Aufgabe 1

Im Raumbereich $z > 0$ existiert die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = E_0(1.5\cos\{nk_0z\} + i0.5\sin\{nk_0z\})\exp\{i\omega t\}\vec{e}_y \quad .$$

Welche Brechzahl n hat das unmagnetische Medium in diesem Bereich, wenn es bei $z = 0$ an den freien Raum grenzt?

Lösung zu Aufgabe 1

Bei dem Feld handelt es sich um die Überlagerung einer vor- und rücklaufenden Welle. Die Wellen ergeben sich, wenn man die komplexe Schreibweise für $\sin\{x\} = (\exp\{ix\} - \exp\{-ix\})/(2i)$ und $\cos\{x\} = (\exp\{ix\} + \exp\{-ix\})/2$ verwendet:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_0(\exp\{ink_0z\} + \exp\{-ink_0z\}/2)\exp\{i\omega t\}\vec{e}_y \\ &= E_0(\exp\{i(\omega t + nk_0z)\}/2 + \exp\{i(\omega t - nk_0z)\})\vec{e}_y \quad .\end{aligned}$$

Die Welle, die zur Grenzfläche läuft (einfallende Welle) steht im ersten Summanden und fällt senkrecht auf die Fläche. Eine Unterscheidung nach TE und TM ist hier also obsolet. Der Reflexionsfaktor ist $r_{\mathrm{TE}} = 1/2$. Es gilt $r_{\mathrm{TE}} = (n_1 - n_2)/(n_1 + n_2)$ mit $n_2 = 1$ und $n_1 = n$ gesucht. Nach umstellen resultiert

$$n = \frac{1 + r}{1 - r} = 3$$

Aufgabe 2

Eine positive Punktladung Q sitzt an der Stelle $\vec{r}_1 = a\vec{e}_y$ und eine negative Punktladung $-Q$ an der Stelle $\vec{r}_2 = -a\vec{e}_y$.
Berechnen Sie das elektrische Feld in der Ebene $y = 0$.

Lösung zu Aufgabe 2

For symmetry in the xz-plane the x and z components of the electrical field $\vec{E}$ vanish and one can concentrate just on E_y. And one can write for E_y

$$E_y\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{y-a}{(x^2+(y-a)^2+z^2)^{3/2}} - \frac{y+a}{(x^2+(y+a)^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

and in particular on the xz-plane one has $y = 0$ and one gets easily

$$E_y\{x,z\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-a}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}} - \frac{a}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2a}{(x^2+a^2+z^2)^{3/2}}\right)$$

Aufgabe 3

In einem Vulkan steigt eine $1\,\mathrm{m}^3$ große Gasblase mit $1\,\mathrm{m/s}$ aus dem Magma auf. Die Gasblase ist mit $10^{-6}\,\mathrm{As/m^3}$ geladen. Der Vulkan sitzt am Äquator wo ein Erdmagnetfeld von $\vec{B} = B_0\vec{e}_\theta$ mit $B_0 = 3\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Vs/m^2}$ herrscht. Wie groß ist die Kraft (Betrag und Richtung), welche die Blase ablenkt?
Hinweis: Der Winkel θ wird gegen die Drehachse gemessen.

Lösung zu Aufgabe 3

Mit der Geschwindigkeit der Blase $\vec{v} = v_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{r}$, der Gesamtladung in der Blase $Q = \int\int\int \varrho_v \,\mathrm{d^3r} = 1\,\mathrm{m}^3 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{As/m^3}$ sowie dem Magnetfeld $\vec{B} = B_0 \cdot \vec{e}_\theta$ folgt für die Kraft auf die Blase

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= Q(\vec{v}\times\vec{B}) = Q\cdot B_0\cdot v_0(\vec{e}_\mathrm{r}\times\vec{e}_\theta) \\
&= 10^{-6}\,\mathrm{As}\;\cdot\;3\cdot 10^{-5}\,\mathrm{Vs/m^2}\;\cdot\;1\;\mathrm{m/s}\;\vec{e}_\varphi \\
&= 3\cdot 10^{-11}\;\mathrm{N}\;\vec{e}_\varphi\;.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Die ungeladene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit $\varepsilon_1 = \varepsilon$ und $\varepsilon_2 = -\varepsilon$ ist bei $z = 0$. Welche Größe hat die elektrische Feldstärke $\vec{E}_2$ an der ungeladenen Grenzfläche, wenn das erzeugende elektrische Feld im angrenzenden Medium $\vec{E}_1 = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ lautet?

Lösung zu Aufgabe 4

An einer Grenzfläche müssen die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}
\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= 0 \\
\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= \varrho_{\text{S}} \\
\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= \vec{j}_{\text{S}} \\
\vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\Big|_{\text{Grenze}} &= 0
\end{aligned}$$

erfüllt werden. Die Grenze ist hier $z = 0$, der dazu nötige Normalenvektor lautet $\vec{n} = \vec{e}_z$. Die Materialgleichungen

$$\begin{aligned}
\vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \\
\vec{B} &= \mu\mu_0\vec{H}
\end{aligned}$$

gelten in den hier vorliegenden linearen Medien.
Es geht nur um das elektrische Feld. Die Grenzfläche ist ladungsfrei und damit resultiert

$$\vec{E}_2 = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}(\vec{n} \circ \vec{E}_1)\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{E}_1) \times \vec{n} = E_0(\vec{e}_x - \vec{e}_z) \quad .$$

Aufgabe 5

Eine Stange mit vernachlässigbaren Querschnitt und dem Widerstand R schließt den rechteckigen Stromkreis, wie in Abbildung 1 dargestellt. Der Widerstand der anderen drei Seiten des Stromkreises ist vernachlässigbar. Ein statisches, homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ ist senkrecht zur Stromkreisebene ausgerichtet.
Berechnen Sie den Spannungsabfall über den Stab, wenn dieser sich mit einer konstanten Geschwindigkeit $\vec{v}$ bewegt.

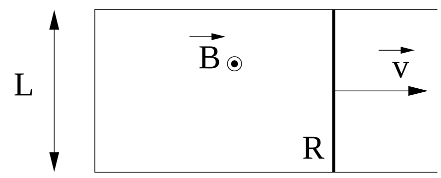

Abbildung 1: Schematische Darstellung.

Lösung zu Aufgabe 5

The emf can be readily calculated from the variation of the flux of the field B related to the circuit. If the flux if Φ_B then

$$\Phi_B\{t\} = BLx\{t\}$$

where $x\{t\}$ is the lenght of the circuit at a certain time t. It follows then that the emf is given by

$$\text{emf} = -\frac{\partial \Phi_B\{t\}}{\partial t} = -BLv\{t\} = -BLv$$

the current flowing in the circuit is so easily given by

$$I = \frac{\text{emf}}{R} = \frac{BLv}{R}$$

The voltage difference that one can measure between the two ends of the bar is 0 because all the voltage is dropping along the only resistive part of the circuit.

Aufgabe 6

Ein Medium besitzt die Plasmafrequenz ω_c und die genäherte relative Dielektrizitätskonstante $\varepsilon = 1 - (\omega_c/\omega)^2$. Eine ebene Welle mit $\vec{E}\{\vec{r}\} = E_0 \exp\{i(\omega t - k_x x)\}\vec{e}_y$ breitet sich im Medium aus. Wie lautet das zugehörige Feld $\vec{H}\{\vec{r}\}$? Wie muss ω gewählt werden, damit Energie durch das Medium transportiert wird?

Lösung zu Aufgabe 6

Mit zeitharmonischer Welle und der Maxwell Gleichung

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= -\partial \vec{B}/\partial t \\ -ik_x E_0 \exp\{i(\omega t - k_x x)\}\vec{e}_z &= -i\omega \vec{B} \end{aligned}$$

folgt $\vec{B} = k_{\rm x}/\omega E_0 \exp\{i(\omega t - k_{\rm x}x)\}\vec{e}_{\rm z}$. Aus $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ folgt damit $\vec{H} = k_{\rm x}/(\omega\mu_0)E_0 \exp\{i(\omega t - k_{\rm x}x)\}\vec{e}_{\rm z}$. Mit $k_{\rm x} = \omega\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu_0} = \sqrt{\varepsilon_0\mu_0}\sqrt{\omega^2 - \omega_{\rm c}^2}$ ergibt sich der Poyntingvektor $S_{\rm c} = \vec{E} \times \vec{H}^* = E_0^2\vec{e}_{\rm x}k_{\rm x}/\mu_0\omega = E_0^2\vec{e}_{\rm x}/\omega\sqrt{\varepsilon_0/\mu_0}\sqrt{\omega - \omega_{\rm c}}$. Für die Bedingung $\omega > \omega_{\rm c}$ ist $S_{\rm c}$ rein reell. Die Welle transportiert dann im Zeitmittel Energie.

Aufgabe 7

Welchen Polarisationszustand hat die Welle mit der magnetischen Feldstärke

$$\vec{H} = H_0(2\vec{e}_x + (1 + i\sqrt{3})\vec{e}_y) \exp\{i(\omega t + 3k_0 z)\} \quad ?$$

Lösung zu Aufgabe 7

Der Polarisationszustand ergibt sich aus dem Realteil der elektrischen Feldstärke. Da es sich hier um eine ebene Welle handelt, kann auch die magnetische Feldstärke verwendet werden. Zu untersuchen ist, welche geometrische Form der Zeiger der Feldstärke aufweist. Die Ausbreitungsrichtung ist entlang der $-z$-Achse. Damit wird die Form in der x-y-Ebene betrachtet. Die Komponenten lauten

$$\vec{e}_x \circ \vec{H} = 2H_0 \exp\{i(\omega t + 3k_0 z)\} \tag{1}$$

$$\vec{e}_y \circ \vec{H} = 2H_0 \exp\{i(\omega t + 3k_0 z + \pi/3)\} \quad . \tag{2}$$

Die Amplituden sind also gleich groß, es herrscht aber eine Phasenverschiebung von $\phi = \pi/3$. Somit handelt es sich hier um eine elliptisch polarisierte Welle. Auf Grund der positiven Phasenverschiebung der y-Komponente gegenüber der x-Komponente dreht die Welle links um die z-Achse, die Welle ist also rechts elliptisch polarisiert.

Aufgabe 8

Eine Ladungsverteilung kann beschrieben werden durch eine unendliche Menge von Punktladungen mit dem Index n ($n = 0, 1, 2, 3, ..., +\infty$), die sich auf der x-Achse befinden.
Die Ladung und Position ist für jedes n als

$$q_n = \left(\frac{1}{8}\right)^n Q \qquad \text{und} \qquad x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n a$$

mit den Konstanten a und Q gegeben. Berechnen Sie das elektrische Feld $\vec{E}$ im Ursprung des Koordinatesystems.

Lösung zu Aufgabe 8

The electrical field has just the x component and is given by

$$E_x(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q_n}{x_n^2}$$

in fact by definition

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\vec{r} - \vec{r}')q_n}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

and for $\vec{r} = 0$ just the x component is not vanishing so

$$E_x(0) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} -\frac{x_n q_n}{|x_n|^3} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{q_n}{x_n^2}$$

inserting now q_n and x_n we get

$$E_x(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{Q}{8^n}\right)\left(\frac{4^n}{a^2}\right) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{Q}{a^2}\right)$$

this is geometric series with factor $\frac{1}{2}$ and it follows

$$E_x(0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{Q}{a^2}\right) \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a^2}$$

Aufgabe 9

Eine ebene Welle trifft im Medium mit μ_1 senkrecht auf eine Grenzfläche bei $z = a$. Die Wellenzahl der einfallenden Welle ist k_1, die Wellenzahl der transmittierten Welle ist $k_2 > k_1$. Das an der Grenzfläche reflektierte Feld H ist betragsmäßig halb so groß, wie das einfallende Feld. Wie groß ist $\mu_2 < \mu_1$ im Bereich der transmittierten Welle?

Lösung zu Aufgabe 9

Mit senkrechtem Einfall folgt für den Reflektionsfaktor

$$\begin{aligned} |r_{\mathrm{TE}}| &= 1/2 \\ &= \left| \frac{\frac{k_1}{\mu_1} - \frac{k_2}{\mu_2}}{\frac{k_1}{\mu_1} + \frac{k_2}{\mu_2}} \right| \end{aligned}$$

Gilt wie gegeben $k_2 > k_1$ sowie $\mu_2 < \mu_1$ so ist $k_1/\mu_1 < k_2/\mu_2$ und damit $r_{\mathrm{TE}} = -1/2$. Nach Auflösen folgt dann $\mu_2 = \mu_1 k_2/k_1 \cdot (1 - r_{\mathrm{TE}})/(1 + r_{\mathrm{TE}}) = \mu_1 k_2/(3k_1)$.

Aufgabe 10

Eine Welle mit elektrischem Feld

$$\vec{E} = E_0(2\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y - \sqrt{2}\vec{e}_z)\exp\{i(\omega t - \vec{k}_{\text{in}} \circ \vec{r})\}$$

breitet sich mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}_{\text{in}} = (\vec{e}_y + \vec{e}_z)n_1 k_0/\sqrt{2}$ im Medium 1 mit $\mu_1 = 12$, $\varepsilon_1 = 3$ aus. Wie lautet das Feld der reflektierten Welle, wenn bei $z = 0$ ein Medium mit $\mu_2 = 3$, $\varepsilon_2 = 12$ angrenzt?

Lösung zu Aufgabe 10

Für die Reflektion einer Welle muss zunächst untersucht werden, welche Polarisation die Welle bezüglich der Grenzfläche hat. Dazu wird aus dem Normalenvektor auf die Grenzfläche $\vec{n} = \vec{e}_z$ und dem Wellenzahlvektor der Hilfsvektor

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}}{\|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|} = \vec{e}_x$$

bestimmt. Die Komponente von $\vec{E}$ in Richtung von $\vec{e}_\ell$ ist der TE-Anteil, der Rest ist TM-Anteil. Damit resultiert

$$\vec{E}_{\text{TE}} = E_0(2\vec{e}_x)\exp\{i(\omega t - \vec{k}_{\text{in}} \circ \vec{r})\}$$

und

$$\vec{E}_{\text{TM}} = E_0\sqrt{2}(\vec{e}_y - \vec{e}_z)\exp\{i(\omega t - \vec{k}_{\text{in}} \circ \vec{r})\} \quad .$$

Die Reflektionsfaktoren sind jeweils

$$\begin{aligned} r_{\text{TE}} &= \frac{(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})/\mu_1 - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})/\mu_2}{(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})/\mu_1 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})/\mu_2} \\ r_{\text{TM}} &= \frac{(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})/\varepsilon_1 - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})/\varepsilon_2}{(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})/\varepsilon_1 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})/\varepsilon_2} \quad , \end{aligned}$$

wobei wegen der selben Brechzahlen $n = \sqrt{\mu\varepsilon} = 6$ auch die Normalkomponenten von $\vec{k}$ in beiden Bereichen gleich sind. Es resultiert

$$r_{\text{TE}} = -r_{\text{TM}} = \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{3}}{\frac{1}{12} + \frac{1}{3}} = -0.6$$

und damit für den TE-Anteil $\vec{E}_{\text{ref,TE}} = r_{\text{TE}}\vec{E}_{\text{ref,TE}}$. Bei TM-Anteil in $\vec{E}_{\text{ref,TM}}$ muss zwischen der Normalkomponente und der Tangentialkomponente unterschieden werden. Die Normalkomponente „sieht“ r_{TM}, während die Tangentialkomponente (Richtung y) mit $-r_{\text{TM}}$ modifiziert wird.

Es resultiert also

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\mathrm{ref}} &= E_0(2r_{\mathrm{TE}}\vec{e}_x - \sqrt{2}r_{\mathrm{TM}}\vec{e}_y + \sqrt{2}r_{\mathrm{TM}}\vec{e}_z)\exp\{i(\omega t - \vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r})\} \\
&= E_0 r_{\mathrm{TE}}(2\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y + \sqrt{2}\vec{e}_z)\exp\{i(\omega t - \vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r})\} \\
&= -0.6E_0(2\vec{e}_x + \sqrt{2}\vec{e}_y + \sqrt{2}\vec{e}_z)\exp\{i(\omega t - \vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r})\}
\end{aligned}$$

mit $\vec{k}_{\mathrm{ref}} = (\vec{e}_y - \vec{e}_z)n_1 k_0/\sqrt{2}$.

Aufgabe 11

In der isolierenden Wandung eines unendlichen langen Hohlzylinders, mit dem Radius R und der Wanddicke δ, befindet sich eine homogen verteilte Ladung der Dichte ϱ_{v}. Der Hohlzylinder rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um die Zylinderachse. Bestimmen Sie das magnetische Feld $\vec{H}$ als Funktion von ω im Bereich **1** unter Berücksichtigung, dass $\delta << R$ ist.
Hinweis: Im Bereich **2** existiert kein magnetisches Feld.

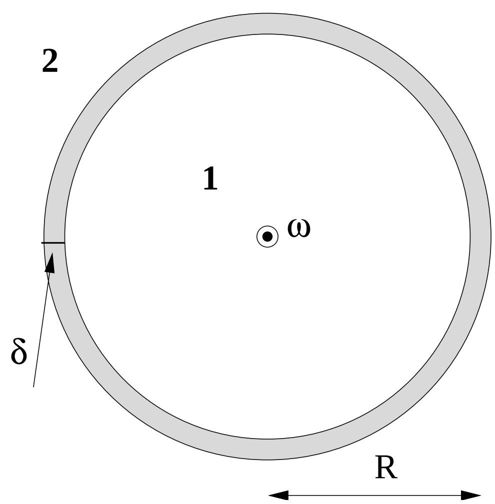

Abbildung 2: Schematische Darstellung.

Lösung zu Aufgabe 11

The velocity of the charges is simply given by

$$v = \omega R$$

and the rotating insulator exhibits a current density given by

$$j = \varrho_{\mathrm{v}} v = \varrho_{\mathrm{v}} \omega R$$

this current density is, in the approximation of the problem, constant.
One can use cylindrical coordinates as obviously suggested by the symmetry of the problem. The $\vec{H}$ field should be calculated, so one looks for $H_\rho\{\rho, \phi, z\}$, $H_\phi\{\rho, \phi, z\}$, $H_z\{\rho, \phi, z\}$. The rotation symmetry suggests that no dependence on ϕ is present, and the fact that the cylinder is infinitely long also make the problem independent from the z coordinate. It follows that

$$H_\rho\{\rho, \phi, z\} = H_\rho\{\rho\} \qquad H_\phi\{\rho, \phi, z\} = H_\phi\{\rho\} \qquad H_z\{\rho, \phi, z\} = H_z\{\rho\}$$

Considering the line integral of $\vec{H}$ over a circle line in a $z-$plane and centered on the cylinder axis one gets

$$\int_C \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

implying that H_ϕ=0. Considering now the flux of $\vec{H}$ relative to a generic cylindrical surface having the same axis one can, using the Gauss theorem, conclude that H_ρ=0. Finally the calculation of the line integral of $\vec{H}$ on a rectangular path having the sides, aligned along the vectors $\vec{\rho}$ and $\vec{z}$, contained in the cylinder brings to the result that H_z is constant in this region. At this point one can again calculate the line integral of $\vec{H}$ on a rectangular path aligned along $\vec{\rho}$ but this time the opposite sides (of generic lenght L along $\vec{z}$) are taken in the cylinder and outside respectively, and considering that outside $\vec{H} = 0$ one gets

$$HL = jL\delta$$

it follows

$$H = \delta \varrho_{\mathrm{v}} \omega R$$

Aufgabe 12

Eine Drahtschleife in Form eines gleichschenkligen Dreiecks wird von einen Strom I durchflossen. Die Länge der Schenkel ist s. Für den Abstand a zwischen Zentrum und einem Schenkel gilt $a = s \cdot \sqrt{3}/3$. Bestimmen Sie die magnetische Feldstärke im Zentrum des Dreiecks.

Lösung zu Aufgabe 12

Für einen geraden Leiter entlang der $z-$Achse gilt die Parametrisierung der Stromdichte $\vec{j}_{\mathrm{v}}\{\vec{r}\} = I \cdot \delta\{x\}\delta\{y\}\vec{e}_{\mathrm{z}}$ zwischen $-a/2 \leq z \leq a/2$. Das entsprechende Magnetfeld im Abstand $a =$

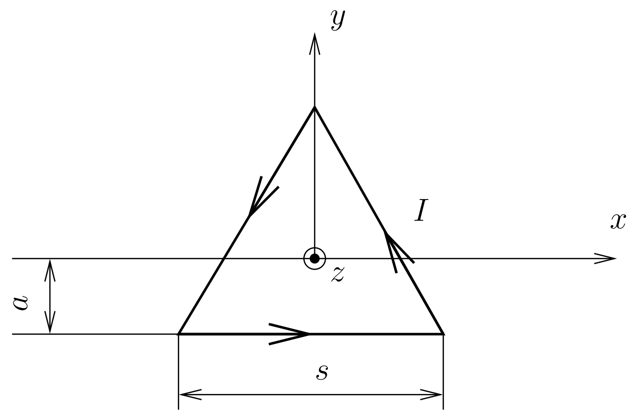

Abbildung 3: Schematische Darstellung des gleichschenkligen Dreiecks.

$\sqrt{x^2+y^2}$ zur Leitermitte ist nach Biot-Savart

$$\begin{aligned}\vec{B}\{x\vec{e}_\mathrm{x}+y\vec{e}_\mathrm{y}\}\cdot 4\pi/I\mu_0 &= \int\limits_{z'=-s/2}^{s/2}\int\limits_{y'=-\infty}^{\infty}\int\limits_{x'=-\infty}^{\infty} \\ &\quad \frac{\delta\{x'\}\delta\{y'\}\vec{e}_\mathrm{z}\times((x-x')\vec{e}_\mathrm{x}+(y-y')\vec{e}_\mathrm{y}-z'\vec{e}_\mathrm{z})}{((x-x')^2+(y-y')^2+z'^2+)^{3/2}}\,\mathrm{d}z' \\ &= \int\limits_{z'=-s/2}^{s/2}\vec{e}_\mathrm{z}\times\frac{(x\vec{e}_\mathrm{x}+y\vec{e}_\mathrm{y})}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z'\ .\end{aligned}$$

Mit $x^2+y^2=r^2$ sowie $x\vec{e}_\mathrm{x}+y\vec{e}_\mathrm{y}=\vec{e}_\mathrm{r}$ gilt dann

$$\begin{aligned}\vec{B}\{x\cdot\vec{e}_\mathrm{x}+y\cdot\vec{e}_\mathrm{y}\}\cdot 4\pi/I\mu_0 &= r\int_{z'=-s/2}^{s/2}\vec{e}_\mathrm{z}\times\vec{e}_\mathrm{r}\frac{1}{(r^2+z'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z' \\ &= r\vec{e}_\phi\left[\frac{z'}{r^2\sqrt{r^2+z'^2}}\right]_{z'=-s/2}^{s/2} \\ &= \vec{e}_\phi\frac{s}{r\sqrt{r^2+s^2/4}}\ .\end{aligned}$$

Mit $r=s\sqrt{3}/3$ und der Überlagerung der Felder dreier Leitersegmente ist die Feldstärke im Zentrum $\vec{H}_\mathrm{Zentrum}\circ\vec{e}_\mathrm{z}=3\cdot\vec{H}_\mathrm{einzel}\circ\vec{e}_\mathrm{z}=H_0\vec{e}_\mathrm{z}$ mit der Konstanten

$$\begin{aligned}H_0 &= \frac{3I\mu_0\cdot 3}{4\pi s\sqrt{3}}\cdot\frac{s}{\sqrt{s^2/3+s^2/4}} \\ &= I\mu_0\frac{9\sqrt{4}}{4\pi\sqrt{7}s}\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 13

Die Welle

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - (3x - 4y)k_0)\}(4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$$

fällt bei $y = -2\pi/k_0$ auf die ebene Grenzfläche zu einem Medium mit Brechzahl 2.4 . Beide Medien sind unmagnetisch. In welchem Verhältnis stehen die zur Grenzfläche tangentialen Komponenten des $\vec{H}$ Feldes der reflektierten zur einfallenden Welle an der Grenzfläche?

Lösung zu Aufgabe 13

Für das Verhältnis der reflektierten zur einfallenden Welle muss der Reflektionsfaktor ausgerechnet werden. Beim Reflektionsfaktor ist nach TE- und TM-Wellen zu unterscheiden. Die Grenzfläche liegt bei $y = -2\pi/k_0$. Damit ist der Normalenvektor bezüglich der Grenzfläche in $\pm y$-Richtung festzulegen. Hier wird $\vec{n} = \vec{e}_y$ gewählt. Aus dem Vergleich mit dem allgemeinen Ansatz für ebene Wellen ergibt sich $\vec{k} = (3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)k_0$. Die für den Reflektionsfaktor entscheidende Normalkomponente ist demnach $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = -4k_0$, die Welle läuft also in negativer y-Richtung zur Grenzfläche. Die Brechzahl des Mediums resultiert aus $\|\vec{k}\|^2 = (nk_0)^2$ zu $n = 5$ und damit ist $\varepsilon = 25$. Das elektrische Feld lautet

$$\vec{E} = \frac{\vec{H} \times \vec{k}}{\omega\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{-k_0\vec{e}_z}{\omega\varepsilon_0} H_0 \exp\{i(\omega t - (3x - 4y)k_0)\}$$

und steht ausschließlich parallel zur Grenzfläche. Es handelt sich hier also um eine TE-Welle. Für den Reflektionsfaktor wird noch die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}$ benötigt, für den

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = k_0\sqrt{n_{\text{tr}}^2 - n_{\text{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2} = k_0\sqrt{-3.24} = i1.8k_0$$

gilt. Somit resultiert der Reflektionsfaktor zu

$$r_{\text{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} - \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}}{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} + \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}} = \frac{4 - i1.8}{4 + i1.8} = \frac{12.76 - i14.4}{19.24} = \exp\{-i2\varphi\}$$

mit $\varphi = \arctan\{1.8/4\} = 0.42$ bzw. $24°$. Die magnetische Feldstärke der reflektierten Welle lautet

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\text{ref}} &= \frac{\vec{k} \times \vec{E}_{\text{ref}}}{\omega\mu\mu_0} = r_{\text{TE}}\frac{\vec{k} \times \vec{E}_{\text{in}}}{\omega\mu\mu_0} = r_{\text{TE}}\frac{k_0^2(-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)}{\omega^2\mu_0\varepsilon_0} H_0 \exp\{i(\omega t - (3x + 4y)k_0)\} \\
&= r_{\text{TE}} H_0 \exp\{i(\omega t - (3x + 4y)k_0)\}(-4\vec{e}_x + 3\vec{e}_y) \quad ,
\end{aligned}$$

das Verhältnis der Tangentialkomponenten der magnetischen Feldstärken an der Grenzfläche ist demnach

$$\frac{(\vec{n} \times \vec{H}_{\mathrm{ref}}) \times \vec{n}}{(\vec{n} \times \vec{H}_{\mathrm{in}}) \times \vec{n}} = -r_{\mathrm{TE}} = \frac{-12.76 + i14.4}{19.24} = \exp\{i(\pi - 2\varphi)\}$$

Aufgabe 14

Eine Ladungsverteilung ist gegeben durch

$$\varrho_{\mathrm{v}}(\vec{r}') = \left(\frac{x'y' + az'}{a^5}\right) Q \qquad \text{mit} \begin{cases} -a < x' < a \\ -a < y' < a \\ -a < z' < a \end{cases}$$

$$\text{und sonst} \qquad \varrho_{\mathrm{v}}(\vec{r}') = 0 \quad .$$

Berechnen Sie die gesamte Ladung.

Berechnen Sie das elektrische Dipolmoment der Ladungsverteilung, das als

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int (\vec{r}' - \vec{r}) \varrho_{\mathrm{v}}(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 r'$$

definiert ist.

Lösung zu Aufgabe 14

The total charge is given by definition as

$$Q_{\mathrm{T}} = \int \varrho_{\mathrm{v}}(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 r'$$

and it follows that in our case

$$Q_{\mathrm{T}} = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \left(\frac{x'y' + az'}{a^5}\right) Q \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z' = 0$$

for the dipole moment we get from the definition

$$\vec{p}(\vec{r}) = \int (\vec{r}' - \vec{r}) \varrho_{\mathrm{v}}(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 r' = \int \vec{r}' \varrho_{\mathrm{v}}(\vec{r}') \, \mathrm{d}^3 r' - \vec{r} Q_{\mathrm{T}}$$

in our case just the first term remains obtaining a result that is indepentent from $\vec{r}$

$$\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p} = \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \int_{-a}^{+a} \vec{r}' \left(\frac{x'y' + az'}{a^5}\right) Q \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \, \mathrm{d}z'$$

it is easy to see that just the z component of $\vec{p}$ in not vanishing and

$$p_z = \frac{8}{3} a Q$$