Aufgabe 1

Eine Welle werde durch $\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - ay + bz)\}\vec{e}_x$ beschrieben. Wie müssen a und b gewählt werden, damit alle Maxwellgleichungen in einem Medium mit ε und μ erfüllt sind?

Lösung zu Aufgabe 1

Die Maxwellgleichungen sind erfüllt, wenn die Wellengleichung

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{H} = 0$$

erfüllt ist. Diese erfordert, dass die Dispersionsrelation

$$-a^2 - b^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0$$

gilt.

Aufgabe 2

In einem Raumgebiet wird die magnetische Feldstärke $\vec{H} = H_0(\sin\{by\}\vec{e}_x + \cos\{by\}\vec{e}_y)$ gemessen. Welche Stromdichteverteilung hat das Feld hervorgerufen?

Lösung zu Aufgabe 2

Stromdiche und magnetische Feldstärke hängen über das Amperesche Gesetz

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}$$

zusammen. Hier handelt es sich um ein statisches Feld und damit entfällt der Verschiebungsstrom. Es resultiert

$$\vec{j} = H_0\left(\frac{\partial}{\partial y}\sin\{by\}\right)\vec{e}_y = -H_0 b\cos\{by\}\vec{e}_y = \qquad .$$

Aufgabe 3

Eine dünne metallische Kreisscheibe mit Radius R liegt in der Ebene $z = 0$. Sie rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um ihre Achse und befindet sich in einem achsparallelen homogenen Magnetfeld $\vec{B} = B_0\vec{e}_z$, wie in Abb. 1 skizziert ist. Sammeln sich die Elektronen auf dem Rand oder an der Achse der Scheibe? Welche elektrische Spannung wird zwischen Scheibenrand und -achse im Gleichgewicht induziert?

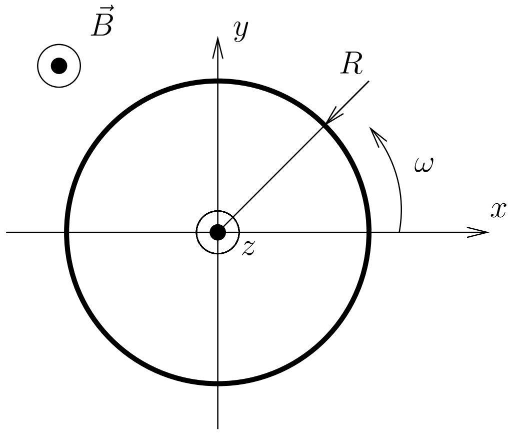

Abbildung 1: Schematische Darstellung der Kreisscheibe.

Lösung zu Aufgabe 3

Der magnetische Anteil zur Lorentzkraft

$$\begin{aligned}\vec{F}_{\mathrm{L}} &= q(\vec{v} \times \vec{B}) \\ &= q\omega\rho\vec{e}_\varphi \times (B_0\vec{e}_z) \\ &= q\omega\rho B_0\vec{e}_\rho\end{aligned}$$

mit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega\vec{e}_z) \times (\varrho\vec{e}_\varrho) = \omega\varrho\vec{e}_z \times \vec{e}_\varrho = \omega\varrho\vec{e}_\varphi$. Die auf positive Ladung ausgeübte Kraft zeigt in $\vec{e}_\varrho$-Richtung, also von der Achse weg. Elektronen sind negativ geladen, die Kraft auf sie wirkt zur Achse hin. Für das elektrische Feld gilt:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{F}/q \\ &= -\omega\varrho B_0\vec{e}_\varrho\end{aligned}$$

und für das Potential gilt

$$\begin{aligned} U &= -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{l} \\ &= -\int_0^R -\omega \varrho B_0 \vec{e}_\varrho \circ \vec{e}_\varrho \, \mathrm{d}\varrho \\ &= \omega B_0 \int_0^R \varrho \, \mathrm{d}\varrho = \omega B_0 R^2/2 \ . \end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die Grenzfläche zwischen zwei homogenen dielektrischen unmagnetischen Medien ist eben. Ihre Brechzahlen sind n_1 und n_2. Aus Medium 1 fällt eine ebene Welle unter dem Winkel θ_{in} gegen die Flächennormale auf die Grenzfläche. Wie lauten die Wellenzahlvektoren der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle?

Lösung zu Aufgabe 4

Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle kann aus den geometrischen Daten zusammen mit der Frequenz und den Materialdaten ermittelt werden. Frequenz der Welle und Materialdaten des Mediums ergeben die Wellenzahl $k = nk_0$ im Medium mit $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}$ und $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$. Sei die Grenzfläche bei $y = \mathrm{const.}$, also $\vec{n} = \pm\vec{e}_y$ und die x- Achse so gewählt, dass

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = n_1 k_0 (\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_x + \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_y)$$

gilt. Aus den Stetigkeitsbedingungen für $\vec{k}$ an einer Grenzfläche resultiert direkt die Wellenzahl der reflektierten Welle zu

$$\vec{k}_{\mathrm{ref}} = n_1 k_0 (\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_x - \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_y) \quad .$$

Die Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle ist

$$(\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}) \times \vec{n} = n_1 k_0 \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_x \quad .$$

Die Normalkomponente folgt aus der Dispersionsrelation zu

$$(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}})\vec{n} = k_0 \sqrt{n_2^2 - n_1^2 \cos^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}\vec{e}_y \quad .$$

Aufgabe 5

In einen magnetfeldfreien Raumgebiet existiert ein statisches elektrisches Feld $\vec{E}$. Die Komponenten E_x und E_y werden beschrieben durch

$$E_x = A \cdot y, \qquad E_y = A \cdot x$$

Von welchen Variablen hängt E_z ab?

Lösung zu Aufgabe 5

Es gilt

$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

und es folgt

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{e}_z \\ &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{e}_y = 0 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial y} E_z = 0 \quad , \frac{\partial}{\partial x} E_z = 0 \quad ,$$

was bedeutet

$$E_z = f\{z\} \quad .$$

Aufgabe 6

Zwei Punktladungen mit identischer Ladung Q und Masse m sind an zwei Fäden der Länge l wie in der Skizze dargestellt aufgehängt. Die Fäden sind masselos. Die Anordnung ist der Erdanziehung mit der Fallbeschleunigung g ausgesetzt. Welcher (kleine) Winkel α stellt sich zwischen einem Faden und der Senkrechten ein?
Hinweis: Für kleine Argumente $|x| \ll 1$ gilt vereinfacht: $1 - \cos\{x\} \approx x^2/2$ sowie $\sin\{x\} \approx x$

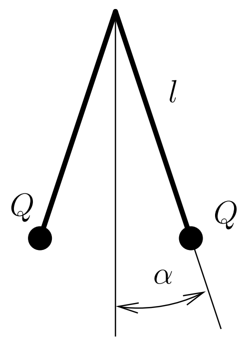

Abbildung 2: Schematische Darstellung des Fadenpendels.

Lösung zu Aufgabe 6

Es wird ein Koordinatensystem angenommen, in welchem die Ladungen und der gemeinsame Aufhängepunkt in der $x-z$-Ebene liegen. Die resultierenden Käfte müssen in jedem Punkt verschwinden: $\sum \vec{F}_i = 0$. Die an einer Ladung angreifenden Kräfte sind die Gewichtskraft $F_\mathrm{G} = -mg\vec{e}_z$, die Coulombkraft $\vec{F}_\mathrm{C} = Q^2/(4\pi\varepsilon_0)\ \vec{e}_x/(2x)^2$ mit $2x = 2l\sin\{\alpha\}$ dem Abstand der Ladungen und die Kraft, welche der Faden auf die Ladung einleitet. Ferner muss die Summe der rechts- und linksdrehenden Momemente ausgeglichen sein: $\sum \vec{M}_i = 0$ mit $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$. Betrachtet man den Aufhängepunkt des Fadens als Drehpunkt, so ruft die Gewichtskraft die an der Masse angreift ein Moment von $\vec{M}_\mathrm{G} = \vec{r} \times \vec{F}_\mathrm{G} = l\sin\{\alpha\}\,\vec{e}_x \times (-mg\vec{e}_z) = mgl\sin\{\alpha\}\vec{e}_y$ hervor. Die Coulombkraft bewirkt ein Moment: $\vec{M}_\mathrm{C} = \vec{r} \times \vec{F}_\mathrm{C} = (-l\cos\{\alpha\}\vec{e}_z) \times (Q^2/(2\pi\varepsilon_0\vec{e}_x/(2x)^2)) = -Q^2 l\cos\{\alpha\}\vec{e}_y/(16\pi\varepsilon_0 x^2)$. Der Faden, an dem die Ladung aufgehängt ist, überträgt kein Moment, da das Kreuzprodukt aus Ortsvektor und Fadenkraft $\vec{F}_\mathrm{F}$ verschwindet: $\vec{r} \times \vec{F}_\mathrm{F} = 0$.
Aus $\vec{M}_\mathrm{C} + \vec{M}_\mathrm{G} = 0$ folgt $\sin^3\{\alpha\} = Q^2\cos\{\alpha\}/(16\pi\varepsilon_0 l^2 mg)$.
Im genäherten Fall $\alpha \ll 1$ folgt $\alpha \approx \left(Q^2/(16\pi\varepsilon_0 l^2 mg)\right)^{(1/3)}$.

Aufgabe 7

Beim Schweißen wird kurzzeitig ein Lichtbogen mit Stromdichte $\vec{j} = j_0 \exp\left\{i\omega t - \frac{x^2+y^2}{R^2}\right\} \vec{e}_z$ gezündet. Das Plasma, dass den Lichtbogen trägt, habe die Leitfähigkeit σ. Wie lautet das induzierte Magnetfeld im Bereich des Lichtbogens?

Lösung zu Aufgabe 7

Das zeitabhängige magnetische Feld kann direkt aus dem elektrischen Feld mit

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

berechnet werden. Das elektrische Feld seinerseits hängt über das mikroskopische Ohmsche Gesetz $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ mit der Stromdichte zusammen. Folglich gilt

$$-\sigma \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} = \nabla \times \vec{j} = J_0 \exp\{i\omega t\} \exp\{-\frac{x^2+y^2}{R^2}\} \left(-\frac{2y}{R^2}\vec{e}_x + \frac{2x}{R^2}\vec{e}_y\right)$$

und weiter nach Integration

$$\vec{B} = iJ_0 \frac{2}{\omega\sigma R^2} (-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \exp\{-\frac{x^2+y^2}{R^2}\} \exp\{i\omega t\} \quad .$$

Umrechnung auf Zylinderkoordinaten (nicht gefordert):

$$\begin{aligned} \vec{e}_x &= \cos\{\phi\}\vec{e}_\rho - \sin\{\phi\}\vec{e}_\phi \quad x = \rho\cos\{\phi\} \\ \vec{e}_y &= \sin\{\phi\}\vec{e}_\rho + \cos\{\phi\}\vec{e}_\phi \quad y = \rho\sin\{\phi\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y\vec{e}_x &= \rho\sin\{\phi\}\cos\{\phi\}\vec{e}_\rho - \rho\sin^2\{\phi\}\vec{e}_\phi \\ x\vec{e}_y &= \rho\cos\{\phi\}\sin\{\phi\}\vec{e}_\rho + \rho\cos^2\{\phi\}\vec{e}_\phi \end{aligned}$$

$$y\vec{e}_x - x\vec{e}_y = \rho\vec{e}_\phi$$

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} = iJ_0 \frac{2}{\omega\sigma R}\frac{\rho}{R} \exp\{-\frac{x^2+y^2}{R^2}\} \exp\{i\omega t\}\vec{e}_\phi \quad .$$

Aufgabe 8

Zwei identische gerade Elektronenstrahlen mit vernachlässigbarem Querschnitt propagieren im Vakuum parallel zueinander im Abstand D. Jeder Strahl stellt einen Strom I dar und besitzt eine konstante lineare Ladungsträgerdichte ϱ_L.
Mit welcher Geschwindigkeit müssen sich die Elektronen bewegen, damit die elektrischen und magnetischen Kräfte im Gleichgewicht sind? (Annahme: Alle Elektronen besitzen die gleiche Geschwindigkeit)

Lösung zu Aufgabe 8

Es ist einfach zu beweisen, dass die elektrische und magnetische Kraft einander entgegengesetzt wirken. Es ist also gefragt

$$|\vec{F}_{\mathrm{el}}| = |\vec{F}_{\mathrm{mag}}|$$

Für eine Elektron gilt

$$\vec{F}_{\mathrm{el}} = e\vec{E} \qquad \text{und} \qquad \vec{F}_{\mathrm{mag}} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Es ist klar, dass die Elektronen in Strahl 1 nur das von Strahl 2 generierte Feld spüren. Das Feld von Strahl 1 wirkt aus Symmetriegründen nicht auf die Elektronen in Strahl 1.
Die Feldintensität, die nur von einem Strahl im Abstand D generiert wird, ist dann einfach

$$E = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0 D} \qquad \text{und} \qquad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi D} = \frac{\mu_0 \varrho_{\mathrm{L}} v}{2\pi D} \qquad \text{weil} \qquad I = \varrho_{\mathrm{L}} v$$

Die Richtung von $\vec{B}$ ist senkrecht zu $\vec{v}$ und zu $\vec{E}$ und es folgt

$$|\vec{F}_{\mathrm{el}}| = |\vec{F}_{\mathrm{mag}}| \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{e\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0 D} = \frac{e\mu_0\varrho_{\mathrm{L}} v^2}{2\pi D} \qquad \Longrightarrow \qquad v = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}} = c.$$

Es ist hier wichtig zu bemerken, dass für grosse Geschwindigkeit eigentlich relativistische Formeln notwendig sind.

Aufgabe 9

Berechnen Sie das skalare elektrische Potential auf der z-Achse, welches von einer homogen mit insgesamt Q geladenen dünnen Kreisscheibe mit Radius a erzeugt wird. Die Achse der Scheibe liegt parallel zur z-Achse, der Schwerpunkt der Scheibe liegt im Koordinatenursprung. Das zu bestimmende Potential soll so normiert sein, dass es für unendlich vom Ursprung entfernte Punkte verschwindet.

Lösung zu Aufgabe 9

Die Ladung kann durch $\varrho_\mathrm{V} = \varrho_\mathrm{S0}\delta\{z\}$ im Bereich $0 \leq \varrho \leq a$ beschrieben werden. Aus der Gesamtladung $Q = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \varrho_\mathrm{V}\,\mathrm{d}^3 r = \pi a^2 \varrho_\mathrm{S0}$ folgt $\varrho_\mathrm{S0} = Q/(\pi a^2)$. Das Potential bestimmt sich aus dem Coulombintegral

$$\begin{aligned} V\{\vec{r}\} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_\mathrm{V}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3 r' \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S0}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{z=-\infty}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\varrho'=0}^{a} \frac{\delta\{z\}}{\sqrt{\varrho^2+\varrho'^2-2\varrho\varrho'\cos\{\varphi'\}+(z-z')^2}}\,\varrho'\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}\varphi'\mathrm{d}z'\ . \end{aligned}$$

Nach Integration über z' und unter der Annahme, dass nur Punkte auf der z-Achse untersucht werden sollen ($\varrho = 0$), vereinfacht sich das Integral zu

$$\begin{aligned} V\{z,\varrho=0\} &= \frac{\varrho_\mathrm{S0}}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\varrho'=0}^{a}\frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2+z^2}}\,\mathrm{d}\varrho'\mathrm{d}\varphi' \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S0}}{2\varepsilon_0}\int_{\varrho'=0}^{a}\frac{\varrho'}{\sqrt{\varrho'^2+z^2}}\,\mathrm{d}\varrho' \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S0}}{2\varepsilon_0}\left[\sqrt{\varrho'^2+z^2}\right]_{\varrho'=0}^{a} \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S0}}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{\varrho'^2+z^2}-|z|\right) \\ &= \frac{Q}{2\pi a^2\varepsilon_0}\left(\sqrt{\varrho'^2+z^2}-|z|\right) \qquad . \end{aligned}$$

Das ermittelte Potential erfüllt die Bedingung $\lim_{|z|\to\infty} V\{z\} = 0$.

Aufgabe 10

Die Ebene $z = a$ stellt die Grenzfläche zwischen zwei homogenen, ideal isolierenden, unmagnetischen Medien mit relativen Dielektrizitätszahlen ε_1 und ε_2 dar. Das Medium 1 sei im Bereich $z < a$. In den Medien werden ebene Wellen durch eine Flächenladung $\varrho_{\mathrm{S}}\{z = a\} = \varrho_{\mathrm{S0}} \exp\{i(\omega t - by)\}$ erzeugt, die von der Ebene weglaufen. Wie lauten die Wellenzahlvektoren der erzeugten Wellen?

Lösung zu Aufgabe 10

An der Grenzfläche müssen die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \varrho_{\mathrm{S}} \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt sein. Hier ist der Normalenvektor parallel zur z- Richtung und es wird gesetzt $\vec{n} = \vec{e}_z$. Weiterhin wird angenommen, dass sich ebene Wellen in den beiden Medien ausbilden. Der Ansatz für das elektrische Feld lautet wie üblich

$$\vec{E}_{1,2} = \hat{\vec{E}}_{1,2} \exp\{i(\omega t - \vec{k}_{1,2} \circ \vec{r})\} \quad .$$

Da die Normal- und Tangentialkomponenten einzeln betrachtet werden müssen, bietet sich die Darstellung

$$\begin{aligned} \hat{\vec{E}}_{1,2} &= \vec{E}_{\mathrm{tan}1,2} + \vec{E}_{\mathrm{n}1,2} \\ &= \vec{E}_{\mathrm{tan}1,2} + E_{\mathrm{n}1,2}\vec{e}_z \end{aligned}$$

an. Die Auswertung der Stetigkeitsbedingungen für $\vec{D}$ ergibt

$$\varepsilon_0 \left(\varepsilon_2 E_{\mathrm{n}2} \exp\{i(\omega t - \vec{k}_2 \circ \vec{r})\} - \varepsilon_1 E_{\mathrm{n}2} \exp\{i(\omega t - \vec{k}_1 \circ \vec{r})\} \right)\Big|_{z=a} = \varrho_{\mathrm{S0}} \exp\{i(\omega t - by)\} \quad .$$

Aus dem Vergleich der Argumente der e-Funktionen resultiert

$$\begin{aligned} k_{1,2x} &= 0 \\ k_{1,2y} &= b \quad . \end{aligned}$$

Die Normalkomponenten ergeben sich aus der Dispersionsrelation zu

$$\begin{aligned} k_{1z} &= -\sqrt{k_0^2 \varepsilon_1 - b^2} \\ k_{2z} &= \sqrt{k_0^2 \varepsilon_2 - b^2} \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 11

Ein Plattenkondensator besteht aus zwei parallel zueinander stehenden kreisrunden metallischen Platten mit Radius a bei $z = 0$ und $z = b$. Auf den Platten sind die Potentiale $V\{z = 0\} = V_0$ und $V\{z = b\} = 0$ eingeprägt. Zwischen den Platten befindet sich ein Dielektrikum mit ε und der Leitfähigkeit $\sigma = c_1\sigma_0/(z + b)^2$. Randfelder können vernachlässigt werden.
Welche Annahme kann über die Stromdichte $\vec{j}$ gemacht werden? Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$, die Stromdichte $\vec{j}$ und die Dichte freier Ladungen zwischen den Platten.

Lösung zu Aufgabe 11

Das auf den Platten eingeprägte Potential hat keine radiale Komponente: $\partial V/\partial x = \partial V\{z\}/\partial y = 0$. Wegen $\partial\sigma\{z\}/\partial x = \partial\sigma\{z\}/\partial y = 0$ kann angenommen werden $\vec{j} = j_z\{z\}\vec{e}_z$. Mit der Kontinuitätsgleichung $\nabla \circ \vec{j} = 0$ und den Symmetrien folgt aus $\frac{\partial}{\partial z} j_Z = 0$, dass $j_z\{z\} = j_0$ konstant sein muss. Daraus folgt $\vec{E} = j_0/\sigma\{z\}\,\vec{e}_z$. Das Potential ergibt sich aus

$$\begin{aligned} V\{z = b\} &= V\{z = 0\} - \int_{z=0}^{b} \vec{E} \circ \vec{e}_z \,\mathrm{d}z \\ &= 0 - j_0 \int_{z=0}^{b} \frac{(z+b)^2}{\sigma_0 c_1} \,\mathrm{d}z \\ &= -\frac{j_0}{\sigma_0 c_1}\left[\frac{(z+b)^3}{3}\right]_{z=0}^{b} \\ &= -\frac{j_0 b^3}{3\sigma_0 c_1}(8-1) \\ &= -\frac{7}{3}\frac{j_0 b^3}{\sigma_0 c_1} \\ &\overset{!}{=} V_0 \end{aligned}$$

und damit

$$j_0 = -\frac{3}{7}\frac{\sigma_0 c_1}{b^3} V_0.$$

Das elektrische Feld folgt aus dem Zusammenhang

$$\vec{E} = \vec{j}/\sigma\{z\} = -\frac{3}{7}\frac{(z+b)^2}{b^3} V_0 \vec{e}_z.$$

Aufgabe 12

Gegeben ist der in Abbildung 3 dargestellte quadratische Rohrquerschnitt. Im Rohr sei $V\{x,y\} = V_0 \sin\{Ax\}\cos\{By\}$. Welche Voraussetzung muss erfüllt sein, damit $V\{x,y\}$ eine Lösung der Laplacegleichung ist? Wie groß sind A und B? Wie lautet das Potential bei $y = -a$?

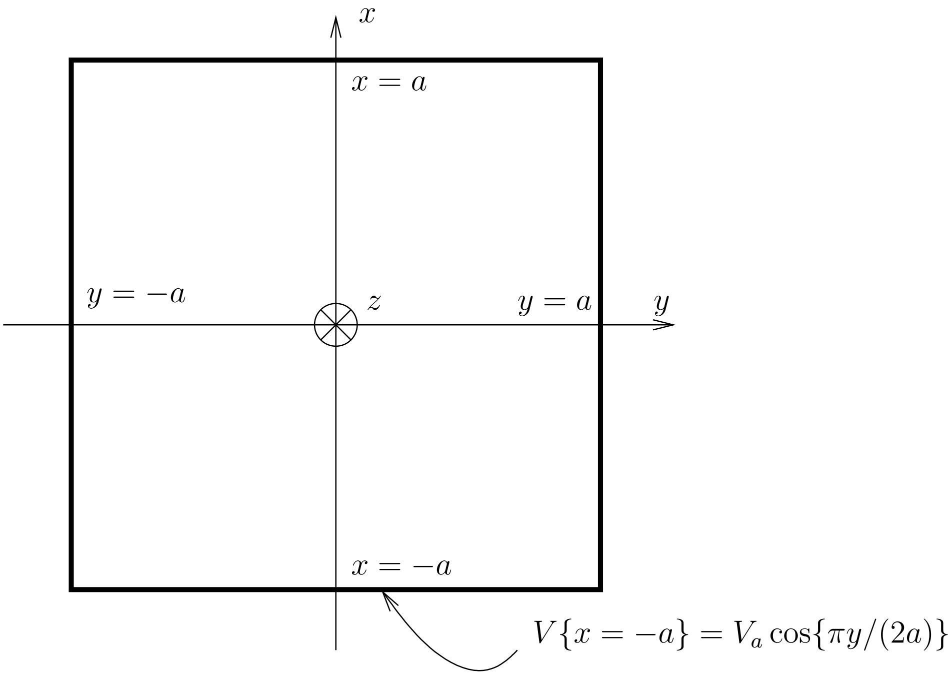

Abbildung 3: Schematische Darstellung des Rohrquerschnitts.

Lösung zu Aufgabe 12

Das gegebene Potential soll die für die zu bestimmenden Koeffizienten A und B die Laplacegleichung erfüllen:

$$\begin{aligned}\Delta V\{x,y\} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V \\ &= -(A^2+B^2)V \\ &\overset{!}{=} 0\end{aligned}$$

was auf die Koeffizientengleichung $A = \pm iB$ führt. An der Berandung $-a \le y \le a, x = -a$ ist das Potential vorgegeben: $V\{x = -a, -a \le y \le a\} = V_a \cos\{\pi y/(2a)\}$. Aus einem Koeffizientenvergleich folgt: $B = \pi/(2a)$ und somit $A = \pm iB = \pm i\pi/(2a)$. Das Gesamtpotential ist demnach $V\{x,y\} = V_0 \sin\{Ax\}\cos\{By\} = \pm iV_0 \sinh\{x\pi/(2a)\}\cos\{y\pi/(2a)\}$. Damit das Potential die Randbedingung bei $x = -a$ erfüllt, muß das negative Vorzeichen gelten. An der Berandung $y = -a$ ist somit $V\{y = -a\} = -iV_0 \sinh\{x\pi/(2a)\}\cos\{\pi/2\} = 0$.

Aufgabe 13

Eine ebene Welle fällt aus dem unmagnetischen homogenen Medium mit Brechzahl $n_1 = 2$ senkrecht auf die ebene Grenzfläche zum homogenen Medium mit $\varepsilon = 2$ und $\mu = 2$. Wie groß ist die Brechzahl des Mediums 2? Welche Größe haben die elektrische und magnetische Feldstärke $\vec{E}$ und $\vec{H}$ im angrenzenden Medium an der Grenzfläche?

Lösung zu Aufgabe 13

Die Brechzahl in Medium 2 ist

$$n_2 = \sqrt{\varepsilon_2 \mu_2} = 2 \quad .$$

Zur Berechnung der Feldstärken muss der Reflektionsfaktor der Wellen bestimmt werden. Wegen des senkrechten Einfalls ist die Welle bezüglich der Grenzfläche sowohl TE als auch TM, also TEM. Damit können beide Ansätze zur Berechnung der Reflektinonsfaktoren herangezogen werden. Hier wird abweichend vom üblichen Vorgehen einmal der TM-Ansatz verfolgt.
Wegen des senkrechten Einfalls gilt für alle beteiligten Wellen

$$\vec{n} \circ \vec{k} = k \quad .$$

Der Reflexionsfaktor ist also mit der relativen Dielektrizitätszahl in Medium 1 mit $\varepsilon_1 = \frac{n_1^2}{\mu_1} = 4$

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\frac{k_1}{\varepsilon_1} - \frac{k_2}{\varepsilon_2}}{\frac{k_1}{\varepsilon_1} + \frac{k_2}{\varepsilon_2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} - \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}}} = \frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1} = -\frac{1}{3} \quad .$$

Bei TM-Wellen werden die magnetischen Felder aller beteiligten Wellen parallel zueinander in gleicher Richtung angesetzt.
Sei die Ausbreitungsrichtung die z-Richtung und die magnetische Feldstärke der einfallenden Welle in x-Richtung. Damit ist

$$\vec{H}_{\mathrm{in}} = H\vec{e}_x, \quad \vec{H}_{\mathrm{ref}} = r_{\mathrm{TM}}\vec{H}_{\mathrm{in}} = -\frac{1}{3}H\vec{e}_x, \quad \vec{H}_{\mathrm{tr}} = 1 + r_{\mathrm{TM}})\vec{H}_{\mathrm{in}} = \frac{2}{3}H\vec{e}_x \quad .$$

Die elektrischen Felder ergeben sich aus

$$\vec{E} = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{H} \times \vec{k} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{k}\vec{H} \times \vec{k} = Z_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}\frac{1}{k}\vec{H} \times \vec{k}$$

mit $\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} = \frac{1}{n} = \frac{1}{2}$, $\vec{k}_{\text{in}} = 2k_0\vec{e}_z$, $\vec{k}_{\text{ref}} = -2k_0\vec{e}_z$, $\vec{k}_{\text{tr}} = k_0\vec{e}_z$ zu

$$\vec{E}_{\text{in}} = -\frac{1}{2}Z_0 H\vec{e}_y \quad \vec{E}_{\text{tr}} = -\frac{1}{6}Z_0 H\vec{e}_y \quad \vec{E}_{\text{in}} = -\frac{2}{3}Z_0 H\vec{e}_y \quad .$$

Aufgabe 14

Eine linear polarisierte elektromagnetische Welle fällt aus dem Vakuum unter einen Winkel von 45° auf ein homogenes unmagnetisches dielektrisches Material mit Brechungsindex $n = 2$. Die Welle ist so polarisiert, dass die $\vec{E}_{\text{TE}}$ und $\vec{E}_{\text{TM}}$ Komponenten des elektrischen Feldes gleich stark sind.

a) Wie ist das Verhältnis zwischen den Amplituden $\vec{E}_{\text{TE}}$ und $\vec{E}_{\text{TM}}$ für die reflektierte Welle?

b) Wie lautet dieses Verhältnis für die transmittierte Welle?

Lösung zu Aufgabe 14

Vom Aufgabentext sind bekannt: θ_{in}=45°, n_{in}=1 und μ_{in}=1. Für die transmittierte Welle ist μ_{tr}=1 und n_{tr}=2 gegeben.

Der unbekannte Winkel θ_{tr} kann mit dem Brechungsgesetz von Snellius berechnet werden. Es folgt

$$n_{\text{in}} \sin\{\theta_{\text{in}}\} = n_{\text{tr}} \sin\{\theta_{\text{tr}}\} \qquad \Longrightarrow \qquad \sin\{\theta_{\text{tr}}\} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Man braucht $\cos\{\theta_{\text{tr}}\}$ und damit

$$\cos\{\theta_{\text{tr}}\} = \sqrt{1 - \sin^2\{\theta_{\text{tr}}\}} = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$$

$$\cos\{\theta_{\text{in}}\} = \cos\{45°\} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

In dieser Aufgabe gilt $|E_{\text{in,TE}}| = |E_{\text{in,TM}}|$ und allgemein für ebene Wellen $|\vec{E}| = Z|\vec{H}|$

a)

Für die reflektierte Welle:

$$|r_{\mathrm{TE}}| = \left|\frac{E_{\mathrm{ref,TE}}}{E_{\mathrm{in,TE}}}\right| = \left|\frac{n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} - n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}{n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}\right| = \left|\frac{1-\sqrt{7}}{1+\sqrt{7}}\right| \simeq 0.451$$

und

$$|r_{\mathrm{TM}}| = \left|\frac{H_{\mathrm{ref,TM}}}{H_{\mathrm{in,TM}}}\right| = \left|\frac{n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} - n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}{n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}\right| = \frac{4-\sqrt{7}}{4+\sqrt{7}} \simeq 0.204$$

folgt

$$\left|\frac{E_{\mathrm{ref,TE}}}{E_{\mathrm{ref,TM}}}\right| = \left|\frac{r_{\mathrm{TE}}E_{\mathrm{in,TE}}}{Z_{\mathrm{in}}H_{\mathrm{ref,TM}}}\right| = \left|\frac{r_{\mathrm{TE}}E_{\mathrm{in,TE}}}{Z_{\mathrm{in}}r_{\mathrm{TM}}H_{\mathrm{in,TM}}}\right| = \left|\frac{r_{\mathrm{TE}}E_{\mathrm{in,TE}}Z_{\mathrm{in}}}{Z_{\mathrm{in}}r_{\mathrm{TM}}E_{\mathrm{in,TM}}}\right| = \left|\frac{r_{\mathrm{TE}}}{r_{\mathrm{TM}}}\right| \simeq 2.22$$

b)
Für die transmittierte Welle:

$$|t_{\mathrm{TE}}| = \left|\frac{E_{\mathrm{tr,TE}}}{E_{\mathrm{in,TE}}}\right| = \left|\frac{2n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}}{n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}\right| = |1 + r_{\mathrm{TE}}| = \frac{2}{1+\sqrt{7}} \simeq 0.549$$

und

$$|t_{\mathrm{TM}}| = \left|\frac{H_{\mathrm{tr,TM}}}{H_{\mathrm{in,TM}}}\right| = \left|\frac{2n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}}{n_{\mathrm{tr}}\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} + n_{\mathrm{in}}\cos\{\theta_{\mathrm{tr}}\}}\right| = |1 + r_{\mathrm{TM}}| = \frac{8}{4+\sqrt{7}} \simeq 1.204$$

folgt

$$\left|\frac{E_{\mathrm{tr,TE}}}{E_{\mathrm{tr,TM}}}\right| = \left|\frac{E_{\mathrm{tr,TE}}}{Z_{\mathrm{tr}}H_{\mathrm{tr,TM}}}\right| = \left|\frac{t_{\mathrm{TE}}E_{\mathrm{in,TE}}}{Z_{\mathrm{tr}}t_{\mathrm{TM}}H_{\mathrm{in,TM}}}\right| = \left|\frac{t_{\mathrm{TE}}E_{\mathrm{in,TE}}Z_{\mathrm{in}}}{Z_{\mathrm{tr}}t_{\mathrm{TM}}E_{\mathrm{in,TM}}}\right| = \left|\frac{Z_{\mathrm{in}}}{Z_{\mathrm{tr}}}\frac{t_{\mathrm{TE}}}{t_{\mathrm{TM}}}\right| \simeq 0.911$$

Aufgabe 15

Gegeben ist eine elektromagnetische Welle im Vakuum mit dem E-Feld

$$\vec{E} = -iE_0\exp\{i(\omega t - kz)\}\vec{e}_x + 2E_0\exp\{i(\omega t - kz)\}\vec{e}_y \quad .$$

Wie ist die Welle polarisiert (linear, zirkular, elliptisch)? Wie lautet das zugehörige $\vec{H}$-Feld und wie ist der komplexe Poytingvektor $\vec{S}$? Die Welle trifft bei $z = 0$ auf den ideal elektrisch leitfähigen Halbraum ($z > 0$) und wird reflektiert. Bestimmen Sie das reflektierte elektrische Feld.

Lösung zu Aufgabe 15

Das gegebene Feld hat zwei Komponenten $E_x = \vec{E} \circ \vec{e}_x$ und $E_y = \vec{E} \circ \vec{e}_y$. Die Komponenten stehen senkrecht aufeinander $(E_x \vec{e}_x) \circ (E_y \vec{e}_y) = 0$ und senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor. Für die Amplituden gilt $|E_x| \neq |E_y|$. Beide Wellenkomponenten haben den gleichen Ausbreitungsvektor $\vec{k} = k\vec{e}_z$. Der Phasor der Wellen steht um eine viertel Schwingungsperiode (das ist i) versetzt zueinander. Demnach ist die Welle elliptisch polarisiert. Das magnetische Feld der Welle kann über

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega \mu_0} \\
&= \frac{E_0 k}{\omega \mu_0} \exp\{i(\omega t - kz)\}(\vec{e}_z \times (-i\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)) \\
&= -\frac{E_0 k}{\omega \mu_0}(i\vec{e}_y + 2\vec{e}_x) \exp\{i(\omega t - kz)\}
\end{aligned}$$

bestimmt werden. Der komplexe Poynting berechnet sich aus

$$\begin{aligned}
\vec{S} &= \vec{E} \times \vec{H}^* \\
&= -\frac{E_0^2 k}{\omega \mu_0} \exp\{i(\omega t - kz)\}(-i\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times (-i\vec{e}_y + 2\vec{e}_x) \exp\{-i(\omega t - kz)\} \\
&= -\frac{E_0^2 k}{\omega \mu_0}(-\vec{e}_z - 4\vec{e}_z) \\
&= \frac{5E_0^2 k}{\omega \mu_0} \,.
\end{aligned}$$

Im ideal leitfähigen Medium würde jedes tangentiale elektrische Wechselfeld einen beliebig hohen Strom induzieren, der seiner Ursache entgegen wirken würde. An der ideal leitfähigen Grenzfläche mit $\vec{n} = \vec{e}_z$ gilt deshalb $(\vec{e}_{\text{in}} + \vec{e}_{\text{ref}}) \times \vec{n} = \vec{e}_{\text{trans}} \times \vec{n} = 0$. Das einfallende und das reflektierte tangentiale elektrische Feld müssen zusammen Null ergeben. Das einfallende Feld hat tatsächlich nur Feldanteile, die in der Grenzfläche liegen. Der Ausbreitungsvektor der einfallenden Welle wird an der Grenzfläche gespiegelt $\vec{k}_{\text{ref}} \times \vec{n} = \vec{k} \times \vec{n}$ und $\vec{k}_{\text{ref}} \circ \vec{n} = -\vec{k} \circ \vec{n}$, es gilt also $\vec{k}_{\text{ref}} = -\vec{k}$. Es folgt damit $\vec{e}_{\text{ref}} = E_0 \exp i(\omega t + kz)(+i\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)$.