Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2008-2

Name :

Vorname :

Matrikelnummer :

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$
Aufgabe 10:	Aufgabe 11:	Aufgabe 12:	$\sum$

Gesamtpunktzahl:

Note:

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Ihr Laborteam hat ein Material entwickelt, das in reiner Form einen Brechungsindex von $n = 1.6$ besitzt (bei $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$). Durch Dotierung des Materials ändert sich die Brechzahl so, dass $n = 1.6 + d \cdot 2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{Atome}$ in Abhängigkeit der Dotierstoffkonzentration d (Einheit: $\mathrm{Atome}/\mathrm{cm}^3$) bei dieser Wellenlänge gilt.
Berechnen die Dotierstoffkonzentration d, die nötig ist, um bei Einfall der Welle aus dem Material unter 60° zur ebenen Oberfläche gegen Luft Totalreflexion zu erreichen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zwei unendlich ausgedehnte parallele elektrisch isolierte Platten im Abstand d sind mit den Flächenladungsdichten $+\varrho_\mathrm{s}$ beziehungsweise $-\varrho_\mathrm{s}$ geladen und besitzen die spezifische Masse pro Fläche $m/A = \kappa$. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird eine Platte losgelassen, die andere verändert ihre Lage nicht. Zu welchem Zeitpunkt stossen die Platten gegeneinander?

Aufgabe 3 (6 Punkte)

In einer Ebene sind N zueinander parallele gerade Drähte auf der Breite B gleichmäßig verteilt. Die Drähte können als infinitesimal dünn und unendlich lang angesehen werden. Sie werden vom gleichen Strom in der selben Richtung durchflossen. Der Gesamtstrom ist J. Wie lautet die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im gesamten freien Raum? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass N ungerade ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Vier dünne dielektrische (unendlich ausgedehnte) Platten sind, wie in Abbildung 1 dargestellt, angeordnet. Die Platten haben die gleiche Oberflächenladungsdichte ϱ_S und trennen den Raum in 9 Regionen.

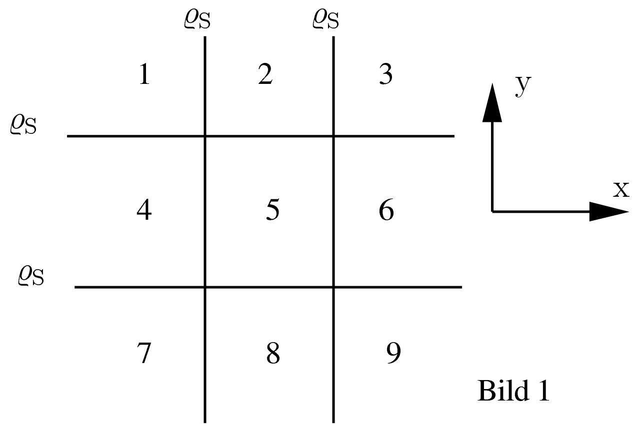

Abbildung 1: Elektrodenanordnung im freien Raum. Alle Elektroden tragen die gleiche Oberflächenladungsdichte ϱ_S.

Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ in allen 9 Regionen.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Über einer unendlich ausgedehnten mit ρ_s geladenen Fläche ist eine Ladung $+Q$ an einem Pendel der Länge l aufgehängt. Das gesamte System ist masselos und der Poyntingvektor kann vernachlässigt werden ($\vec{S} = 0$). Zum Zeitpunkt $t = t_0$ steht das Pendel waagrecht und bewegt sich nicht. Dann wird das Pendel losgelassen und schwingt nach oben. Wie gross ist die im ganzen Raum gespeicherte Energie des magnetischen Feldes $1/2 \iiint_V \vec{H}(\vec{r}) \circ \vec{B}(\vec{r}) \, \mathrm{d}^3 r$ zu dem Zeitpunkt, in dem die Ladung den höchsten Punkt passiert?

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Unter welchen Voraussetzungen ist das magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{A} = A_0 \sin\{hx\} \exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_z$$

eine Lösung der Wellengleichung in einem ladungs- und stromfreien Gebiet mit Materialkonstanten μ, ε? Welche Polarisationsform (linear, ...) hat die Welle?

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Drei unendlich ausgedehnte Drähte sind entlang der drei Koordinatenachsen x, y, z orientiert. Diese werden jeweils von den Strömen $I_1\vec{e}_x$, $I_2\vec{e}_y$, $I_3\vec{e}_z$ durchflossen.
Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im gesamten Raum.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Eine ebene Welle

$$\vec{E} = E_1 \exp\left\{i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\right\} \frac{a\vec{e}_\mathrm{y} + b\vec{e}_\mathrm{z}}{\sqrt{a^2 + b^2}} \; .$$

mit $\vec{k} = k_\mathrm{y}\vec{e}_y + k_\mathrm{z}\vec{e}_z$ fällt auf eine Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien mit $\mu_1 = \varepsilon_1 = 1$ auf der Seite der einfallenden Welle und μ_2 sowie ε_2 auf der Seite der transmittierten Welle. Die Koeffizienten k_y und k_z sind so gewählt, dass die Welle an der Grenzfläche nicht reflektiert wird. Wie ist die Welle gegenüber der Grenzfläche polarisiert? Wie gross ist die Amplitude E_2 der transmittierten Welle?

Aufgabe 9 (13 Punkte)

Eine ebene Welle fällt aus dem freien Raum unter dem Winkel $\theta = 60°$ (gemessen gegen die Flächennormale) auf die ebene Grenzfläche zu einem Medium mit den Parametern $\mu = 3$, $\varepsilon = 1$. Ihr elektrisches Feld ist parallel zur ladungs- und stromfreien Grenzfläche orientiert. Die Welle besitzt die Leistungsdichte $1\mathrm{W}/\mathrm{cm}^2$. Welche Leistungsdichte hat die transmittierte Welle?

Aufgabe 10 (7 Punkte)

Auf einer sphärischen Oberfläche (Radius a) ist eine Stromdichte wie folgt gegeben:

$$\vec{j}\{\theta,\phi,t\} = \frac{I}{a^2}\Big[(t^2\sin^2\{\theta\}\sin^2\{\phi\}\cos^2\{\phi\})\vec{e}_r + (t\sin\{\theta\} + t_0\cos^2\{\theta\}\cos^2\{\phi\})\vec{e}_\theta + (t\sin\{\theta\})\vec{e}_\phi \Big] \quad .$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich keine Ladung innerhalb der Kugel ($Q\{t = 0\} = 0$).
Geben Sie die Ladung innerhalb der Kugel $Q\{t\}$ als Funktion der Zeit an.
Hinweise:

$$\int \sin^n\{ax\}\cos\{ax\}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1}\{ax\}$$

$$\int \cos^n\{ax\}\sin\{ax\}\,\mathrm{d}x = \frac{-1}{a(n+1)}\cos^{n+1}\{ax\}$$

$$\int \sin^2\{ax\}\cos^2\{ax\}\,\mathrm{d}x = +\frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin\{4ax\}}{4a}\right)$$

$$n \geq 2: \quad \int \sin^n\{ax\}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sin^{n-1}\{ax\}\cos\{ax\}}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\{ax\}\,\mathrm{d}x$$

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Zwei parallel zueinander laufende gerade Metallstäbe mit Radius a sind an der Oberfläche mit $+\rho_\mathrm{s}$ beziehungsweise $-\rho_\mathrm{s}$ geladen. Die Stabachsen liegen bei $x = \pm b$, $y = 0$. Zwischen den Stäben herrscht das elektrische Feld

$$\vec{E} = \rho_\mathrm{s} a/\epsilon_0 \left(\frac{(x-b)\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y}}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{(x+b)\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y}}{(x+b)^2 + y^2} \right) \quad .$$

Berechnen Sie die Ladung pro Länge Q' auf dem positiv geladenen Stab. Berechnen Sie die Spannung U zwischen den Stäben und das Verhältnis $C' = Q'/U$.

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Ein ideales Quadrupol-Massenspektrometer besteht aus vier hyperbolischen Elektroden, die in z-Richtung unendlich ausgedehnt sind. In Abbildung 2 ist ein Schnitt durch die x-y-Ebene dargestellt. Die Gleichungen für die Elektrodenoberflächen 1 und 3 lauten $x \cdot y = a^2$, für 2 und 4 gilt $x \cdot y = -a^2$. An die Elektroden 1 und 3 liegt das Potenzial V_0 an, die Elektroden 2 und 4 sind auf dem Potenzial $-V_0$.
Berechnen Sie

- das Potenzial $V\{x, y, z\}$ zwischen den Elektroden (unter der Voraussetzung dass es zu xy proportional ist)
- das elektrische Feld $\vec{E}\{x, y, z\}$ zwischen den Elektroden
- die Oberflächenladungsdichte ϱ_S an den Grenzflächen der Elektroden als Funktion von x.

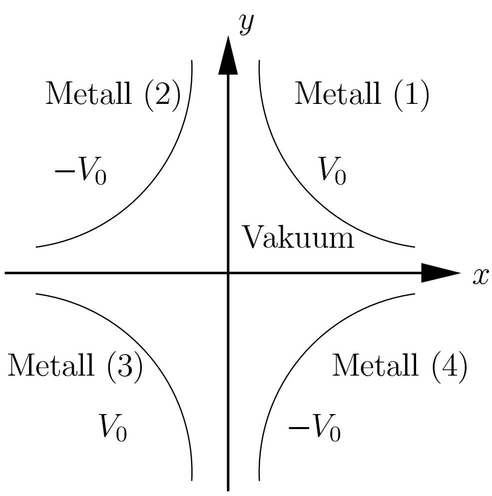

Abbildung 2: Elektrodenanordnung des Massenspektrometers.