Aufgabe 1

Ihr Laborteam hat ein Material entwickelt, das in reiner Form einen Brechungsindex von $n = 1.6$ besitzt (bei $\lambda = 500\,\mathrm{nm}$). Durch Dotierung des Materials ändert sich die Brechzahl so, dass $n = 1.6 + d \cdot 2 \cdot 10^{-18}\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{Atome}$ in Abhängigkeit der Dotierstoffkonzentration d (Einheit: $\mathrm{Atome}/\mathrm{cm}^3$) bei dieser Wellenlänge gilt.
Berechnen die Dotierstoffkonzentration d, die nötig ist, um bei Einfall der Welle aus dem Material unter $60°$ zur ebenen Oberfläche gegen Luft Totalreflexion zu erreichen.

Lösung zu Aufgabe 1

Weg:
a) Snellius Gesetz schreiben mit korrekten Winkeln
b) Bedingungen fur Totalreflexion
c) Berechnung des Brechungsindex fur den partikulären Fall
d) Berechnung der Dotierstoff-Konzentration

Lösung

a)
Das Snellius Gesetz lautet:

$$n_1 \sin\{\theta_1\} = n_2 \sin\{\theta_2\}$$

Luft hat den Index 1, und das neue Material 2, die Winkel in der Formel sind relativ zu der Oberflachennormalen.

b)
Der Winkel der Totalreflexion $\theta_{2\mathrm{tot}}$ ist gegeben wenn der maximale Winkel $\theta_1 = 90°$ erreicht ist. Für $\theta_2 > \theta_{2\mathrm{tot}}$ tritt Totalreflexion immer auf.

c)
In unserem Fall $\theta_{2\mathrm{tot}} = 90° - 60° = 30°$, $n_1 = 1$ und beim Winkel der Totalreflexion $\sin\{\theta_1\} = 1$, so dass aus dem Snellius Gesetz

$$1 \cdot 1 = n_2 \cdot \frac{1}{2} \Longrightarrow n_2 = 2$$

folgt.
d)

Fur unser Material folgt:

$$n = 1.6 + d \cdot 2 \cdot 10^{-18} \cdot \mathrm{cm}^3/\mathrm{Atome} = 2$$

und endlich

$$d = \frac{0.4}{2 \cdot 10^{-18} \cdot \mathrm{cm}^3/\mathrm{Atome}} = 2 \cdot 10^{17} \cdot \mathrm{Atome}/\mathrm{cm}^3 \quad .$$

Aufgabe 2

Zwei unendlich ausgedehnte parallele elektrisch isolierte Platten im Abstand d sind mit den Flächenladungsdichten $+\varrho_\mathrm{s}$ beziehungsweise $-\varrho_\mathrm{s}$ geladen und besitzen die spezifische Masse pro Fläche $m/A = \kappa$. Zum Zeitpunkt $t = t_0$ wird eine Platte losgelassen, die andere verändert ihre Lage nicht. Zu welchem Zeitpunkt stossen die Platten gegeneinander?

Lösung zu Aufgabe 2

Das elektrische Feld zwischen den Platten mit der Normale $\vec{n}$ kann als Überlagerung der Felder der einzelnen Platten dargestellt werden. Zur Lösung der Aufgabe muss die Kraft bestimmt werden, welche die frei bewegliche Platte beschleunigt. Jedes elektrische Feld übt auf elektrische Ladung Q eine Kraft, entsprechend dem Lorentzschen Kraftgesetz $\vec{F} = Q\vec{E}$. Das für diese Betrachtung maßgebliche elektrische Feld $\vec{E}$ darf jedoch keine Anteile aufweisen, die von der wechselwirkenden Ladung Q ausgehen. In anderen Worten: eine Ladung, wenn sie auch Quelle eines elektrischen Feldes ist, wirkt auf sich selbst keine Kraft aus. Deshalb ist es falsch wenn zur Ermittlung der Kraft auf die bewegliche Platte das Gesamtfeld in der Plattenanordnung herangezogen wird. Das von der unbeweglichen Platte ausgehende elektrische Feld ist:

$$\vec{E} = \frac{\varrho_\mathrm{s}}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

Die Bewegungsgleichung

$$m\, \partial^2\vec{r}/\partial^2 t = \vec{F}$$

kann damit durch das Flächenelement $\mathrm{d}^2 A$ mit $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}^2 A = \varrho_\mathrm{s}$ geteilt werden. Die Bewegungsgleichung formt sich zu

$$\kappa\, \partial^2\vec{r}/\partial^2 t = m/A\, \partial^2\vec{r}/\partial^2 t = \frac{\varrho_\mathrm{s}}{2\varepsilon_0}\vec{n}\varrho\mathrm{s}$$

um. Nach zweifacher Integration nach t folgt

$$\vec{r} = \frac{\varrho_\mathrm{s}^2}{2\varepsilon_0\kappa}\frac{(t-t_0)^2}{2}\vec{n}\ .$$

Aus der Randbedingung $\vec{r}\{t=0\} = 0$ folgt $t_0 = 0$ und

$$\vec{r} = d\vec{n} = \frac{\varrho_\mathrm{s}^2}{2\varepsilon_0\kappa}\frac{t^2}{2}\vec{n}$$

und $t = \sqrt{4\varepsilon_0\kappa d}/\varrho_\mathrm{s}$.

Aufgabe 3

In einer Ebene sind N zueinander parallele gerade Drähte auf der Breite B gleichmäßig verteilt. Die Drähte können als infinitesimal dünn und unendlich lang angesehen werden. Sie werden vom gleichen Strom in der selben Richtung durchflossen. Der Gesamtstrom ist J. Wie lautet die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im gesamten freien Raum? Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass N ungerade ist.

Lösung zu Aufgabe 3

Die Stromdichte ist eine Überlagerung aus den Stromdichten der einzelnen Drähte. Wird das Koordinatensystem so gewählt, dass alle Stromfäden in der x-y-Ebene symmetrisch zur y-Achse verteilt sind, resultiert

$$\vec{j} = \sum_{m=(1-N)/2}^{(N-1)/2} \vec{j}_m$$

mit

$$\vec{j}_m = I\delta\{x-x_m\}\delta\{y\}\vec{e}_z$$

und

$$x_m = m\frac{B}{N}\quad .$$

Ein einzelner Stromfaden hat das magnetische Feld

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi$$

wenn er im Ursprung liegt. Hier sind die Fäden auf der x-Achse verteilt, also muss eine andere Darstellung verwendet werden:

$$\vec{H}_m = \frac{I}{2\pi}\frac{(x-x_m)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x-x_m)^2+y^2} \quad .$$

Das Gesamtfeld ist dann einfach nur die Überlagerung der Einzelfelder

$$\vec{H} = \sum_{m=\frac{1-N}{2}}^{\frac{N-1}{2}} \frac{I}{2\pi}\frac{(x-x_m)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x-x_m)^2+y^2} \quad .$$

Aufgabe 4

Vier dünne dielektrische (unendlich ausgedehnte) Platten sind, wie in Abbildung 1 dargestellt, angeordnet. Die Platten haben die gleiche Oberflächenladungsdichte ϱ_S und trennen den Raum in 9 Regionen.

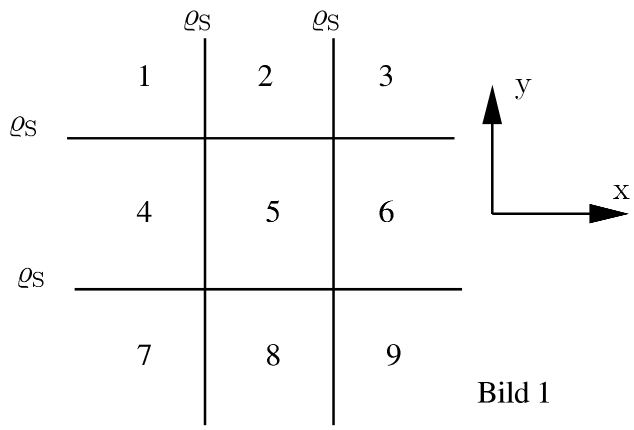

Abbildung 1: Elektrodenanordnung im freien Raum. Alle Elektroden tragen die gleiche Oberflächenladungsdichte ϱ_S.

Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ in allen 9 Regionen.

Lösung zu Aufgabe 4

a)
Das elektrische Feld $\vec{E}$, das von einer Platte generiert wird, ist einfach

$$\vec{E} = \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$

wobei $\hat{n}$ für die zwei Normalenvektoren auf die Plattenoberflächen steht.

b)
In den 9 Regionen hat man dann

$$\vec{E}_1 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_2 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_3 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{E}_4 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_5 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_6 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\vec{E}_7 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_8 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad \vec{E}_9 = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix};$$

Aufgabe 5

Über einer unendlich ausgedehnten mit ρ_s geladenen Fläche ist eine Ladung $+Q$ an einem Pendel der Länge l aufgehängt. Das gesamte System ist masselos und der Poyntingvektor kann vernachlässigt werden ($\vec{S} = 0$). Zum Zeitpunkt $t = t_0$ steht das Pendel waagrecht und bewegt sich nicht. Dann wird das Pendel losgelassen und schwingt nach oben. Wie gross ist die im ganzen Raum gespeicherte Energie des magnetischen Feldes $1/2 \iiint_V \vec{H}(\vec{r}) \circ \vec{B}(\vec{r})\ \mathrm{d}^3 r$ zu dem Zeitpunkt, in dem die Ladung den höchsten Punkt passiert?

Lösung zu Aufgabe 5

Die Aufgabenstellung verlangt, dass der Poyntingvektor vernachlässigbar ist. Nach der Definition ist $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}^*$. Durch die Bewegung der Ladung Q auf der Kreisbahn um die Pendelachse kann nur ein magnetisches Feld $\vec{H}$ entstehen, welches in Richtung der Pendelachse zeigt. Die Pendelachse steht senkrecht auf dem elektrischen Feld, welches von der geladenen Ebene ausgeht. Unter dieser Konstellation trägt jedes H-Feld zum Poyntingvektor bei, der jedoch Null sein soll, für das magnetisch Feld muss demnach gelten: $\vec{H} = 0$. Folglich ist die im H-Feld gespeicherte Energie Null.

Aufgabe 6

Unter welchen Voraussetzungen ist das magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{A} = A_0 \sin\{hx\} \exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_z$$

eine Lösung der Wellengleichung in einem ladungs- und stromfreien Gebiet mit Materialkonstanten μ, ε? Welche Polarisationsform (linear, ...) hat die Welle?

Lösung zu Aufgabe 6

Die Überprüfung, ob das angegebene Vektorpotenzial eine Lösung der homogenen Wellengleichung ist, erfolgt durch einfaches Einsetzen. Es resultiert

$$(h^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0)\vec{A} \stackrel{!}{=} 0 \quad ,$$

also die nicht triviale Lösung

$$h^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 = 0 \quad .$$

Für die Polarisation der Welle muss die elektrische Feldstärke bestimmt werden. Hier ist nur $\vec{A}$ und damit implizit $\vec{B} = \nabla\times\vec{A}$ bekannt. Zusätzlich kann noch $\nabla\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ herangezogen werden. Damit resultiert zunächst

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = \nabla\times(\frac{1}{\mu\mu_0}\nabla\times\vec{A}) = \frac{1}{\mu\mu_0}\nabla\times(\nabla\times\vec{A}) = \frac{1}{\mu\mu_0}\left(\nabla(\nabla\circ\vec{A}) - \Delta\vec{A}\right)$$

Es gilt

$$\nabla\circ\vec{A} = -i\beta\vec{A}\circ\vec{e}_z$$

$$\nabla(\nabla\circ\vec{A}) = -A_0\left(i\beta h\cos\{hx\}\vec{e}_x + \beta^2\sin\{hx\}\vec{e}_z\right)\exp\{i(\omega t - \beta z)\}$$

$$\Delta\vec{A} = -(h^2 + \beta^2)\vec{A} = -A_0(h^2 + \beta^2)\sin\{hx\}\exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_z$$

und damit

$$\nabla(\nabla\circ\vec{A}) - \Delta\vec{A} = -A_0\left(i\beta h\cos\{hx\}\vec{e}_x - h^2\sin\{hx\}\vec{e}_z\right)\exp\{i(\omega t - \beta z)\} \quad .$$

Die elektrische Feldstärke resultiert nach Zeitintegration zu

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= A_0 \frac{\omega h}{\mu\mu_0} \left(\beta \cos\{hx\}\vec{e}_x + ih \sin\{hx\}\vec{e}_z\right) \exp\{i(\omega t - \beta z)\} \\
&= A_0 \frac{\omega h}{2\mu\mu_0} \exp\{i(\omega t - \beta z)\} \\
&\quad \left(\beta \left(\exp\{ihx\} + \exp\{-ihx\}\right) \vec{e}_x + h \left(\exp\{ihx\} - \exp\{-ihx\}\right) \vec{e}_z\right) \\
&= A_0 \frac{\omega h}{2\mu\mu_0} \exp\{i(\omega t - \beta z)\} \\
&\quad \left((\beta\vec{e}_x + h\vec{e}_z) \exp\{ihx\} + (\beta\vec{e}_x - h\vec{e}_z) \exp\{-ihx\}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Hier handelt es sich offenbar um die Überlagerung von zwei ebenen Wellen. Die Amplituden in x- und y- Richtung sind je nach Kreisfrequenz und Größe von β und h im allgemeinen unterschiedlich groß und phasenverschoben. Die allgemeine Aussage wäre also: Die Wellen sind elliptisch polarisiert. Eine genauere Betrachtung ergibt für gegebenes h mit $k^2 = \omega^2 \varepsilon\varepsilon_0 \mu\mu_0$:

- $k^2 \leq h^2$: $\beta = \pm i\sqrt{h^2 - k^2} \Rightarrow$ elliptisch polarisiert. Wenn $h^2 = 2k^2$ ist, sind die Wellen zirkular polarisiert.
- $k^2 > h^2$: $\beta = \pm\sqrt{k^2 - h^2} \Rightarrow$ linear polarisiert.

Aufgabe 7

Drei unendlich ausgedehnte Drähte sind entlang der drei Koordinatenachsen x, y, z orientiert. Diese werden jeweils von den Strömen $I_1\vec{e}_x$, $I_2\vec{e}_y$, $I_3\vec{e}_z$ durchflossen.
Berechnen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ im gesamten Raum.

Lösung zu Aufgabe 7

Weg:
a) Induktion $\vec{B}$ für einen unendlich ausgedehnten Draht entlang der z Achse
b) Benutzen der Achs-Symmetrie für ähnliche Formeln relativ zu x und y
c) Superpositionsprinzip für die komplette Lösung

Lösung

a)
Induktion $\vec{B}$ für einen unendlich ausgedehnten Draht entlang der z- Achse

$$\vec{B}_3\{x, y, z\} = \frac{\mu_0 I_3}{2\pi(x^2 + y^2)}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

b)
Für eine unendlich ausgedehnten Draht entlang der y-Achse, mann kann einfach die Achsen tauschen: $x \longrightarrow z$, $y \longrightarrow x$, $z \longrightarrow y$. Es folgt:

$$\vec{B}_2\{x,y,z\} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi(z^2+x^2)}(-x\vec{e}_z + z\vec{e}_x)$$

und noch einmal, für einen unendlich ausgedehnten Draht entlang der x-Achse, Achsen tauschen: $x \longrightarrow z$, $y \longrightarrow z$, $z \longrightarrow x$:

$$\vec{B}_1\{x,y,z\} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(y^2+z^2)}(-z\vec{e}_y + y\vec{e}_z)$$

c) Superpositionsprinzip

$$\vec{B}\{x,y,z\} = \vec{B}_1\{x,y,z\} + \vec{B}_2\{x,y,z\} + \vec{B}_3\{x,y,z\}.$$

Aufgabe 8

Eine ebene Welle

$$\vec{E} = E_1 \exp\left\{i(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \frac{a\vec{e}_\mathrm{y} + b\vec{e}_\mathrm{z}}{\sqrt{a^2+b^2}} .$$

mit $\vec{k} = k_\mathrm{y}\vec{e}_y + k_\mathrm{z}\vec{e}_z$ fällt auf eine Grenzfläche zwischen zwei dielektrischen Medien mit $\mu_1 = \varepsilon_1 = 1$ auf der Seite der einfallenden Welle und μ_2 sowie ε_2 auf der Seite der transmittierten Welle. Die Koeffizienten k_y und k_z sind so gewählt, dass die Welle an der Grenzfläche nicht reflektiert wird. Wie ist die Welle gegenüber der Grenzfläche polarisiert? Wie gross ist die Amplitude E_2 der transmittierten Welle?

Lösung zu Aufgabe 8

Für die gegebene ebene harmonische Welle gilt $\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B}$. Die Auswertung des Kreuzprodukts liefert $\vec{B} = B_x \cdot \vec{e}_x$ und damit gilt $\vec{B}\circ\vec{n} = \vec{B}\circ\vec{e}_z = 0$. Die Welle ist also entsprechend der Definition TM-polarisiert gegenüber der Grenzfläche. Das magnetische Feld kann über den Feldwellenwiderstand $Z = \sqrt{(\mu\mu_0)/(\varepsilon\varepsilon_0)}$ berechnet werden: $H_1 = E_1/Z_1 = E_1\sqrt{(\varepsilon_1\varepsilon_0)/(\mu_1\mu_0)}$.

An der Grenzfläche gilt für das magnetische Feld $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_\mathrm{s}$. Fließt kein Strom in der Grenzfläche, so muss das transversale magnetische Feld stetig sein. Dieses Feld ist über $\vec{B}_1 = B_{1x} \cdot \vec{e}_x = \mu\mu_0 \vec{H}_1$ verknüpft und so muss gelten $\vec{H}_1 = H_{1x}\vec{e}_x$ und damit $\vec{H}_2 = \vec{H}_1$. Auf der Seite der transmittierten Welle gilt umgekehrt $E_2 = H_2 Z_2 = H_2\sqrt{(\mu_2\mu_0)/(\varepsilon_2\varepsilon_0)} = E_1\sqrt{(\varepsilon_1\mu_2)/(\varepsilon_2\mu_1)}$.

Aufgabe 9

Eine ebene Welle fällt aus dem freien Raum unter dem Winkel $\theta = 60°$ (gemessen gegen die Flächennormale) auf die ebene Grenzfläche zu einem Medium mit den Parametern $\mu = 3$, $\varepsilon = 1$. Ihr elektrisches Feld ist parallel zur ladungs- und stromfreien Grenzfläche orientiert. Die Welle besitzt die Leistungsdichte $1\mathrm{W/cm}^2$. Welche Leistungsdichte hat die transmittierte Welle?

Lösung zu Aufgabe 9

Das elektrische Feld ist parallel zur Grenzfläche orientiert, also handelt es sich um eine TE-Welle. Die Leistungsdichte der transmittierten Welle ist

$$S_\mathrm{tr} = T S_\mathrm{in}$$

mit

$$T = 1 - R$$

wobei

$$R = |r|^2$$

zu verwenden sind. Der Reflexionsfaktor der TE-Welle lautet

$$r_\mathrm{TE} = \frac{\vec{n} \circ (\frac{\vec{k}_\mathrm{in}}{\mu_\mathrm{in}} - \frac{\vec{k}_\mathrm{tr}}{\mu_\mathrm{tr}})}{\vec{n} \circ (\frac{\vec{k}_\mathrm{in}}{\mu_\mathrm{in}} + \frac{\vec{k}_\mathrm{tr}}{\mu_\mathrm{tr}})} \quad .$$

Hier ist

$$\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{in} = k_0 \sin\{\theta\} = \frac{1}{2}k_0$$

und entsprechend

$$\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{in} = \sqrt{k_\mathrm{tr}^2 - k_\mathrm{in}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{in})^2} = \frac{3}{2}k_0$$

mit $k_\mathrm{tr}^2 = k_0^2\varepsilon_2\mu_2 = 3k_0^2$. Einsetzen liefert $r_\mathrm{TE} = 0$ und damit $T = 1$, also

$$S_\mathrm{tr} = 1\,\mathrm{W/cm}^2 \quad .$$

Aufgabe 10

Auf einer sphärischen Oberfläche (Radius a) ist eine Stromdichte wie folgt gegeben:

$$\begin{aligned}\vec{j}\{\theta,\phi,t\} &= \frac{I}{a^2}\Big[(t^2\sin^2\{\theta\}\sin^2\{\phi\}\cos^2\{\phi\})\vec{e}_r + (t\sin\{\theta\} + t_0\cos^2\{\theta\}\cos^2\{\phi\})\vec{e}_\theta + \\ &\quad (t\sin\{\theta\})\vec{e}_\phi\Big] \quad .\end{aligned}$$

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sich keine Ladung innerhalb der Kugel ($Q\{t=0\} = 0$).
Geben Sie die Ladung innerhalb der Kugel $Q\{t\}$ als Funktion der Zeit an.

Hinweise:

$$\begin{aligned}\int \sin^n\{ax\}\cos\{ax\}\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a(n+1)}\sin^{n+1}\{ax\} \\ \int \cos^n\{ax\}\sin\{ax\}\,\mathrm{d}x &= \frac{-1}{a(n+1)}\cos^{n+1}\{ax\} \\ \int \sin^2\{ax\}\cos^2\{ax\}\,\mathrm{d}x &= +\frac{1}{8}\left(x - \frac{\sin\{4ax\}}{4a}\right) \\ n \geq 2: \qquad \int \sin^n\{ax\}\,\mathrm{d}x &= -\frac{\sin^{n-1}\{ax\}\cos\{ax\}}{na} + \frac{n-1}{n}\int \sin^{n-2}\{ax\}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 10

Weg

a) Schreiben die Kontinuitätsgleichung

b) Integration des Kontinuitätsgleichung mittels des Gauss Theorems in Kugelkoordinaten

c) Lösung der Integrale

Lösung

a)

Die Kontinuitätsgleichung lautet

$$\frac{\partial \varrho_{\mathrm{v}}}{\partial t} = -\nabla \circ \vec{j}$$

b)

Diese Gleichung wird über das Volumen der Kugel mit Radius a integriert:

$$\iiint\limits_{\text{Kugel}} \frac{\partial \varrho_{\mathrm{v}}}{\partial t}\mathrm{d}^3r = -\iiint\limits_{\text{Kugel}} \nabla \circ \vec{j}\,\mathrm{d}^3r$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_{\text{Kugel}} \varrho_{\text{v}}\,\mathrm{d}^3r = -\iiint\limits_{\text{Kugel}} \nabla\circ\vec{j}\,\mathrm{d}^3r$$

Das erste Integral ist einfach die Ladung $Q\{t\}$ innerhalb des Kugel und es folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -\iiint\limits_{\text{Kugel}} \nabla\circ\vec{j}\,\mathrm{d}^3r \quad .$$

Die rechte Seite der Gleichung kann mit Hilfe des Gauß-Theorems in ein Oberflächenintegral verwandelt werden; $\vec{n}$ ist der Normalenvektor auf die Kugeloberfläche:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -\oiint\limits_{\text{Kugel}} \vec{j}\circ\mathrm{d}^2\vec{r} \quad .$$

In Kugelkoordinaten gilt $\mathrm{d}^2\vec{r} = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\phi\vec{e}_{\text{r}}$

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\vec{j}\circ\vec{e}_{\text{r}})a^2\sin\{\theta\}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi \quad .$$

In unserem Fall zählt nur die $\vec{e}_{\text{r}}$ Komponente von $\vec{j}$:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{I}{a^2}\left[(t^2\sin^2\{\theta\}\sin^2\{\phi\}\cos^2\{\phi\})\right]a^2\sin\{\theta\}\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\phi$$

c) Erste Integration in ϕ:

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -I\frac{\pi}{4}\int_0^{\pi} t^2\sin^3\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta$$

und dann in θ

$$\frac{\partial}{\partial t}Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -I\frac{\pi}{3}t^2 \quad .$$

Integration in t mit $Q_{\text{Kugel}}\{t=0\} = 0$

$$Q_{\text{Kugel}}\{t\} = -I\frac{\pi}{9}t^3 \quad .$$

Aufgabe 11

Zwei parallel zueinander laufende gerade Metallstäbe mit Radius a sind an der Oberfläche mit $+\rho_\mathrm{s}$ beziehungsweise $-\rho_\mathrm{s}$ geladen. Die Stabachsen liegen bei $x = \pm b$, $y = 0$. Zwischen den Stäben herrscht das elektrische Feld

$$\vec{E} = \rho_\mathrm{s} a/\epsilon_0 \left(\frac{(x-b)\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y}}{(x-b)^2 + y^2} - \frac{(x+b)\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y}}{(x+b)^2 + y^2} \right) .$$

Berechnen Sie die Ladung pro Länge Q' auf dem positiv geladenen Stab. Berechnen Sie die Spannung U zwischen den Stäben und das Verhältnis $C' = Q'/U$.

Lösung zu Aufgabe 11

Die Ladung ∂Q pro Längeneinheit ∂z auf dem positiv geladenen Stab ist

$$\begin{aligned} Q' &= \tfrac{\partial Q}{\partial z} \\ &= \textstyle\iiint \rho_\mathrm{v}\, \mathrm{d}^3 r/(\partial z) \\ &= \textstyle\int_{l=0}^{\partial z} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\varrho=0}^{\infty} \varrho_\mathrm{s} \delta\left\{\varrho - a\right\} \varrho \, \mathrm{d}\varrho \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}z/(\partial z) \\ &= 2\pi a \varrho_\mathrm{s} \ . \end{aligned}$$

Der Potenzialunterschied zwischen den Stäben ist $-\int \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{l}$. Das Linienelement $\mathrm{d}\vec{l}$ kann in einem günstigen Fall auf eine Symmetrie- und Koordinatenachse gelegt werden, hier ist dies die x-Achse mit $y = z = 0$. Durch diesen Schritt vereinfacht sich das Linienelement zu $\vec{e}_x\ \mathrm{d}x$ und es folgt

$$\begin{aligned} U = V\{x = b-a\} - V\{x = a-b\} &= -\textstyle\int_{x=a-b}^{b-a} \frac{\varrho_\mathrm{s} a}{\varepsilon_0} \left(\frac{1}{x-b} - \frac{1}{x+b}\right) \vec{e}_x \circ \vec{e}_x \, \mathrm{d}x \\ &= -\tfrac{\varrho_\mathrm{s} a}{\varepsilon_0} \left(\ln\left\{\tfrac{-a}{a-2b}\right\} - \ln\left\{\tfrac{2b-a}{a}\right\}\right) \\ &= \tfrac{\varrho_\mathrm{s} a}{\varepsilon_0} \ln\left\{\left(\tfrac{2b-a}{a}\right)^2\right\} \\ &\overset{(2b-a)/a>0}{=} \tfrac{2\varrho_\mathrm{s} a}{\varepsilon_0} \ln\left\{\tfrac{2b-a}{a}\right\} \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Kapazität der Anordnung $C' = Q'/U = \varepsilon_0 \pi / \ln\{(2b-a)/a\}$.

Aufgabe 12

Ein ideales Quadrupol-Massenspektrometer besteht aus vier hyperbolischen Elektroden, die in z-Richtung unendlich ausgedehnt sind. In Abbildung 2 ist ein Schnitt durch die x-y-Ebene

dargestellt. Die Gleichungen für die Elektrodenoberflächen 1 und 3 lauten $x \cdot y = a^2$, für 2 und 4 gilt $x \cdot y = -a^2$. An die Elektroden 1 und 3 liegt das Potenzial V_0 an, die Elektroden 2 und 4 sind auf dem Potenzial $-V_0$.
Berechnen Sie

- das Potenzial $V\{x, y, z\}$ zwischen den Elektroden (unter der Voraussetzung dass es zu xy proportional ist)
- das elektrische Feld $\vec{E}\{x, y, z\}$ zwischen den Elektroden
- die Oberflächenladungsdichte ϱ_S an den Grenzflächen der Elektroden als Funktion von x.

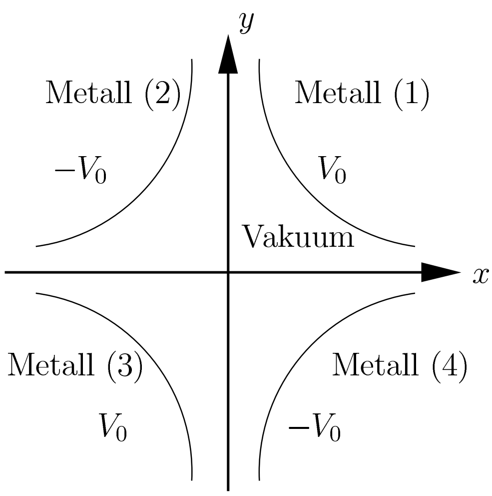

Abbildung 2: Elektrodenanordnung des Massenspektrometers.

Lösung zu Aufgabe 12

Weg:
a) Finde die Konstanten c, so dass $V\{x, y, z\} = c \cdot xy$
b) Berechnen des elektrischen Feldes $\vec{E}\{x, y, z\}$ zwischen den Elektroden aus dem Potenzial
c) Berechnen der Oberflächenladungsdichte ϱ_S an den Grenzflächen der Elektroden als Funktion von x.

Lösung

a)
$V\{x,y,z\} = c\cdot x\cdot y$: für die Elektroden 1 und 3 gilt $x\cdot y = a^2$ und an den Elekrodenoberflächen $V_{\mathrm{El1,3}} = c\cdot a^2 = V_0$, also

$$c = \frac{V_0}{a^2} \Longrightarrow V\{x,y,z\} = \frac{V_0}{a^2}\cdot x\cdot y \quad .$$

Das ist die vollständige Lösung, weil $V_{\mathrm{El2,4}} = -c\cdot a^2 = -V_0$ auf den Elektroden 2 und 4 ebenfalls erfüllt ist (Dirichlet-Randbedingung).

b)
Für das elektrische Feld zwischen den Elektroden gilt

$$\vec{E}\{x,y,z\} = -\nabla V\{x,y,z\}$$

$$\vec{E}\{x,y,z\} = -\frac{V_0}{a^2}\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \quad .$$

Das elektrische Feld ist immer normal zu den Elektrodenoberflächen und es zeigt in das Vakuum für die Elektroden 1 und 3 (Richtung $\vec{n}$). Es zeigt zu den Metallelektroden für die Elektroden 2 und 4 (Richtung $-\vec{n}$).
c)
Auf einer metallischen Oberfläche entsteht das Feld

$$\vec{E} = \frac{\varrho_{\mathrm{S}}}{\varepsilon_0}\vec{n}$$

so dass in unserem Fall das Feld auf den Elektroden 1,3

$$\vec{E}\{x,y,z\} = -\frac{V_0}{a^2}\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = \frac{a^2}{x} \Longrightarrow \vec{E}_{1,3} = -\frac{V_0}{a^2}\begin{pmatrix} \frac{a^2}{x} \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{V_0}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}}\vec{n}$$

ist, und man erhält

$$\varrho_{\mathrm{S1,3}} = \varepsilon_0\frac{V_0}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}} \quad .$$

Entsprechend für die Elekroden 2,4:

$$\vec{E}\{x,y,z\} = -\frac{V_0}{a^2}\begin{pmatrix} y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow y = -\frac{a^2}{x} \Longrightarrow \vec{E}_{2,4} = -\frac{V_0}{a^2}\begin{pmatrix} -\frac{a^2}{x} \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = -\frac{V_0}{a}\sqrt{\frac{a^2}{x^2}+\frac{x^2}{a^2}}\vec{n}$$

und endlich

$$\varrho_{\mathrm{S}2,4} = -\varepsilon_0 \frac{V_0}{a} \sqrt{\frac{a^2}{x^2} + \frac{x^2}{a^2}} \quad .$$