gilt. Mit einfacher Integration resultiert

$$V = c_1 \ln\{\rho\} + c_2 \quad ,$$

wobei die Konstanten c_1 und c_2 noch aus Rand- oder Stetigkeitsbedingungen zu bestimmen wären. Eine Randbedingung lautet

$$V\{\rho = b\} - V\{\rho = a\} = U$$

woraus sofort $c_1 \ln\{\frac{b}{a}\} = U$ und damit

$$V = U \frac{\ln\{\rho\}}{\ln\{\frac{b}{a}\}} + c_2 \quad ,$$

resultiert. Die zweite Randbedingung wird durch die gegebene Oberflächenladung gegeben. Hier gilt

$$\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_{\text{Grenze}} = \varrho_S$$

mit $t\vec{n} = \vec{e}_\rho$. Über die dielektrische Verschiebung im äußeren bzw. im inneren Zylinder ist nichts bekannt. Abkürzend wird sie hier mit $\vec{n} \circ \vec{D}_1|_{\rho=a} = D_{n1}$ geschrieben. Im Raum zwischen den Zylindern gilt einfach $\vec{D}_2 = -\varepsilon\varepsilon_0 \nabla V$ und für die Normalenkomponente resultiert

$$\vec{n} \circ \vec{D}_2 = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial \rho} V = \varepsilon\varepsilon_0 \frac{U}{\ln\{\frac{b}{a}\}} \frac{1}{\rho} \quad .$$

Die Stetigkeitsbedingung an dem Innenzylinder ergibt

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{D}_2\{\rho = a\} &= \varrho_S + D_{n1} \\ &= \varepsilon\varepsilon_0 \frac{U}{\ln\{\frac{b}{a}\}} \frac{1}{a} \quad . \end{aligned}$$

Damit resultiert

$$b = a \exp \left\{ \frac{\varepsilon \varepsilon_0 U}{a(\varrho_S + D_{n1})} \right\} .$$

Nimmt man wie üblich an, dass der innere Zylinder ungeladen ist, kann $D_{n1} = 0$ gesetzt werden und es ergibt sich das für den Metallzylinder bekannte Resultat. Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung an der Grenzfläche im Aussenzylinder verschwindet in diesem Fall wegen der vorausgesetzten Oberflächenladung nicht! Diese müsste dafür um den Faktor a/b kleiner sein.

Aufgabe 6

Gegeben ist ein unendlich dünner Stab der Länge L symmetrisch zum Ursprung. Im Bereich $-L/2 < z < L/2$ sitzt auf dem Stab die Ladung $\rho_0 (2z/L)^5$. Der übrige Raum ist ungeladen. Welche Dimension hat ρ_0 ? Wie ist das Dipolmoment des Stabes mit Bezug auf den Koordinatenursprung?

Lösung zu Aufgabe 6

Die Ladung ϱ_0 sitzt auf einer Linie, eine gültige Parametrisierung ist

$$\varrho \{x, y, z\} = \begin{cases} \varrho_0 \left(\frac{2z}{L}\right)^5 \delta \{x\} \delta \{y\}, & \text{falls } |z| < 0.5L \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} . \quad (14)$$

Die Ladung ϱ_0 beschreibt damit eine Linienladung mit der Einheit $[\varrho_0] = \text{As}/m$. Das elektrische Dipolmoment bezüglich des Ursprungs ist dann:

$$\vec{p} = \int \int \int \varrho_V \{ \vec{r}' \} \vec{r}' d^3 \vec{r}' = \varrho_0 \int_{-L/2}^{L/2} \left(\frac{2z'}{L} \right)^5 z' \vec{e}_z dz' \quad (15)$$

$$= \varrho_0 \left(\frac{2}{L} \right)^5 \left(\frac{z^7}{7} \right)_{z=-L/2}^{z=L/2} \vec{e}_z \quad (16)$$

$$= \varrho_0 \frac{2}{7} \left(\frac{L}{2} \right)^2 \vec{e}_z . \quad (17)$$

Aufgabe 7

Im freien Raum befindet sich eine kugelförmige Raumladungsverteilung vom Radius a . Ihre Ladungsdichte kann durch

$$\rho_V = \rho_0 r^3$$

beschrieben werden. Wie lautet das elektrische Feld im gesamten Raum?

Lösung zu Aufgabe 7

Das elektrische Feld steht mit der Raumladung über

$$\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E} = \rho_V$$

im Zusammenhang. Hier handelt es sich um eine völlig kugelsymmetrische Anordnung, also gilt

$$\nabla \circ \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 (\vec{E} \circ \vec{e}_r) \right) .$$

Die Lösung lautet einfach im Bereich der Raumladung

$$\vec{E} \circ \vec{e}_r = \frac{\rho_0}{\varepsilon_0} \frac{1}{6} r^4 + c_1 \frac{1}{r^2}$$

und außerhalb

$$\vec{E} \circ \vec{e}_r = c_2 \frac{1}{r^2} .$$

Mit dem Gaußschen Gesetz in Integralform ergibt sich

$$\varepsilon_0 \oint \vec{E} \circ d^2\vec{r} = \iiint \rho_V d^3r$$

$$4\pi\varepsilon_0 c_2 = \rho_0 4\pi \frac{a^6}{6} \quad \hookrightarrow$$

$$c_2 = \frac{\rho_0 a^6}{\varepsilon_0 6}$$

An der Grenze der Raumladung muss die Normalkomponente des elektrischen Feldes stetig sein (eigentlich \vec{D}). Damit ergibt sich

$$\frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{1}{6} a^4 + c_1 \frac{1}{a^2} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{a^4}{6r} \quad ,$$

also $c_1 = 0$. Im gesamten Raum ist demnach das elektrische Feld mit

$$\vec{E} = \frac{\rho_0}{6\epsilon_0} \vec{e}_r \begin{cases} r^4 & \text{für } r \leq a \\ \frac{a^6}{r^2} & \text{für } r > a \end{cases}$$

anzugeben.

Aufgabe 8

Es gilt in Zylinderkoordinaten das magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{A}(t, \vec{r}) = A_0 \operatorname{arcsinh} \left\{ \sqrt{(ct/\rho)^2 - 1} \right\} \vec{e}_z \quad .$$

Das gegebene Vektorpotenzial rührt von einem Stromfaden bei $\rho = 0$ her. Berechnen Sie die Stromstärke I im Stromfaden, die ab $t = 0$ fließt. Setzen Sie voraus, dass die Zeitableitung der dielektrischen Verschiebung gegenüber der Stromdichte vernachlässigbar klein ist.

Hinweis: $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \operatorname{arcsinh} \{x/a\}$.

Lösung zu Aufgabe 8

Es gelten nach der Definition $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ und damit im Material mit μ, μ_0 : $\vec{H} = 1/(\mu\mu_0)\vec{B} = 1/(\mu\mu_0)\nabla \times \vec{A}$. Aus der Maxwell Gleichung $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_V + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$ folgt durch den Satz von Stokes die Form $\oint_{C_S} \vec{H} \circ d\vec{l} = \int \int_S \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \right) \circ d^2\vec{r}$.

Der zweite Term im Oberflächenintegral gibt die Ableitung des elektrischen Flusses an und ist laut Aufgabenstellung gegenüber der Stromdichte vernachlässigbar klein. Das Integral vereinfacht sich zu: $\oint_{C_S} \vec{H} \circ d\vec{l} = J_S$ mit J_S dem Strom durch die Fläche S . Für die Integration im Ring kann $\rho = \text{constant}$ angenommen werden, nach Skript Anhang C.3. ist deshalb nur die \vec{e}_ϕ -Komponente in \vec{H} wichtig:

$$\vec{e}_\phi \circ (\nabla \times \vec{A}) = \frac{\partial}{\partial z} (\vec{A} \circ \vec{e}_\rho) - \frac{\partial}{\partial \rho} (\vec{A} \circ \vec{e}_z). \quad (18)$$

In dieser Aufgabe hat \vec{A} keine z-Abhängigkeit und somit gilt:

$$\vec{e}_\phi \cdot (\nabla \times \vec{A}) = \frac{-1}{\rho} \frac{1}{\sqrt{(ct/\rho)^2 - 1}} \quad (19)$$

Der gesamte Strom durch eine Schleife mit $\rho > 0$ ist

$$J_S = \oint_0^{2\pi} \frac{((\nabla \times \vec{A}) \circ \vec{e}_\phi) \cdot \vec{e}_\phi}{\mu\mu_0} \rho d\phi \vec{e}_\phi \quad (20)$$

$$= \frac{-A_0}{\mu\mu_0} \frac{1}{\sqrt{(ct/\rho)^2 - 1}} \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{-2\pi A_0}{\mu\mu_0} \frac{1}{\sqrt{(ct/\rho)^2 - 1}} \quad (21)$$

Dieser Wert strebt für $\rho/(ct) \rightarrow 0$, also für kleine Zeiten gegen $2\pi A_0/(\mu\mu_0)$ und für große Zeiten gegen Null.

Aufgabe 9

Eine ebene Welle fällt auf die Grenzfläche $2x + y = 3$ zwischen zwei homogenen Medien. Die Welle läuft in y -Richtung, ihr elektrisches Feld weist zu gleichen Teilen in x - und z -Richtung. Wie groß ist die magnetische Feldstärke \vec{H} des bezüglich der Grenzfläche TM-polarisierten Anteils?

Lösung zu Aufgabe 9

Zur Bestimmung der Komponenten bezüglich der Grenzfläche muss der Normalenvektor bestimmt werden. Dies erfolgt mit der Hesseschen Normalenform

$$\vec{n} \circ \vec{r} + c = 0 \quad .$$

Mit $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ ist schnell klar, dass $\vec{n} \circ \vec{r}$ mit $2x + y$ gleichzusetzen ist. Damit ergibt sich

$$\vec{n} = \frac{2\vec{e}_x + \vec{e}_y}{\sqrt{5}} \quad .$$

Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle ist $\vec{k} = k\vec{e}_y$. Das elektrische Feld lautet gemäß Aufgabenstellung $\vec{E} = E(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$. Somit wird das magnetische Feld zu

$$\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu\mu_0} (\vec{k} \times \vec{E}) = \frac{Ek}{\omega\mu\mu_0} (\vec{e}_x - \vec{e}_z)$$

berechnet. Der TM-Anteil der magnetischen Feldstärke ist der, der bezüglich der Grenzfläche keine Normalenkomponente aufweist bzw. parallel zum Lateralvektor $\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n} \times \vec{k}}{\|\vec{n} \times \vec{k}\|} = \vec{e}_z$ liegt. Dies ist

$$\vec{H}_{\text{TM}} = -\frac{Ek}{\omega\mu\mu_0}\vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 10

Von einer Kugel mit Radius a geht das elektrische Feld $\vec{E}\{\vec{r}\} = E_0(a/r)^2\vec{e}_r$ aus. Die Kugel sitzt mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung, ihr Inneres ist ladungsfrei. Berechnen Sie das Potential der Kugel gegenüber einem unendlich vom Ursprung entfernten Punkt. Wie groß ist die auf der Kugel gespeicherte Ladung? In welchem Verhältnis stehen Potential und Ladung zueinander?

Lösung zu Aufgabe 10

In Kugelkoordinaten mit $\vec{E} = E\{\vec{r}\}\vec{e}_r$ und $d\vec{l} = \vec{e}_r dr$ (diese Elemente sind in Anhang C.3. im Skript beschrieben) ist das Potential bezüglich der Fernkugel bei r_f definiert als:

$$V\{r = a\} = -\int_{|r_f|=\infty}^{|\vec{r}|} \vec{E} \circ d\vec{l} \quad (22)$$

$$= \int_a^\infty E_0 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \vec{e}_r \circ \vec{e}_r dr \quad (23)$$

$$= a^2 E_0 \left[\frac{1}{r}\right]_{r=\infty}^{r=a} = aE_0. \quad (24)$$

Die Ladung auf der Kugel mit $r' = a$ ist durch

$$Q = \epsilon_0 \iiint \vec{E}\{\vec{r}'\} \circ d^2\vec{r}' \quad (25)$$

$$= \epsilon_0 \int_{\theta'=0}^\pi \int_{\varphi'=0}^{2\pi} E_0\{r'\} \vec{e}_{r'} \circ \vec{e}_{r'} r'^2 \sin\{\theta'\} d\varphi' d\theta' \quad (26)$$

$$= 2\pi\epsilon_0 a^2 E_0 \int_{\theta'=0}^\pi \sin\{\theta'\} d\theta' \quad (27)$$

$$= 4\pi\epsilon_0 a^2 E_0 \quad (28)$$

ausgedrückt. Damit ergibt sich ein Verhältnis von Potential und Ladung von

$$\frac{V\{r = a\}}{Q} = \frac{aE_0}{4\pi\epsilon_0 a^2 E_0} = \frac{1}{4\pi a\epsilon_0}. \quad (29)$$

Anmerkung: Das Verhältnis von Potential und Ladung wird häufig zur Definition der Kapazität herangezogen. Das in das Verhältnis eingehende Potential ist aber kein absoluter Wert,

sondern bezieht sich immer auf einen Referenzpunkt und das Potential in diesem Punkt. In dieser Aufgabe ist der Referenzpunkt unendlich vom Ursprung entfernt und besitzt das Potential $V\{\vec{r}_i\} = 0$. Die Kapazität lässt sich nur sinnvoll definieren, wenn angegeben wird auf welche Punkte sie sich bezieht.

Aufgabe 11

Das zeitlich gemittelte Potenzial des Wasserstoffatoms kann in guter Näherung durch

$$V = q \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\}$$

approximiert werden. Dabei entspricht a dem Bohrschen Radius. Welche äquivalente Raumladungverteilung würde dieses Potenzial erzeugen?

Lösung zu Aufgabe 11

Die Raumladung und das Potenzial hängen über

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0}$$

zusammen. In Kugelkoordinaten gilt

$$\Delta V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} V \right) + \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin\{\theta\} \frac{\partial}{\partial \theta} V \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\{\theta\}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V \quad .$$

Das vorgegebene Potenzial weist weder eine φ - noch eine θ -Abhängigkeit auf. Damit resultiert einfach

$$\begin{aligned} \Delta V &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} V \right) \\ &= q \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(\frac{-1}{r^2} \left(1 + \frac{r}{a}\right) + \frac{1}{ra} + \frac{-2}{a} \frac{1}{r} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \right) \\ &= q \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\left(1 + \frac{r}{a}\right) + \frac{r}{a} + \frac{-2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \\ &= -q \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \\ &= -q \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{2}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right) + \frac{2r}{a^2} - \frac{2}{a} \left(1 + \frac{2r}{a} \left(1 + \frac{r}{a}\right)\right) \right) \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \\ &= q \frac{1}{r^2} \frac{4r^2}{a^3} \exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\} \quad . \end{aligned}$$

Die äquivalente Raumladung lautet also

$$\varrho = q \frac{4\epsilon_0}{a^3} \exp \left\{ -\frac{2r}{a} \right\} .$$

Aufgabe 12

Ein dünner Draht ist zu einem Kreis mit Radius R gebogen und gleichförmig aufgeladen. Der Draht trägt die Gesamtladung Q . Skizzieren Sie die Anordnung und zeichnen Sie die Einheitsvektoren in einem angepassten Koordinatensystem ein. Wie lautet die Raumladungsdichte? Wie lautet das elektrische Potential $V \{ \vec{r} \}$ bis auf eine Winkelintegration.

Wie lautet das Potential auf einer Geraden, die durch das Zentrum der Schleife geht und die senkrecht zur Schleifenebene verläuft?

Lösung zu Aufgabe 12

Eine gültige Parametrisierung der Ladungsdichte in der gegebenen Anordnung ist:

$$\varrho_V \{ \vec{r} \} = \varrho_L \delta \{ z \} \delta \{ \rho - R \} . \quad (30)$$

Die Gesamtladung berechnet sich dann zu:

$$Q = \int \int \int \varrho_V \{ \vec{r} \} d^3 r \quad (31)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \varrho_L \delta \{ z \} \delta \{ \rho - R \} d\varphi d\rho dz \quad (32)$$

$$= 2\pi R \varrho_L \quad (33)$$

Damit ist $\varrho_L = Q/(2\pi R)$. Das Potential bestimmt sich aus der Auswertung des Coulomb Integrals:

$$V \{ \vec{r} \} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \int \int \frac{\varrho_V \{ \vec{r}' \}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3 r' \quad (34)$$

$$= \frac{\varrho_L}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \frac{\delta \{ z' \} \delta \{ \rho' - R \} \rho'}{\sqrt{(z - z')^2 + \rho^2 - \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \{ \varphi' \}}} d\varphi' d\rho' dz' \quad (35)$$

$$= \frac{\varrho_L R}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sqrt{z^2 + \rho^2 - 2\rho\rho' \cos \{ \varphi' \}}} d\varphi' . \quad (36)$$

Die Integration nach φ' ist nicht einfach, bei $\rho = 0$ (wie in der Aufgabenstellung) jedoch möglich. Dann fällt der Term mit $\cos \{ \varphi' \}$ weg und das Potential auf der z-Achse kann geschlossen

angegeben werden.

$$V \{ \rho = 0, z \} = \frac{\rho_L R}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi}{\sqrt{z^2 + R^2}} \quad (37)$$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}. \quad (38)$$