Aufgabe 1

An der Oberfläche eines idealen ebenen Leiters im Bereich $x \leq 0$ gilt für die Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az)\}$. Wie groß ist $\vec{H}$ im Bereich $x > 0$? Wie groß ist $\vec{j}$ auf der Oberfläche des Leiters?

Lösung

Die Kontinuitätsgleichung verknüpft Stromdichte und Raumladung miteinander:

$$\nabla \circ \vec{j}_{\mathrm{S}} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{S}} = 0 \quad .$$

Die gegebene Raumladung ist nur von z abhängig. Die Stromdichte muss deshalb eine nicht Nullwertige $z-$ Ableitung liefern. Der Ansatz $\vec{j}_{\mathrm{S}} = j_0 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az)\}\vec{e}_{\mathrm{z}}$ erfüllt diese Bedingung:

$$\nabla \circ \vec{j}_{\mathrm{S}} = -\mathrm{i}aj_0 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az)\}$$

und die Zeitableitung liefert:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{S}} = \mathrm{i}\omega\varrho_0 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az)\} \quad .$$

Gleichsetzen liefert dann $j_0 = \omega\rho_0/a$. Im Leiter $(x \leq 0)$ gilt für das elektrische Feld $\vec{E}_2 = 0$ und ebenso $\vec{H}_2 = 0$. Das $H-$ Feld muss an der Grenzfläche stetig sein: $\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_{\mathrm{S}}$. Der Normalenvektor ist $\vec{n} = -\vec{e}_{\mathrm{x}}$ und damit $(\vec{n} \times \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_{\mathrm{S}} \times \vec{n} = \frac{\omega\rho_0}{a} \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az)\}\vec{e}_{\mathrm{y}}$. Da das gefundene H_1 keine Komponente in Richtung der Normalen hat ist auch $\vec{n} \circ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$ erfüllt und $\vec{H}_1 = \frac{\omega\rho_0}{a} \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az)\}\vec{e}_{\mathrm{y}}$.

Aufgabe 2

Ein Kreisring ist mit Q geladen. Die Achse des Rings liegt auf der $z-$Achse. Der Ring hat den Durchmesser D. Im Abstand h über dem Zentrum des Rings sitzt eine punktförmige Ladung q. Wie groß ist die Kraft $\vec{F}$, die auf die Punktladung q wirkt?

Lösung

Die Kraft ergibt sich direkt aus der elektrostatischen Kraft $\vec{F} = q\vec{E}_Q$ mit

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{\varrho_{\mathrm{V}}\{\vec{r}'\}(\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}\, \mathrm{d}^3 r'$$

Die Raumladungsdichte kann mit $\varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}'\} = \frac{Q}{2\pi R}\delta\{z'\}\delta\{\rho' - R\}$ parametrisiert werden. Der Aufpunkt $\vec{r}$ vereinfacht sich für einen Punkt auf der z-Achse zu $\vec{r} = h$, die Ladung wird an den Punkten $\vec{r}' = \rho'\left(\cos\{\phi'\}\vec{e}_\mathrm{x} + \sin\{\phi'\}\vec{e}_\mathrm{y}\right) + z'\vec{e}_\mathrm{z}$ gewichtet. Somit ist:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \frac{Q}{8\pi^2\epsilon_0 R}\iiint\limits_{z'=-\infty,\phi'=0,\rho'=0}^{+\infty,2\pi,\infty} \delta\{z'\}\delta\{\rho' - R\}\frac{-\rho'\left(\cos\{\phi'\}\vec{e}_\mathrm{x} + \sin\{\phi'\}\vec{e}_\mathrm{y}\right) + (z_0 - z')\vec{e}_\mathrm{z}}{\left((z_0 - z')^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}z' \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{h}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_\mathrm{z} \quad .\end{aligned}$$

Hierbei liefert aus Symmetriegründen die Integration nach ϕ keine Komponenten in $x-$ und $y-$Richtung. Die Kraft auf die Punktladung ist demnach

$$\vec{F} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}\frac{z_0}{(h^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}\vec{e}_\mathrm{z} \quad .$$

Aufgabe 3

Zwei mit $\pm Q$ geladene, sehr große Platten befinden sich sehr nahe zueinander. Welche mechanische Arbeit ist nötig, um die Platten auf den Abstand d zu bringen?

Lösung

Das Feld einer Platte mit der Fläche A ist gegenüber der zweiten Platte $\vec{E} = Q/(2\epsilon A)\vec{e}_\mathrm{x}$. Sind die Platten ausreichend groß, so ist das Feld ortsunabhängig und unabhängig vom Plattenabstand. Um die mechanische Arbeit für die Verschiebung der zweiten Platte zu bestimmen, kann das Wegintegral $W = \int\limits_{x'=0}^{d} \vec{E}Q\,\mathrm{d}x' = Q^2 d/(2\epsilon_0 A)$ verwendet werden. Die Vorzeichen sind hier so gewählt, dass nicht die elektrostatische Kraft auf die Gegenplatte, sondern die Kraft zur Überwindung der elektrostatischen Kraft betrachtet wird. Nicht das Gesamtfeld, also das überlagerte Feld beider Platten, ist für die Anziehungskraft der Platten maßgeblich, sondern nur das Feld einer Platte und die Ladung auf der Gegenplatte. Von der Gegenplatte und dem von ihr ausgehenden Feld rührt keine Kraft auf sich selbst her.
Alternativ kann die Aufgabe auch über die Betrachtung der Kapazität $C = Q/U = A/(\epsilon_0 d)$ gelöst werden. Der Zuwachs an Ladeenergie $W = CU^2/2 = QU/2$ mit $U = Qd/(\epsilon_0 A)$ liefert für die Abstände 0 und d das entsprechende Ergebnis.

Aufgabe 4

Gegeben ist das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A} = A_0 \exp\{\mathrm{i}(\omega t - az) - by\}\vec{e}_\mathrm{x}$ im Bereich $y < 0$. Das skalare elektrische Potential ist Null. Wie müssen a, b und ω in Beziehung stehen, wenn kein Strom fließt?

Lösung

In der Maxwellgleichung $\nabla \times \vec{H} = \partial \vec{D}/\partial t + \vec{j}$ kann definitionsgemäß $\vec{H}$ durch $\nabla \times \vec{A}/(\mu\mu_0)$ und $\vec{D} = -\varepsilon\varepsilon_0(\nabla\phi_\mathrm{el} + \partial\vec{A}/\partial t)$ ersetzt werden. Entsprechend der Aufgabenstellung soll kein Strom fließen: $\vec{j} = 0$. Ebenso soll das skalare elektrische Potential vernachlässigt werden. Das gegebene Vektorpotenzial ist divergenzfrei, deshalb gilt $\nabla \times \nabla\vec{A} = \Delta A - \nabla\left(\nabla \circ \vec{A}\right) = \epsilon\epsilon_0\mu\mu_0\partial^2 A/\partial t^2$. Wird nun $\vec{A}$ eingesetzt und die Zeit- und Ortsableitungen gebildet, ergibt sich der Zusammenhang von a, b und ω zu $(b^2 - a^2 + \omega^2\epsilon\epsilon_0\mu\mu_0)\vec{A} = 0$. Das Vektorpotenzial ist nicht überall Null, deshalb muss der Ausdruck in der Klammer Null sein.

Aufgabe 5

Gegeben ist ein in z-Richtung unendlich ausgedehntes Prisma der Brechzahl n im freien Raum. Der Querschnitt des Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck, wie in der Abbildung skizziert. Ein Lichtstrahl fällt senkrecht zur z-Achse auf das Prisma, so dass der Strahl innerhalb des Prismas parallel zur Basis verläuft (siehe k-Vektor in der Abbildung). Wie ist der Winkel ϕ zu wählen, damit das Licht beim Verlassen des Prismas die gleiche Leistung hat wie beim Eintritt. Geben Sie die Richtung von $\vec{E}$ oder $\vec{H}$ an.

Lösung

Die Brewsterbedingung muss erfüllt sein, wenn das Feld ungeschwächt die Grenzflächen durchlaufen soll. Sie lautet: $\tan\{\theta_\mathrm{iB}\} = n_\mathrm{tr}/n_\mathrm{in}$ mit $n_\mathrm{in} = n_1$, $n_\mathrm{in} = 1$ und $\theta_\mathrm{iB} = \phi/2$ wie aus der Zeichnung abgelesen werden kann. Aufgelöst ist dann $\phi = 2\arctan\{1/n_1\}$. In unmagnetischen Materialien gibt es einen Brewsterwinkel nur für TM-polarisierten Einfall ($\vec{H} \circ \vec{n} = 0$). Der Normalenvektor $\vec{n}$ hat Komponenten in $x-$ und $y-$Richtung. Deshalb kann $\vec{H}$ nur in $z-$Richtung schwingen.

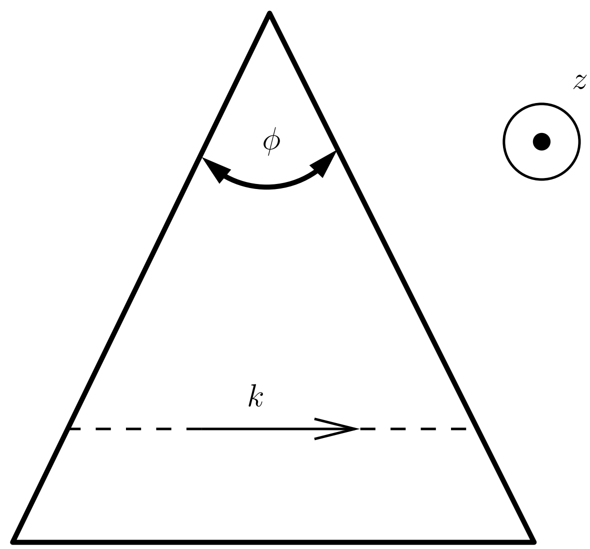

Abbildung 1: Schematische Darstellung des Prismenquerschnitts.

Aufgabe 6

In einer dielektrischen Kugel vom Radius R herrscht das elektrische Feld

$$\vec{E} = G_\mathrm{r}\ r/3\ \vec{e}_\mathrm{r} + G_\theta/(r\sin\{\theta\})\vec{e}_\theta\ .$$

Wie groß ist innerhalb der Kugel die Raumladungsdichte und wie stark ist die Kugel insgesamt geladen?

Lösung

Die Raumladung ergibt sich direkt aus der Divergenz des Elektrischen Feldes $\varrho_\mathrm{V} = \varepsilon\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E}$. Die Ableitungen nach φ verschwinden offensichtlich:

$$\begin{aligned} \frac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon\varepsilon_0} &= \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial}{\partial r} r^2 \vec{E}\circ\vec{e}_\mathrm{r}\right) + \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\{\theta\}\vec{E}\circ\vec{e}_\theta\right) + \ldots\frac{\partial}{\partial\varphi} \\ &= G_\mathrm{r} \quad . \end{aligned}$$

Die Gesamtladung Q ist damit

$$\begin{aligned} Q &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho_\mathrm{V}\, \mathrm{d}^3 r \\ &= \iiint\limits_{r=0,\theta=0,\varphi=0}^{R,\pi,2\pi} \varepsilon_0 \varepsilon G_\mathrm{r} r^2 \sin\{\theta\}\, \mathrm{d}r\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{4\pi\varepsilon_0\varepsilon}{3} R^3 G_\mathrm{r} \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 7

In einem schlecht isolierenden Dielektrikum wird die Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0 \cdot \sin\{ax\} \cdot \cos\{\omega t\}$ gemessen. Welche Stromdichte fließt durch das Medium?

Lösung

Der Zusammenhang zwischen Ladungsdichte und Stromdichte steht in der Kontinuitätsgleichung:

$$\nabla \circ \vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho = 0 \quad .$$

Die Zeitableitung im zweiten Term ist

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho = -\varrho_0\omega \cdot \sin\{ax\} \cdot \sin\{\omega t\} \quad .$$

Dieser Term ist nur von$x$ abhängig. Die Vermutung liegt nahe, dass es nur eine x-Komponente in $\vec{j}$ gibt.

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} j_x &= \varrho_0\omega \cdot \sin\{ax\} \cdot \sin\{\omega t\} \\ j_x &= -\varrho_0 \frac{\omega}{a} \cdot \cos\{ax\} \cdot \sin\{\omega t\} \quad . \end{aligned}$$

Alle anderen Komponenten von $\vec{j}$ können als jeweils ortsunabhängig angesehen werden, zumindest sollten sich die Ableitungen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} j_y$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} j_z$ kompensieren.

Aufgabe 8

Im freien Raum fließen die Linienströme $\vec{j}_1 = j_1 \cdot \delta\{x\}\delta\{y\}\vec{e}_\mathrm{z}$ und $\vec{j}_2 = j_2 \cdot \delta\{z\}\delta\{\rho - \alpha\} \cdot \vec{e}_\phi$. Wie groß ist die Kraftwirkung der Ströme aufeinander?

Lösung

Die Kraft auf einen Stromfaden berechnet sich aus dem Magnetfeld B_a am Ort des Stromes und der dort herrschenden Stromdichte $\vec{j}_\mathrm{b}$. Diese Kraft muss über alle Stromelemente aufsummiert werden:

$$\vec{F} = \iiint\limits_{V_\mathrm{b}} \vec{j}_\mathrm{b} \times \vec{B}_\mathrm{a} \, \mathrm{d}^3 r \quad .$$

Das Magnetfeld einer kreisförmigen Leiterschleife auf der z-Achse lautet

$$\frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \vec{e}_z$$

wenn die z-Achse gleich der Achse des Rings ist, er den Radius R hat, vom Strom I durchflossen wird und in der Ebene $z = 0$ liegt. Hier ist der Strom j_2 und der Radius α; der Ring liegt in der Ebene $z = 0$. Exakt auf der z-Achse ist der zweite Linienstrom mit Strom j_1. Das Kreuzprodukt mit dem Linienstrom ergibt Null, so dass

$$\vec{F} = 0$$

resultiert.

Aufgabe 9

Eine elliptische Leiterschleife mit infinitesimal kleinem Spalt und unbegrenzter Leitfähigkeit wird axial vom Magnetfeld $B = B_0 \cdot \cos\{\omega t\}$ durchsetzt. Die beiden Halbachsen der Ellipse sind a und b. Welche Spannung kann man am Spalt messen?

Lösung

Hier muss das Faraday-Gesetz in der integralen Form

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}$$

angewendet werden. Das Flächenintegral über die Ellipse ergibt wegen des ortsunabhängigen Magnetfeldes, das senkrecht auf die Fläche steht, einfach die Fläche der Ellipse πab, so dass nur noch de Zeitableitung bestimmt werden muss und somit

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = B_0 \omega \pi ab \sin\{\omega t\}$$

resultiert. Die Leiterschleife ist ideal leitfähig, also darf entlang der Schleife kein elektrisches Feld existieren, sondern nur im Spalt. Das Wegintegral über den Spalt ergibt genau die gesuchte Spannung

$$U = -B_0 \omega \pi ab \sin\{\omega t\} \quad .$$

Aufgabe 10

Das skalare elektrische Potenzial zum elektrischen Feld $\vec{E} = E_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{x} \exp\{ax + by - \omega t\}$ lautet $\phi_\mathrm{el} = \phi_0 \exp\{ax + by - \omega t\}$. Welche Größe hat das zugehörige magnetische Feld $\vec{H}$?

Lösung

Dies ist **keine ebene Welle!** Es gibt zwei mögliche Wege zur Lösung. Der einfachste Weg geht über das Faraday-Gesetz in differentielle Form, der etwas kompliziertere über die Bestimmung von $\vec{A}$, dass ja mit $\vec{E}$ über $\vec{E} = -(\nabla \Phi_\mathrm{el} + (\,\mathrm{d}/\,\mathrm{d}t)\vec{A})$ verknüpft ist. In beiden Fällen wird der lineare Zusammenhang $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$ verwendet.
Faraday:

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{B} = \nabla \times \vec{E} = -bE_0 \exp\{ax + by - \omega t\}\vec{e}_z \quad ,$$

also

$$\vec{H} = \frac{-b}{\omega\mu\mu_0} E_0 \exp\{ax + by - \omega t\}\vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 11

Im Bereich $x \leq a$ herrscht das magnetische Feld

$$\vec{H} = H_0 \cos\left\{\pi \frac{x}{a}\right\} \cdot \cos\left\{\pi \frac{y}{b}\right\} \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{z}$$

Der angrenzende Bereich $x > a$ ist feldfrei. Wie groß ist die Stromdichte in der Grenzfläche?

Lösung

Die Stromdichte in einer Grenzfläche hängt mit den Tangentialkomponenten der angrenzenden Magnetfelder über

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_\mathrm{Grenze} = \vec{j}_\mathrm{s}$$

zusammen. Die Grenze ist durch $x = a$ gegeben, daher wird der Normalenvektor zu $\vec{n} = \vec{e}_x$ gewählt. Dann ist gemäß obiger Nomenklatur $\vec{H}_2 = 0$ und $\vec{H}_1 = H_0 \cos\left\{\pi\frac{x}{a}\right\}\cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\}\exp\{\mathrm{i}(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_z$ und es resultiert

$$\vec{j}_\mathrm{s} = H_0 \cos\{\pi\}\cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\}\exp\{\mathrm{i}(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_y = -H_0\cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\}\exp\{\mathrm{i}(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_y \quad .$$

Aufgabe 12

Wie muss das skalare elektrische Potential gewählt werden, damit die Wellengleichungen für $\vec{A}$ und ϕ_el mit $\vec{A} = A_0 \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax - \beta z)\}\vec{e}_z$ entkoppelt sind?

Lösung

Entkopplung der Potenziale entsteht, wenn die Lorentz-Eichung

$$\nabla\vec{A} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\mathrm{el} = 0$$

verwendet wird. Damit ergibt sich sofort

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\mathrm{el} = -\nabla\vec{A} = A_0 i\beta\exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax - \beta z)\}$$

und somit

$$\Phi_\mathrm{el} = A_0\frac{\beta}{\omega\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}\exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax - \beta z)\} \quad .$$

Aufgabe 13

In der Beschreibung einer Grenzfläche wird folgende falsche Angabe gemacht:
„Das magnetische Feld der einfallenden Welle wird durch

$$H = H_0(\cos\{ay - \omega t\}\cdot\cos\{bz\} + \sin\{ay - \omega t\}\cdot\sin\{bz\})$$

beschrieben. Das Feld weist senkrecht auf die Grenzfläche zum angrenzenden Medium bei $z = 0$.“
Erweitern Sie die Angabe des Feldes $\vec{H}$ so, dass eine korrekte Darstellung entsteht ($\vec{H} = 0$ wird nicht anerkannt).

Lösung

Zunächst muss untersucht werden, was an dem Ausdruck

$$\vec{H} = H_0(\cos\{ay - \omega t\} \cdot \cos\{bz\} + \sin\{ay - \omega t\} \cdot \sin\{bz\})\vec{e}_z$$

eigentlich falsch ist. Dazu wird er in die komplexe Darstellung umgeformt: Zunächst anwenden des Additionstheorems für den cos und dann exponentielle Schreibweise

$$\vec{H} = H_0 \cos\{ay - bz - \omega t\}\vec{e}_z = \frac{H_0}{2}(\exp\{\mathrm{i}(ay - bz - \omega t)\} + \exp\{-\mathrm{i}(ay - bz - \omega t)\})\vec{e}_z \quad .$$

Dies sind zwei ebene Wellen mit Wellenzahlvektoren $\vec{k} = a\vec{e}_y - b\vec{e}_z$. Die Richtungen von $\vec{k}$ und $\vec{H}$ sind senkrecht zueinander, was hier nicht stimmt. In der Angabe von $\vec{H}$ fehlt also wohl zumindest eine Vektorkomponente, so dass $\vec{k} \circ \vec{H} = 0$ resultiert. Dies wird durch

$$\vec{H} = \frac{H_0}{2}(\exp\{\mathrm{i}(ay-bz-\omega t)\}+\exp\{-\mathrm{i}(ay-bz-\omega t)\}) \left(\frac{b}{a}\vec{e}_y + \vec{e}_z\right) = H_0 \cos\{ay-bz-\omega t\} \left(\frac{b}{a}\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$$

erfüllt.

Aufgabe 14

Wie ist die Welle

$$\vec{E} = E_0 \begin{pmatrix} \sin\{\omega t - \beta z\} \\ \cos\{\omega t - \beta z\} \\ 0 \end{pmatrix}$$

polarisiert?

Lösung

Die Polarisation einer Welle ergibt sich aus der Figur, die der Vektor des elektrischen Feldes bei fortlaufender Zeit an einem festen Ort beschreibt. Für konstante Werte von z ist das hier ein Kreis in der x-y-Ebene. In der üblichen Zeichenweise des Koordinatensystems (x nach rechts, y nach oben) dreht sich der Zeiger im Uhrzeigersinn, also links um die z-Achse. Es handelt sich demnach um eine **links zirkular polarisierte Welle**.

Aufgabe 15

Bestimmen Sie den TE und TM Anteil von $\vec{H} = H_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{y} \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax + \beta z)\}$ bezüglich der Grenzfläche mit $\vec{n} = 0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_y$

Lösung

Zur Bestimmung der Polarisation einer Welle im Bezug auf eine Grenzfläche ist es am einfachsten, den Lateralvektor

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n} \times \vec{k}}{\|\vec{n} \times \vec{k}\|}$$

zu bestimmen. Der jeweilige Anteil von $\vec{E}$ bzw $\vec{H}$ in Richtung des Lateralvektors ist dann der TE bzw. TM Anteil.
Hier ist $\vec{k} = a\vec{e}_x - \beta\vec{e}_z$. Somit ergibt sich $(0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_y) \times (a\vec{e}_x - \beta\vec{e}_z) = -0.8\beta\vec{e}_x + 0.6\beta\vec{e}_y - 0.8a\vec{e}_z$ und damit $\vec{e}_\ell = (-0.8\beta\vec{e}_x + 0.6\beta\vec{e}_y - 0.8a\vec{e}_z)/\sqrt{\beta^2 + 0.64a^2}$.
Der TM-Anteil von $\vec{H}$ lautet entsprechend

$$\vec{H}_{\mathrm{TM}} = (\vec{e}_\ell \circ \vec{H})\vec{e}_\ell = \frac{0.6\beta}{\beta^2 + 0.64a^2} H_0 \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax + \beta z)\}(-0.8\beta\vec{e}_x + 0.6\beta\vec{e}_y - 0.8a\vec{e}_z)$$

und der TE Anteil ist der Rest

$$\vec{H}_{\mathrm{TE}} = \vec{H} - \vec{H}_{\mathrm{TM}} = H_0 \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax + \beta z)\}(\vec{e}_y - \frac{0.6\beta}{\beta^2 + 0.64a^2}(+0.8\beta\vec{e}_x + 0.6\beta\vec{e}_y + 0.8a\vec{e}_z))$$

Aufgabe 16

An der Grenzfläche $y = 0$ lautet das Feld der einfallenden Welle ($y > 0$)

$$\vec{E}_{\mathrm{in}} = E_0 \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - 2k_0 x + k_0 y)\} \cdot \vec{e}_z.$$

Die transmittierte Welle wird durch

$$\vec{E}_{\mathrm{tr}} = A\ E_0\ \exp\{k_0 y + \mathrm{i}(\omega t - 2k_0 x)\}\vec{e}_z \quad ; \quad A \in \mathbb{C}$$

beschrieben. Wie groß ist A, wenn beide Medien unmagnetisch sind?

Lösung

Die Wellenzahlvektoren der einfallenden und transmittierten Welle lauten

$$k_{\mathrm{in}} = k_0(2\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

$$k_{\mathrm{tr}} = k_0(2\vec{e}_x + \mathrm{i}\vec{e}_y) \quad .$$

Der Normalenvektor ist hier $\vec{n} = -\vec{e}_y$. Das elektrische Feld zeigt in z-Richtung, steht also senkrecht zu $\vec{n}$ und ist somit bezüglich der Grenzfläche TE polarisiert. Der Faktor A ist der Transmissionsfaktor $A = t = 1 + r_{\mathrm{TE}}$. Somit resultiert

$$\begin{aligned} A &= 1 + \frac{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}})}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}})} = 2\frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}})} \\ &= 2\frac{k_0}{+k_0 - \mathrm{i}k_0} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\exp\{\mathrm{i}\pi/4\} \end{aligned}$$

Aufgabe 17

Bei $y = a$ stoßen zwei magnetische Medien aneinander. Sie werden durch die Materialgrößen μ_1 und $\mu_2 = 8\mu_1$ für $y < a$ bzw. $y \geq a$ beschrieben. In beiden Fällen ist $\varepsilon = 1$. Im Bereich $y > a$ fällt eine Welle unter den Winkel von $45\,°$ auf die Grenzfläche. Wie lautet der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle?

Lösung

Das Koordinatensystem kann bis auf die y-Richtung frei gewählt werden. Es sei so gewählt, dass die einfallende Welle in der x-y-Ebene liegt und sich in positive x-Richtung bewegt. Der Normalenvektor ist hier gemäß Definition $\vec{n} = -\vec{e}_y$. Die Wellenzahlen in den beiden Teilgebieten lauten $k_1 = k_0\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = k_0\sqrt{\mu_1}$ und $k_2 = k_0\sqrt{8\mu_1\varepsilon_1} = \sqrt{8}k_1$. Für den Wellenzahlvektor der einfallenden Welle (gemäß Aufgabenstellung im Bereich $y > 0$!) ist

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = k_2(\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_x - \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_y) = k_2(\vec{e}_x - \vec{e}_y)/\sqrt{2} = 2k_1(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \quad .$$

Für den Tangentialanteil der transmittierten Welle gilt nach Snellius $(\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}) \times \vec{n} = k_2\vec{e}_x/\sqrt{2} = 4k_1\vec{e}_x$. Der Normalanteil ergibt sich dann aus der Dispersionsrelation zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{k_1^2 - |\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}|^2} = -\sqrt{k_1^2 - 16k_1^2} = -\mathrm{i}k_1\sqrt{15} \quad .$$

Es resultiert also

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_1(4\vec{e}_x + \mathrm{i}\sqrt{15}\vec{e}_y) \quad .$$

Aufgabe 18

Die planare Oberfläche einer ideal leitfähigen Platte bei $z = 0$ ist mit der Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0 \sin\{\pi x/a\} \cos\{\pi y/b\}$ geladen. Welche Größe hat das elektrische Feld an der Grenzfläche im ansonsten freien Raum?

Lösung

Im Innenraum eines ideal leitfähigen Mediums gibt es gemäß Definition kein elektrisches Feld. Damit reduzieren sich die Stetigkeitsbedingungen für das elektrische Feld an der Grenzfläche außerhalb des Leiters zu

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{E}\Big|_{\text{Grenze}} &= 0 \\ \vec{n} \circ \vec{E}\Big|_{\text{Grenze}} &= \frac{-\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad . \end{aligned}$$

Hier ist die Grenzfläche durch $z = 0$ beschrieben, also ist der Normalenvektor durch $\vec{n} = \pm\vec{e}_z$ zu wählen. Er soll vom Außenraum auf den Leiter weisen. In der Aufgabenstellung ist nicht definiert, ob der Außenraum im Bereich $z \geq 0$ oder $z \leq 0$ liegt. Somit kann angenommen werden, dass der Außenraum im Bereich $z \geq 0$ zu finden ist und entsprechend gilt $\vec{n} = -\vec{e}_z$. Damit resultiert

$$\vec{E}\{z = 0\} = (\vec{n} \circ \vec{E})\Big|_{z=0} \vec{n} = \frac{-\varrho_0}{\varepsilon\varepsilon_0} \sin\{\pi x/a\} \cos\{\pi y/b\} \vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 19

Eine ideal leitfähige, unendlich lange, infinitesimal dünne, gerade Leiterbahn der Breite d wird homogen vom Strom J durchflossen. Wie groß ist die magnetische Induktion im Raum? Geben Sie den vollständigen Ausdruck (Differentialgleichung/Integral) an, der zur Lösung führt. Dabei müssen alle Größen korrekt eingesetzt und aufgelöst werden. Der Ausdruck selbst soll nicht gelöst werden.

Lösung

Die Stromdichte in dem Leiterband wird durch eine Flächenstromdichte mit

$$\vec{j} = J\frac{1}{d}\delta\{y\}\vec{e}_z$$

im Bereich $-d/2 \leq x \leq d/2$ beschrieben, wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass das Band in der x-z Ebene entlang der z-Achse liegt, und um $x = 0$ zentriert ist. Die magnetische Induktion und die Stromdichte im Raum hängen gemäß

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\mu_0\vec{j}$$

oder mit dem Biot-Savart-Gesetz

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \, \mathrm{d}^3 r'$$

zusammen. Da hier in der Stromdichte eine Diracfunktion enthalten ist, ist die Differentialgleichung als Lösungsansatz ungünstig und Biot-Savart zu bevorzugen. Es gilt $|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = ((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2)^{3/2}$, $\vec{j}\times(\vec{r}-\vec{r}') = (J/d)((x-x')\vec{e}_y-(y-y')\vec{e}_x)\delta\{y'\}$ Auswerten des Integrals in y-Richtung vereinfacht den Ausdruck und es resultiert

$$\vec{B} = \frac{\mu\mu_0 J}{4\pi d}\int\limits_{-d/2}^{d/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x-x')\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{((x-x')^2+y^2+(z-z')^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}z'$$