Aufgabe 1

Zwei Punktladungen sind mit Q und $-Q$ geladen und haben den Abstand d zueinander. Im Abstand $x < d/2$ zur positiven Ladung ist das Potential V_1 auf einer gedachten Verbindungslinie zwischen den Ladungen bekannt. Geben Sie einen weiteren Punkt auf der Verbindungslinie und ihrer Verlängerung an, an denen das Potential den selben Wert wie V_1 annimmt.

Lösung

Wird angenommen, dass die positiv geladene Punktladung im Koordinatenursprung $\vec{r}_1 = 0$ und die negative geladene Punktladung bei $\vec{r}_2 = d \cdot \vec{e}_x$ ist, so bestimmt sich das Gesamtpotenzial zu

$$V\{x, y, z\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2+z^2}}\right) \quad .$$

Der Abstand zu den Punktladungen bestimmt das Potential und nicht die Richtung, in der die Ladungen stehen. Deshalb sind die Betragsstriche wichtig. Ist das Potential nun an der Stelle $x_1 \cdot \vec{e}_x$ mit $V = V_1$ eingeprägt, so folgt

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|x_1|} - \frac{1}{|x_1 - d|}\right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{x_1}\frac{d-2x_1}{d-x_1} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot k_1 \end{aligned}$$

mit $k_1 > 0$. Gesucht ist eine Stelle $x \cdot \vec{e}_x$ an der das selbe Potential herrschen soll wie V_1. Hierzu sind drei Fälle zu unterscheiden:

- $x < 0$

  Das Potential ist in diesem Bereich:

$$\begin{aligned} V\{x, y=0, z=0\} &= V_1 \\ \Rightarrow \frac{V_1 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{Q} &= \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-d|} = \frac{1}{|x_1|} - \frac{1}{|x_1-d|} = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{d-x_1} \end{aligned}$$

  Die Gleichung löst sich mit

$$\begin{aligned} -\frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} &= \frac{1}{x_1} - \frac{1}{d-x_1} = k_1 \\ \Rightarrow x &= \frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} - \frac{d}{k_1}} \quad . \end{aligned}$$

  Der Ausdruck innerhalb der Quadratwurzel ist immer positiv, da d und k_1 positiv sind. Der Ausdruck mit der Wurzel ist damit immer rein reell und positiv. Ein angenommenes

$x < 0$ wird nur erhalten mit dem negativen Vorzeichen vor der Wurzel. Die zweite Lösung erfüllt die Forderung aus der Fallunterscheidung nicht.

- $d/2 < x < d$

  Das Potential in diesem Bereich ist:

$$\begin{aligned}\frac{V_2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{Q} &= \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-d|} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{d-x} \\ &= \frac{d-2x}{-x^2+dx} \\ &< 0 \quad .\end{aligned}$$

  Um eine Lösung zu erhalten, sollte der Ausdruck gleich k_1 sein. Diese Bedingung ist nicht erfüllbar, da der Ausdruck immer negativ ist. Das Potential im untersuchten Bereich unterscheidet sich zumindest im Vorzeichen von V_1.

- $d < x$

  Das Potential in diesem Bereich ist:

$$\begin{aligned}\frac{V_2 \cdot 4\pi\varepsilon_0}{Q} &= \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x-d|} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{1}{x-d} \\ &= \frac{-d}{x^2-dx} \\ &< 0 \quad .\end{aligned}$$

  Auch dieses Potential unterscheidet sich zumindest im Vorzeichen von V_1. Es kann deshalb keine Lösung in diesem Bereich geben.

Aufgabe 2

Gegeben ist ein unendlich ausgedehntes Prisma mit $\mu \neq \epsilon = 1$ im freien Raum. Der Querschnitt des Prismas ist ein gleichschenkliges Dreieck, wie in der Abbildung skizziert. Ein Lichtstrahl fällt senkrecht zur z-Achse auf das Prisma, so dass der Strahl innerhalb des Prismas parallel zur Basis verläuft (siehe $k-$Vektor in der Abbildung). Wie ist der Winkel ϕ zu wählen, damit das Licht beim Verlassen des Prismas die gleiche Leistung hat wie beim Eintritt. Geben Sie die Richtung von $\vec{E}$ oder $\vec{H}$ an.

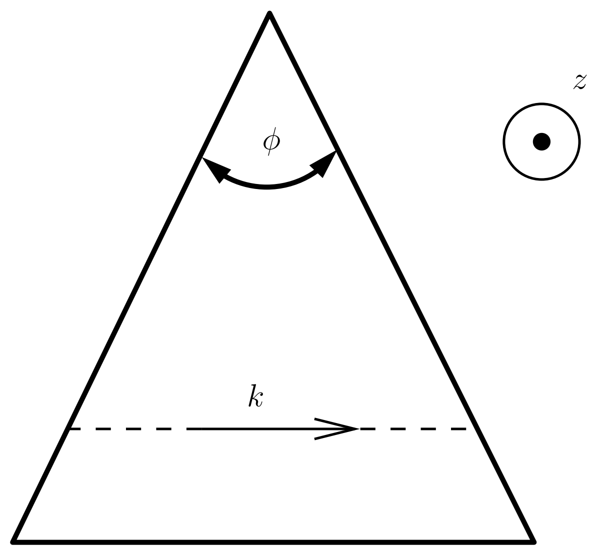


Abbildung 1: Schematische Darstellung des Prismenquerschnitts.

Lösung

Die Brewsterbedingung tritt in magnetischen Materialien für TE-polarisierte Wellen ein. Der Reflektionsfaktor

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{\frac{n_1 \sin\{\theta_1\}}{\mu_1} - \frac{n_2 \sin\{\theta_2\}}{\mu_2}}{\frac{n_1 \sin\{\theta_1\}}{\mu_1} + \frac{n_2 \sin\{\theta_2\}}{\mu_2}} \tag{1}$$

wird zu Null, wenn der Einfallswinkel zum Lot θ_1 senkrecht auf dem Ausfallswinkel θ_2 steht:$\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ mit $\theta_2 = \phi/2$. Wird nun $n_1 = 1$,$\mu_1\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ sowie $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2\mu_2}$ in Gleichung 1 eingesetzt und $r_{\mathrm{TE}} = 0$ gefordert, so folgt $\sqrt{\mu_2} = \tan\{\phi/2\}$ und $\phi = 2\arctan\left\{\sqrt{\mu_2}\right\}$.

Aufgabe 3

Ein Kreisring mit Durchmesser D ist mit ϱ_{L} geladen und hat den Abstand d zu einer mit ϱ_{S} geladenen unendlich ausgedehnten Fläche. Die Achse des Ringes zeigt in Normalenrichtung der Ebene. Welche Kraft wirkt auf den Ring?

Lösung

Zur Lösung wird angenommen, dass die Flächenladung in der Ebene $z = 0$ ist und die Linienladung mit Mittelpunkt bei $z > 0$ mit der Achse parallel zur $z-$Achse ausgerichtet ist. Dann geht von der Flächenladung ein elektrisches Feld $\vec{E} = \rho_\mathrm{S}/(2\varepsilon_0) \cdot z/|z| \cdot \vec{e}_z$ aus und die Linienladung hat die Parametrisierung $\rho_V = \rho_\mathrm{L}\delta\{2\rho - D\}\delta\{z - d\}$. Das Volumenintegral

$$\vec{F} = \int\int\int \vec{E}\{\vec{r}\} \cdot \rho_V \,\mathrm{d}^3 r \qquad (2)$$

liefert dann: $\vec{F} = \pi D \rho_\mathrm{L} \rho_\mathrm{S}/(2\varepsilon_0)\vec{e}_z$

Aufgabe 4

Ein hohler Zylinder ist so ausgerichtet, dass seine Achse mit der $z-$Achse zusammenfällt. Der Außendurchmesser des Zylinders ist D, der Innendurchmesser des Zylinders ist d. Der Zylinder ist endlich leitfähig (σ) und wird homogen von der Stromdichte $\vec{j} = j_0 \vec{e_z}$ durchflossen. Das Potential ist im Zylindermantel ($d \leq 2\rho \leq D$) an der Stelle $z = 0$ mit $V = 0$ eingeprägt. Welche Kraft wirkt auf eine Punktladung Q an der Stelle $x = y = z = 0$?

Lösung

Zur Bestimmung der Kraft auf die Punktladung gilt der Zusammenhang $\vec{F} = Q\vec{E}$. Das elektrostatische Potential V und das damit korrespondierende Feld $\vec{E}$ wirkt auf die Punktladung und hat seine Ursache nicht in der Punktladung. Aus diesem Grund, wird hier die Punktladung zwingenderweise bei der Auswertung der Raumladung ausgenommen. Im ansonsten raumladungsfreien Zylinder gilt deshalb die Laplacegleichung $\Delta V = 0$. In der Zylinderwand gilt $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ und damit $\vec{E} = j_0/\sigma \cdot \vec{e}_z$. Das Potential an der Zylinderinnenwand ist damit $V = -\int \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = C_0 - j_0 \cdot z/\sigma$. Da das Potential an der Stelle $z = 0$ eingeprägt ist folgt $C_0 = 0$. Die Laplacegleichung drückt sich in Zylinderkoordinaten über

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V \tag{3}$$

aus. Das Potential kann als Produkt $V = V_\rho \cdot V_z$ separiert werden. Durch diesen Separationsansatz ergeben sich zwei entkoppelte Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V_\rho\right) = 0 \tag{4}$$

sowie

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}V_z = 0 \quad . \tag{5}$$

mit den Lösungen $V_\rho = C_1 \cdot \ln\{\rho\} + C_2$ und $V_z = V_0 + V_1 \cdot z$, die sich direkt durch Umstellen und Integration ergeben. Wird gefordert, dass das Potential an der Stelle $x = y = z = 0$ einen endlichen Wert annimmt, so muss $C_1 = 0$ sein, sonst divergiert die Logarithmusfunktion. Das Potential vereinfacht sich zu $V = -j_0 z/\sigma$ und $\vec{F} = Q\vec{E} = -Q\nabla V = Qj_0/\sigma \cdot \vec{e}_z$.

Aufgabe 5

Zwei rechteckige Elektroden sind so angeordnet, dass eine bei $z = 0$ und die andere bei $z = c$ liegt. Beide liegen mit der Mitte auf der z-Achse und haben in x-Richtung die Länge a

bzw. in y-Richtung die Länge b. Zwischen den Elektroden befindet sich ein Dielektrikum mit homogener relativer Dielektrizitätszahl ε und Leitfähigkeit $\sigma = \sigma_0(x-a)^2(y-b)^4$, das bei Anlegen einer Spannung die Stromdichte $\vec{j} = j_0(x-a)^2(y-b)^4\vec{e}_z$ trägt. Die Anordnung kann als Parallelschaltung aus idealer Kapazität und Widerstand modelliert werden. Welche Größe hat der Widerstand?

Lösung

Der Widerstand einer Anordnung berechnet sich aus dem Quotienten der Potenzialdifferenz über der Anordnung und den Strom, der durch die Anordnung fließt. Die Stromdichte zwischen den Elektroden erzwingt das elektrische Feld

$$\vec{E} = \vec{j}/\sigma = j_0/\sigma\,\vec{e}_z \quad .$$

Damit resultiert die Spannung (Potenzialdifferenz) $U = j_0 c/\sigma$. Der Strom durch die Anordnung resultiert aus

$$\begin{aligned} J &= \iint \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\ &= \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-b/2}^{b/2} j_0(x-a)^2(y-b)^4\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = j_0\left[(x-a)^3/3\right]-a/2^{a/2}\left[(y-b)^5/5\right]-b/2^{b/2} \\ &= j_0(26a^3 242b^5)/(15\cdot 256) = j_0 a^3 b^5\frac{13\cdot 121}{15\cdot 64} \end{aligned}$$

und somit ist der Widerstand

$$R = \frac{c}{\sigma}\frac{1}{a^3b^5}\frac{15\cdot 64}{13\cdot 121} \quad .$$

Aufgabe 6

Eine kreisförmige Leiterschleife vom Radius R mit infinitesimal kleinem Spalt und unbegrenzter Leitfähigkeit wird axial homogen vom Magnetfeld B durchsetzt. Am Spalt wird die Spannung $U = U_0 \cos\{\omega t\}$ gemessen. Welche Größe hat das Magnetfeld?

Lösung

Hier muss das Faraday-Gesetz in der integralen Form

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}$$

angewendet werden. Das Flächenintegral über den Kreisring ergibt wegen des ortsunabhängigen Magnetfeldes, das senkrecht auf die Fläche steht, einfach die Fläche des Kreises πR^2, so dass nur noch die Zeitableitung bestimmt werden muss und somit

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B$$

resultiert. Die Leiterschleife ist ideal leitfähig, also darf entlang der Schleife kein elektrisches Feld existieren, sondern nur im Spalt. Das Wegintegral über den Spalt ergibt die Spannung

$$U_0 \cos\{\omega t\} = -\pi R^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B \quad ,$$

also lautet das Magnetfeld

$$B = -U_0 \sin\{\omega t\}/\pi R^2 \omega \quad .$$

Aufgabe 7

Das Lorentz-geeichte magnetische Vektorpotenzial lautet $\vec{A} = A_0 \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} \exp\{ax + by - \omega t\}$. Welche Größe hat das zugehörige elektrische Feld $\vec{E}$?

Lösung

Es gibt zwei mögliche Wege zur Lösung. Der einfachste Weg geht über das erste Maxwell-Gesetz, der etwas kompliziertere über die Bestimmung von Φ_{el}, das ja mit $\vec{E}$ über $\vec{E} = -(\nabla\Phi_{\mathrm{el}} + (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\vec{A})$ und mit $\vec{A}$ über die Lorentz-Eichung verknüpft ist.

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = -A_0 b \exp\{ax + by - \omega t\}\vec{e}_{\mathrm{z}}$$

$$\vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{D} = \nabla \times \vec{H} = -A_0 \frac{b}{\mu\mu_0} \exp\{ax + by - \omega t\}(b\vec{e}_\mathrm{x} - a\vec{e}_\mathrm{y}) \quad ,$$

also für $\vec{j} = 0$

$$\vec{E} = \frac{b}{\omega\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} A_0 \exp\{ax + by - \omega t\}(b\vec{e}_\mathrm{x} - a\vec{e}_\mathrm{y}) \quad .$$

Lorentz:

$$\nabla \circ \vec{A} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_\mathrm{el} = 0 \quad ,$$

also

$$\Phi_\mathrm{el} = \frac{a}{\omega\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} A_0 \exp\{ax + by - \omega t\}$$

und somit

$$\vec{E} = \left(-\frac{a}{\omega\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}(a\vec{e}_x + b\vec{e}_y) + \omega\vec{e}_x\right) A_0 \exp\{ax + by - \omega t\}$$

Mit der Dispersionsrelation $a^2 + b^2 = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0$

$$\vec{E} = \frac{b}{\omega\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0} A_0 \exp\{ax + by - \omega t\}(b\vec{e}_\mathrm{x} - a\vec{e}_\mathrm{y}) \quad .$$

Aufgabe 8

Im Bereich $y \geq b$ herrscht das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \sin\left\{\pi\frac{x}{a}\right\} \cdot \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \cdot \exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{z}$$

Die relative Dielektrizitätszahl ist ε. Der angrenzende Bereich $y < b$ ist feldfrei. Welche Ladungsdichte liegt in der Grenzfläche?

Lösung

Die Ladungsdichte in einer Grenzfläche hängt mit den Normalkomponenten der angrenzenden dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ über

$$\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_\mathrm{Grenze} = \varrho_\mathrm{S}$$

zusammen. Die Grenze ist durch $y = b$ gegeben, daher wird der Normalenvektor zu $\vec{n} = \vec{e}_y$ gewählt. Der Bereich $y < b$ ist feldfrei, also gilt $D_1 = 0$. Mit dem angegebenen Feld resultiert

$$\vec{D}_2 = E_0\varepsilon\varepsilon_0 \sin\left\{\pi\frac{x}{a}\right\} \cdot \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \cdot \exp\{i(\omega t - \beta z)\}\vec{e}_\mathrm{z}$$

und somit $\varrho_\mathrm{S} = 0$.

Bemerkung: Die Aufgabenstellung ist falsch: Die Stetigkeitsbedingung $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$ wird nicht erfüllt!

Aufgabe 9

Das magnetische Vektorpotenzial ist $\vec{A} = A_0 \cdot \exp\{i(\omega t - ax - \beta z)\}\vec{e}_z$ und das zugehörige skalare elektrische Potenzial $\Phi_{\mathrm{el}} = \Phi_0 \cdot \exp\{i(\omega t - ax - \beta z)\}$. Wie muss Φ_0 gewählt werden, damit die Wellengleichungen entkoppeln?

Lösung

Entkopplung der Potenziale entsteht, wenn die Lorentz-Eichung

$$\nabla \vec{A} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0$$

verwendet wird. Damit ergibt sich sofort

$$\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi_{\mathrm{el}} = \mathrm{i}\omega\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\Phi_0 \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax - \beta z)\}$$

$$\nabla \vec{A} = -\mathrm{i}\beta A_0 \cdot \exp\{\mathrm{i}(\omega t - ax - \beta z)\}$$

und somit

$$\Phi_0 = A_0 \frac{\beta}{\omega\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} \quad .$$

Aufgabe 10

Welche Polarisation weist das Feld

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_x \sin\{\omega t + \beta y\} \\ 0 \\ H_z \cos\{\omega t + \beta y\} \end{pmatrix} \quad ; \{H_x, H_z\} \in \mathbb{R}$$

auf?

Lösung

Die Polarisation einer Welle ergibt sich aus der Figur, die der Vektor des elektrischen Feldes bei fortlaufender Zeit an einem festen Ort beschreibt. Dafür wird das elektrische Feld entweder mit $\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E} = \nabla \times \vec{H}$ berechnet, oder man zerlegt $\vec{H}$ in die vier konstituierenden ebenen Wellen $\vec{H}1$ bis $\vec{H}_4$ und berechnet dann $\vec{E}1$ bis $\vec{E}_4$ mit $\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \vec{k} \times \vec{H}$. Die Überlagerung muss dann untersucht werden. Hier wird der erste Weg gewählt.

$$\nabla \times \vec{H} = -\beta \begin{pmatrix} H_z \sin\{\omega t + \beta y\} \\ 0 \\ H_x \cos\{\omega t + \beta y\} \end{pmatrix}$$

und somit

$$\vec{E} = \frac{\beta}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\begin{pmatrix} H_z\cos\{\omega t+\beta y\} \\ 0 \\ -H_x\sin\{\omega t+\beta y\}\end{pmatrix} \quad .$$

Für konstante Werte von y ist das hier ein Ellipse (für $|H_x| = |H_z|$ ein Kreis) in der x-z-Ebene. Die Welle läuft in $-y$-Richtung. Wird das Koordinatensystem mit x nach rechts und z nach oben gezeichnet, weist die y-Richtung in das Papier hinein. Der Zeiger des $\vec{E}$-Feldes läuft im Uhrzeigersinn solange $H_xH_z > 0$, also rechts um die y-Achse. Wegen der Ausbreitungsrichtung handelt es sich also um eine **links elliptisch polarisierte Welle**. Falls $H_xH_z < 0$ ist, dreht die Welle **rechts** um die Ausbreitungsrichtung.

Aufgabe 11

Bestimmen Sie den TE und TM Anteil von $\vec{E} = E_0\cdot\vec{e}_z\cdot\exp\{i(\omega t-\beta y\}$ bezüglich der Grenzfläche mit $\vec{n} = 0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_z$

Lösung

Zur Bestimmung der Polarisation einer Welle im Bezug auf eine Grenzfläche ist es am einfachsten, den Lateralvektor

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n}\times\vec{k}}{\|\vec{n}\times\vec{k}\|}$$

zu bestimmen. Der jeweilige Anteil von $\vec{E}$ bzw $\vec{H}$ in Richtung des Lateralvektors ist dann der TE bzw. TM Anteil.

Hier ist $\vec{k} = \beta\vec{e}_y$. Somit ergibt sich $(0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_z)\times(\beta\vec{e}_y) = \beta(-0.8\vec{e}_x + 0.6\vec{e}_z)$ und damit $\vec{e}_\ell = -0.8\vec{e}_x + 0.6\vec{e}_z$.

Der TE-Anteil von $\vec{E}$ lautet entsprechend

$$\vec{E}_{\mathrm{TE}} = (\vec{e}_\ell\circ\vec{E})\vec{e}_\ell = 0.6E_0\cdot\exp\{\mathrm{i}(\omega t-\beta y\}(-0.8\vec{e}_x + 0.6\vec{e}_z)$$

und der TM Anteil ist der Rest

$$\vec{E}_{\mathrm{TM}} = \vec{E} - \vec{E}_{\mathrm{TE}} = 0.8E_0\cdot\exp\{\mathrm{i}(\omega t-\beta y)\}(0.6\vec{e}_x + 0.8\vec{e}_z)$$

Aufgabe 12

An der Grenzfläche $y = 0$ lautet das Feld der reflektierten Welle ($y < 0$)

$$\vec{E}_{\mathrm{ref}} = E_0\cdot\exp\{i(\omega t - 2k_0x + k_0y)\}\vec{e}_z.$$

Die transmittierte Welle wird durch

$$\vec{E}_{\mathrm{tr}} = A\ E_0\ \exp\{-k_0 y + i(\omega t - 2k_0 x)\}\vec{e}_z \quad ; \quad A \in \mathbb{C}$$

beschrieben. Wie groß ist A, wenn beide Medien unmagnetisch sind?

Lösung

Die Wellenzahlvektoren der einfallenden und transmittierten Welle lauten

$$k_{\mathrm{ref}} = k_0(2\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

$$k_{\mathrm{tr}} = k_0(2\vec{e}_x - \mathrm{i}\vec{e}_y) \quad .$$

Der Normalenvektor ist hier $\vec{n} = \vec{e}_y$. Also muss gelten

$$k_{\mathrm{in}} = k_0(2\vec{e}_x + \vec{e}_y) \quad .$$

Das elektrische Feld zeigt in z-Richtung, steht also senkrecht zu $\vec{n}$ und ist somit bezüglich der Grenzfläche TE polarisiert. Der Wert E_0 ist die einfallende Feldstärke multipliziert mit dem Reflexionsfaktor, also $E_0 = E_{\mathrm{in}} r_{\mathrm{TE}}$. Das Produkt AE_0 ist $tE_{\mathrm{in}} = (1 + r_{\mathrm{TE}})E_{\mathrm{in}}$. Somit resultiert

$$\begin{aligned} A &= (1 + r_{\mathrm{TE}})/r_{\mathrm{TE}} \\ &= \left(1 + \frac{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}})}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}})}\right) \frac{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}})}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}})} = 2\frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}})} \\ &= 2\frac{k_0}{+k_0 - \mathrm{i}k_0} = \frac{2(1+\mathrm{i})}{2} = 1 + \mathrm{i} = \sqrt{2}\exp\{\mathrm{i}\pi/4\} \end{aligned}$$

Aufgabe 13

Bei $y = a$ stoßen zwei Medien aneinander. Sie werden durch die Materialgrößen ε_1 und $\varepsilon_2 = 0.5\varepsilon_1$ für $y < a$ bzw. $y \geq a$ beschrieben. In beiden Fällen ist $\mu = 1$. Im Bereich $y < a$ fällt eine Welle unter dem Winkel von 30° auf die Grenzfläche (gemessen gegen die Flächennormale). Wie lautet der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle?

Lösung

Das Koordinatensystem kann bis auf die y-Richtung frei gewählt werden. Es sei so gewählt, dass die einfallende Welle in der x-y-Ebene liegt und sich in positive x-Richtung bewegt. Der Normalenvektor ist hier gemäß Definition $\vec{n} = \vec{e}_y$. Die Wellenzahlen in den beiden Teilgebieten lauten $k_1 = k_0\sqrt{\mu_1\varepsilon_1} = k_0\sqrt{\varepsilon_1}$ und $k_2 = k_0\sqrt{\varepsilon_2} = k_0\sqrt{\varepsilon_1/2} = k_1/\sqrt{2}$. Für den Wellenzahlvektor der einfallenden Welle (gemäß Aufgabenstellung im Bereich $y \leq 0$) ist

$$\vec{k}_{\text{in}} = k_1(\sin\{\theta_{\text{in}}\}\vec{e}_x + \cos\{\theta_{\text{in}}\}\vec{e}_y) = k_1(\vec{e}_x + \vec{e}_y\sqrt{3})/2 \quad .$$

Für den Tangentialanteil der transmittierten Welle gilt nach Snellius $(\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}}) \times \vec{n} = k_1\vec{e}_x/2$. Der Normalanteil ergibt sich dann aus der Dispersionsrelation zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_2^2 - |\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}}|^2} = \sqrt{0.5k_1^2 - 0.25k_1^2} = k_1/2 \quad .$$

Es resultiert also

$$\vec{k}_{\text{tr}} = k_1(\vec{e}_x + \vec{e}_y)/2 \quad .$$

Aufgabe 14

Die planare Oberfläche einer ideal leitfähigen Platte trägt die Stromdichte $\vec{j}_{\text{S}} = j_0(\sin\{\pi x/a\}\vec{e}_y + \cos\{\pi y/b\}\vec{e}_x)$ geladen. Die Platte befindet sich im Bereich bei $z \geq 0$. Welche Größe hat das magnetische Feld an der Grenzfläche im ansonsten freien Raum?

Lösung

Im Innenraum eines ideal leitfähigen Mediums gibt es gemäß Definition kein elektrisches Feld und in der Folge kein magnetisches Feld. Damit reduzieren sich die Stetigkeitsbedingungen für das magnetische Feld an der Grenzfläche außerhalb des Leiters zu

$$\begin{aligned} \vec{n} \times \vec{H}\Big|_{\text{Grenze}} &= \vec{j}_{\text{S}} \\ \vec{n} \circ \vec{B}\Big|_{\text{Grenze}} &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Hier ist die Grenzfläche durch $z = 0$ beschrieben, die Platte befindet sich im Bereich $z > 0$. Also ist der Normalenvektor auf die Platte $\vec{n} = -\vec{e}_z$ zu wählen. Damit resultiert

$$(\vec{n} \times \vec{H})\Big|_{z=0} = j_0(\sin\{\pi x/a\}\vec{e}_y + \cos\{\pi y/b\}\vec{e}_x) \quad .$$

Der Tangentialanteil von $\vec{H}$ ist $(\vec{n} \times \vec{H}_1) \times \vec{n}$ und damit resultiert

$$\vec{H} = j_0(-\sin\{\pi x/a\}\vec{e}_x + \cos\{\pi y/b\}\vec{e}_y) \quad .$$

Aufgabe 15

Eine zirkular polarisierte Welle trifft auf die Grenzfläche zwischen Vakuum und Quarzglas ($n_2 = 1.52, \mu_2 = 1$). Die reflektierte und transmittierte Welle haben einen Winkel von 90° zueinander. Unter welchen Winkeln breiten sich einfallende und transmittierte Welle aus. Wie ist der reflektierte Anteil polarisiert?

Lösung

Nachdem reflektierter und transmittierter Anteil der Welle senkrecht zueinander stehen, handelt es sich beim Einfallswinkel θ_{in} um den Brewsterwinkel θ_{B}:

$$\theta_{\text{B}} = \theta_{\text{in}} = \arctan\left\{\frac{n_2}{n_1}\right\} \approx 56.66°$$

Der Winkel unter welchem sich der transmittierte Anteil ausbreitet, kann dann einfach über das Brechungsgesetz bestimmt werden:

$$\theta_{\text{tr}} = \arcsin\left\{\frac{n_1}{n_2}\sin\{\theta_{\text{in}}\}\right\} = \arcsin\left\{\frac{n_1}{n_2}\sin\left\{\arctan\left\{\frac{n_2}{n_1}\right\}\right\}\right\} \approx 33.34°$$

Beim Brewsterwinkel hat die reflektierte Welle nur den TE-Anteil. Das Feld schwingt senkrecht zur Einfallsebene, die Welle ist linear polarisiert.

Aufgabe 16

Eine monochromatische Welle breitet sich für $z < 0$ im Vakuum aus und trifft bei $z = 0$ auf ein Medium mit $\varepsilon = ?$ und $\mu = 4$. Das elektrische Feld von einfallender und transmittierter Welle ist gegeben durch

$$\vec{E}_{\text{in}} = (E_{\text{x}}, \text{i}E_{\text{x}}, 0) \cdot \exp\{\text{i}(kz - \omega t)\}$$

und

$$\vec{E}_{\text{tr}} = (\frac{1}{2}E_{\text{x}}, \frac{1}{2}\text{i}E_{\text{x}}, 0) \cdot \exp\{\text{i}(kz - \omega t)\}.$$

Bestimmen Sie die relative Dielektrizitätszahl ε (Zahlenwert) des Mediums.

Lösung

Anhand der gegebenen Felder von einfallender und transmittierter Welle kann man aus den Amplituden den Transmissionsfaktor ablesen:

$$t = \frac{1}{2}$$

Da die Welle sich nur in z-Richtung ausbreitet, handelt es sich um senkrechten Einfall zur Grenzfläche, d.h. es besteht kein Unterschied zwischen den TE- und TM-Anteilen. Es kann mit der vereinfachten Formel für den Transmissionsfaktor gerechnet werden:

$$t_{\mathrm{TE}} = \frac{2\frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}}{\frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} + \frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}} = \frac{1}{2}$$

Mit den Werten für Vakuum, gegebenem μ und dem Zusammenhang

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

kann nach der Dielektrizitätszahl ε aufgelöst werden:

$$\varepsilon = 36$$

Die Dielektrizitätszahl ε kann analog auch aus dem Reflexionsfaktor bestimmt werden, allerdings ist hier zu beachten, dass dieser mit $r_{\mathrm{TE}} = -\frac{1}{2}$ angesetzt werden muss.

Aufgabe 17

Im freien Raum sei der Realteil des elektrischen Feldes gegeben durch

$$\vec{E}(z,t) = E_0(1 + 2 \cdot \cos\{kz - \omega t\})\vec{e}_x.$$

Bestimmen Sie den Realteil des dazugehörigen Magnetfeldes ($\mathrm{Re}\{\vec{H}\}$).

Lösung

Die Bestimmung des zugehörigen Magnetfeldes erfolgt einfach über die Maxwell-Gleichung:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Mit der Beziehung $\vec{B} = \mu\vec{H}$ ergibt sich dann

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial z}E_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{y}} = -\mu\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} \\
\Leftrightarrow \quad &\frac{\partial}{\partial t}\vec{H} = \frac{E_0 k}{\mu} 2\sin\{kz - \omega t\}\vec{e}_{\mathrm{y}} \\
\Leftrightarrow \quad &\vec{H}(z,t) = \frac{E_0 k}{\mu\omega} 2\cos\{kz - \omega t\}\vec{e}_{\mathrm{y}}
\end{aligned}$$

Alternativer Lösungsweg

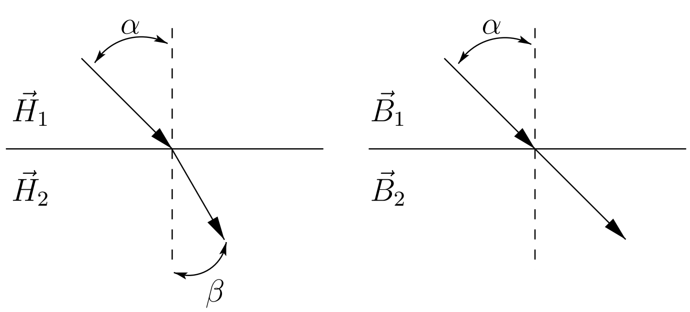
Man kann hier auch mit dem Ansatz

$$\vec{H} = \frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega\mu}, \qquad \vec{k} = k \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}},$$

rechnen, allerdings muss man beachten, dass der statische Anteil des $\vec{E}$-Feldes dann wegfallen muss, da er kein Magnetfeld erzeugt.

Aufgabe 18

Gegeben ist das $\vec{H}$- und $\vec{B}$-Feld am Übergang zweier homogener Materialien 1 und 2. Die Grenzfläche ist stromfrei. $\vec{B}$ und $\vec{H}$ sind räumlich und zeitlich konstant.



Geben Sie die Magnetisierung $\vec{M}$ im Medium 2 in Abhängigkeit von $\vec{B}_1$ und $\vec{H}_1$ an.

Lösung

Die Magnetisierung $\vec{M}$ im zweiten Medium kann über die Beziehung

$$\vec{B}_2 = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_2) \quad \Rightarrow \quad \vec{M}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2 - \vec{H}_2$$

bestimmt werden.
Für die magnetischen Flussdichten gilt: $\vec{B}_1 = \vec{B}_2$ (rechter Teil der Skizze).

Das $\vec{H}$-Feld im zweiten Medium kann zunächst in Tangential- und Normalkomponenten zerlegt

werden:

$$\vec{H}_2 = H_{2,\mathrm{t}}\vec{e}_{\mathrm{t}} + H_{2,\mathrm{n}}\vec{e}_{\mathrm{n}}$$

Aus der Stetigkeitsbedingung $H_{1,\mathrm{t}} = H_{2,\mathrm{t}}$ und der Beziehung $H_{1,\mathrm{t}} = H_1 \sin\{\alpha\}$ kann man den ersten Term

$$H_{2,\mathrm{t}}\vec{e}_\mathrm{t} = H_1 \sin\{\alpha\}\vec{e}_\mathrm{t}$$

ersetzen. Desweiteren können die Tangential- und Normalkomponente über

$$\tan\{\beta\} = \frac{H_{2,\mathrm{t}}}{H_{2,\mathrm{n}}}$$

dargestellt werden. Das Magnetfeld $\vec{H}_2$ im zweiten Medium kann man also durch

$$\vec{H}_2 = H_1 \sin\{\alpha\}\vec{e}_\mathrm{t} + H_1 \frac{\sin\{\alpha\}}{\tan\{\beta\}}\vec{e}_\mathrm{n}$$

ausdrücken, und für die Magnetisierung ergibt sich dann nur von den Größen $\vec{B}_1$, $\vec{H}_1$ und den gegebenen Winkeln α, β abhängige Ausdruck

$$\vec{M}_2 = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_2 - H_1 \cdot \left(\sin\{\alpha\}\vec{e}_\mathrm{t} + \frac{\sin\{\alpha\}}{\tan\{\beta\}}\vec{e}_\mathrm{n}\right)$$

Alternativer Lösungsweg

Man geht von der Beziehung

$$\vec{B}_2 = \mu_0(\vec{H}_2 + \vec{M}_2)$$

aus und verwendet direkt die Stetigkeitsbedingungen

$$\vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$
$$\vec{n} \times (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$
$$\vec{n} \circ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \neq 0$$
$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

Die Magnetisierung im zweiten Medium kann dann folgendermaßen hergeleitet werden.

$$\vec{n} \times \vec{B}_2 = \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_2) + \vec{n} \times \vec{M}_2 = \vec{n} \times \vec{B}_1$$
$$\vec{n} \times \vec{M}_2 = \vec{n} \times \vec{B}_1 - \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_1)$$

$$\vec{n} \circ \vec{B}_1 = \mu_0(\vec{n} \circ \vec{H}_2) + \vec{n} \circ \vec{M}_2$$
$$\vec{n} \circ \vec{B}_1 = \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_1 \tan\{\beta\}) + \vec{n} \circ \vec{M}_2$$
$$\vec{n} \circ \vec{M}_2 = \vec{n} \circ \vec{B}_1 - \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_1 \tan\{\beta\})$$

$$\Rightarrow \qquad \vec{M}_2 = (\vec{n} \circ \vec{M}_2) \circ \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{M}_2) \times \vec{n}$$
$$\vec{M}_2 = (\vec{n} \circ \vec{B}_1 - \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_1 \tan\{\beta\})) \circ \vec{n} + (\vec{n} \times \vec{B}_1 - \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_1)) \times \vec{n}$$