Aufgabe 1

Gegeben sind die folgenden elektrischen und magnetischen Feldkomponenten:

1. $\vec{E}_1(\vec{r}) = E_0 \cos\{kz - \omega t\}\vec{e}_x$
2. $\vec{E}_2(\vec{r}) = -\mathrm{i}E_0 \cdot \exp\{-\mathrm{i}(kz - \omega t)\}\vec{e}_y$
3. $\vec{E}_3(\vec{r}) = E_0(1 + 2 \cdot \cos\{kz - \omega t\})\vec{e}_x$
4. $\vec{H}_\mathrm{a}(\vec{r}) = \mathrm{i}\frac{D_0}{\omega Z^2 \varepsilon^2 \varepsilon_0{}^2} \cdot \exp\{-\mathrm{i}(kz - \omega t)\}\vec{e}_x$
5. $\vec{B}_\mathrm{b}(\vec{r}) = -\frac{E_0}{2\omega}(\exp\{-\mathrm{i}(\omega t - kz)\} - \exp\{\mathrm{i}(\omega t - kz)\})\vec{e}_y$
6. $\vec{B}_\mathrm{c}(\vec{r}) = \frac{E_0 k}{\omega} 2\cos\{\omega t - kz\}\vec{e}_y$

Der Wellenwiderstand Z ist folgendermaßen definiert:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}}$$

Entscheiden Sie, welche elektrischen und magnetischen Feldkomponenten zusammengehören. Einfaches Zuordnen wird nicht als Lösung akzeptiert, eine ausreichende Begründung bzw. Rechnung ist verlangt!

Lösung

Die Zuordnung der Komponenten kann mittels des Faraday'schen Gesetzes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

überprüft werden. Für eine schnellere Zuordnung hilft es zu wissen, dass die elektrischen und magnetischen Komponenten senkrecht aufeinander stehen müssen, d.h. man kann anhand der Richtungsvektoren schon manche Einschränkungen machen.

1. $\vec{E}_1(\vec{r})$ könnte nur zu $\vec{B}_\mathrm{b}(\vec{r})$ oder $\vec{B}_\mathrm{c}(\vec{r})$ passen:

   Aufgrund des Faktors 2 in $\vec{B}_\mathrm{c}(\vec{r})$ fällt diese Komponente als Lösung auch raus. Bleibt nur noch auf $\vec{B}_\mathrm{b}(\vec{r})$ zu prüfen.

   $$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial z}E_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{y} = -E_0\, k \sin\{kz - \omega t\}\vec{e}_\mathrm{y}$$

   Umschreiben von $\vec{B}_\mathrm{b}$:

   $$\vec{B}_\mathrm{b}(\vec{r}) = \frac{\mathrm{i}E_0}{\omega}\sin\{\omega t - kz\}$$

   Die zeitliche Ableitung $-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_b$ ergibt keine Übereinstimmung mit dem obigen Term.

2. $\vec{E}_1(\vec{r})$ könnte aufgrund der Richtungsvektoren nur zu $\vec{H}_\mathrm{a}(\vec{r})$ passen. 0

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial z} E_\mathrm{y} \vec{e}_\mathrm{x} = -E_0\, k \cdot \exp\{-\mathrm{i}(kz - \omega t)\} \vec{e}_x$$

$$\vec{B}_\mathrm{a}(\vec{r}) = \mathrm{i}\frac{D_0}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \cdot \exp\{-\mathrm{i}(kz - \omega t)\} \vec{e}_x = \mathrm{i}\frac{E_0}{\omega} \cdot \exp\{-\mathrm{i}(kz - \omega t)\} \vec{e}_x$$

Die zeitliche Ableitung $-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_a$ weicht um k ab.

3. $\vec{E}_3(\vec{r})$:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial z} E_\mathrm{x} \vec{e}_\mathrm{y} = -E_0\, k\, 2 \sin\{kz - \omega t\} \vec{e}_\mathrm{y}$$

Kann man schon erkennen, dass $\vec{B}_c$ die zugehörigen Komponente sein könnte, was sich durch die zeitliche Ableitung bestätigt

$$-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_c = -E_0\, k\, 2 \sin\{kz - \omega t\} \vec{e}_\mathrm{y}.$$

Aufgabe 2

Zwei Elektroden befinden sich entsprechend der Skizze im Abstand d voneinander. Der Zwischenraum ist mit einem Dielektrikum gefüllt, wobei

$$\varepsilon = \varepsilon_1 \frac{z - z_0 + a}{a}$$

gilt. Die Spannung zwischen den Elektroden ist U. Randeffekte sind nicht zu berücksichtigen. Welche Ladung befindet sich auf der Elektrode bei $x_0 + d$?

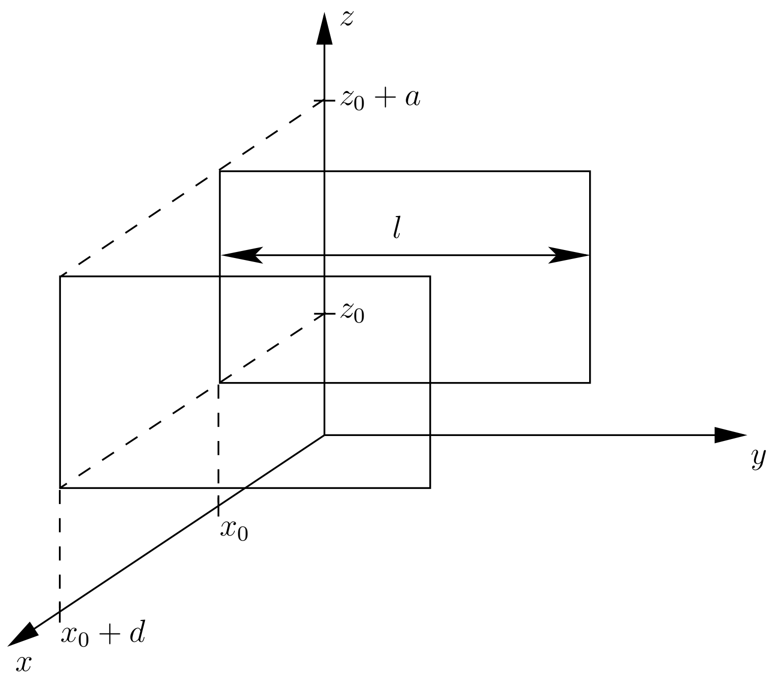
Lösung

Die Ladung auf der Elektrode bei $x_0 + d$ ist die Oberflächenladung, welche mit der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ zusammenhängt (mit deren Normalkomponente, hier D_x)

$$Q = \oint \vec{D} \circ d^2\vec{S} = \int\limits_{y=0}^{l} \int\limits_{z=z_0}^{z_0+a} D_\mathrm{x}\, dy\, dz.$$

Die dielektrische Verschiebung kann hier als

$$D_\mathrm{x} = \varepsilon_0\, \varepsilon\, E_\mathrm{x} = \varepsilon_0\, \varepsilon_1 \left(\frac{z - z_0 + a}{a} \right) \frac{U}{d}$$



geschrieben werden. Für die Ladung Q ergibt sich in diesem Fall

$$Q = \varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\frac{U}{d}\int\limits_{y=0}^{l}\int\limits_{z=z_0}^{z_0+a}\frac{z - z_0 + a}{a}\,dy\,dz = \varepsilon_0\,\varepsilon_1\,\frac{U\,l}{d\,a}\int\limits_{z=z_0}^{z_0+a} z - z_0 + a\,dy\,dz.$$

Als Lösung des Integrals erhält man

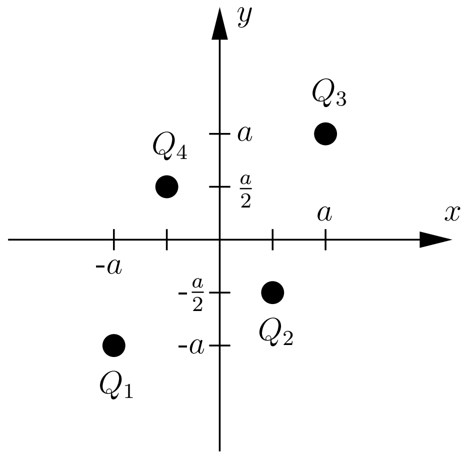
$$Q = \frac{3\,\varepsilon_0\,\varepsilon_1\,U\,l\,a}{2\,d}.$$

Aufgabe 3

Gegeben ist eine zweidimensionale Anordnung von vier Punktladungen entsprechend der Skizze, wobei $Q_1 = Q_3 = +Q$ und $Q_2 = Q_4 = -Q$ gilt.
Welche Feldstärke herrscht in den Koordinaten (0/0) und (-a/a)? Rechnung bzw. Begründung erforderlich!

Lösung

Feldstärke im Punkt (0/0):
Hier ist eine Rechnung zur Ermittlung der Feldstärke nicht notwendig. Aus der Symmetrie der Ladungsanordnung ergibt sich die elektrische Feldstärke zu 0.



Feldstärke im Punkt (-a/a):
Die elektrische Feldstärke kann nach der Formel

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum Q_1 \frac{\vec{r} - \vec{r'}_1}{|\vec{r} - \vec{r'}_1|^3}$$

bestimmt werden. Die Quellpunktvektoren und der Aufpunktvektor sind

$$\vec{r'_1} = -a\vec{e_{\mathrm{x}}} - a\vec{e_{\mathrm{y}}}$$
$$\vec{r'_2} = \frac{a}{2}\vec{e_{\mathrm{x}}} - \frac{a}{2}\vec{e_{\mathrm{y}}}$$
$$\vec{r'_3} = a\vec{e_{\mathrm{x}}} + a\vec{e_{\mathrm{y}}}$$
$$\vec{r'_4} = -\frac{a}{2}\vec{e_{\mathrm{x}}} + \frac{a}{2}\vec{e_{\mathrm{y}}}$$
$$\vec{r} = -a\vec{e_{\mathrm{x}}} + a\vec{e_{\mathrm{y}}}.$$

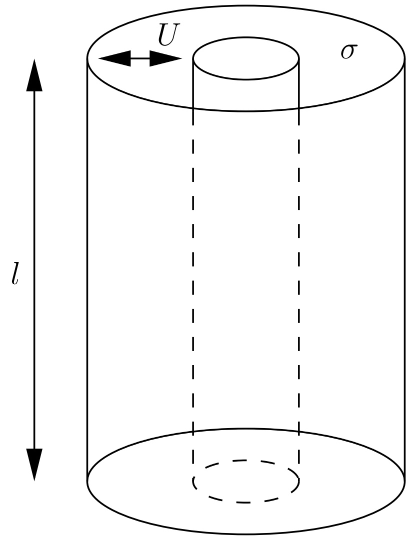
Einsetzten der Terme in die obige Formel liefert

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{2a\,\vec{e}_{\mathrm{y}}}{(4a^2)^{3/2}} - \frac{-\frac{3}{2}a\vec{e}_x + \frac{3}{2}a\vec{e}_x}{(\frac{9}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2)^{3/2}} + \frac{-2a\,\vec{e}_{\mathrm{x}}}{(4a^2)^{3/2}} - \frac{-\frac{1}{2}a\vec{e}_x + \frac{1}{2}a\vec{e}_x}{(\frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\,a^2}\left(\frac{1}{4}\vec{e}_y - \frac{\frac{3}{2}(\vec{e}_y - \vec{e}_x)}{(\frac{9}{2})^{3/2}} - \frac{1}{4}\vec{e}_x - \frac{\frac{1}{2}(\vec{e}_y - \vec{e}_x)}{(\frac{1}{2})^{3/2}}\right).$$

Aufgabe 4

Gegeben sind 2 Elektroden, die als Koaxialkabel angeordnet sind (siehe Skizze) mit den Innenradius r_i und Außenradius r_a. Das Material zwischen den Elektroden besitzt die homogene Leitfähigkeit σ. Desweiteren liegt zwischen den Elektroden die Spannung U an. Andere Spannungsabfälle sind nicht vorhanden.



Bestimmen Sie den Strom, welcher von der inneren zur äußeren Elektrode fließt.

Lösung

Ausgangspunkt für die Lösung der Aufgabe ist das Ohmsche Gesetz

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}.$$

Aus der koaxialen Anordnung gilt für die Feldstärke, dass es nur eine radiale Abhängigkeit gibt und das Feld nach außen hin mit $\frac{1}{\varrho}$ abfallen muss

$$\vec{E} = E_1\,\vec{e}_\varrho = \frac{R}{\varrho}\,E_0\,\vec{e}_\varrho,$$

wobei o.B.d.A. $R = r_\mathrm{a} - r_\mathrm{i}$ gesetzt wird. Den Strom von der inneren zur äußeren Elektrode, lässt sich mit

$$J = \iint_S d^2 J = \iint_S \vec{j} \circ d^2\vec{r}$$

bestimmen. Einsetzen des Ohmschen Gesetzes und des elektrischen Feldes in die obige Gleichung, als auch die Berücksichtigung der Zylinderkoordinaten, liefert den Ausdruck

$$J = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{l} \vec{E}\, \vec{e}_\varrho\, \varrho\, d\phi\, dz = \sigma \int_0^{2\pi} \int_0^{l} R\, E_0\, d\phi\, dz.$$

Was noch zur vollständigen Berechnung fehlt, ist der Zusammenhang des elektrischen Feldes (wurde bisher immer nur als E_1 bwz. als E_0 angesetzt) mit der angegebenen Spannung U. Zwischenschritt:

$$U = \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \vec{E} \circ dl = \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \frac{R}{\varrho} E_0\, \vec{e}_\varrho \circ d\varrho\, \vec{e}_\varrho = R\, E_0 \int_{r_\mathrm{i}}^{r_\mathrm{a}} \frac{1}{\varrho}\, d\varrho = R\, E_0 \ln\{\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}\}$$

D.h. die Feldstärke am Rand der inneren Elektrode ist

$$E_0 = \frac{U}{R \cdot \ln\{\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}\}}.$$

Nach Einsetzten in die letzte Gleichung für den Strom, ergibt sich als Lösung

$$J = \sigma \frac{U\, 2\pi\, l}{\ln\{\frac{r_\mathrm{a}}{r_\mathrm{i}}\}}.$$

Aufgabe 5

Eine zirkular polarisierte Welle fällt aus dem Vakuum unter dem Winkel $\theta_\mathrm{i} = 60°$ auf die Grenzfläche zum Material mit den Eigenschaften $\varepsilon = 2$ und $\mu = 2$. Wievel von der einfallenden Leistung wird an der Grenzfläche reflektiert?
Das Material hat nun die Eigenschaften $\varepsilon = 3$ und $\mu = 1$. Welcher Wert ergibt sich für den Reflexionsfaktor des zur Einfallsebene parallel polarisierten Anteils?

Lösung

Da die Welle zirkular polarisiert ist, sind TE- und TM-Anteil gleich groß, d.h. die Leistungsanteile sind zunächst auch gleich groß. Man kann mit den bekannten Reflexionsfaktoren für die jeweiligen Amplituden ansetzen

$$r_\mathrm{TE} = \frac{\cos\theta_\mathrm{in} - \frac{n_2 \cos\theta_\mathrm{tr}}{\mu}}{\cos\theta_\mathrm{in} + \frac{n_2 \cos\theta_\mathrm{tr}}{\mu}}$$

$$r_\mathrm{TM} = \frac{\cos\theta_\mathrm{in} - \frac{n_2 \cos\theta_\mathrm{tr}}{\varepsilon}}{\cos\theta_\mathrm{in} + \frac{n_2 \cos\theta_\mathrm{tr}}{\varepsilon}}.$$

Da das Material mit $\varepsilon = \mu = 2$ angegeben wurde, sind die Reflexionsfaktoren der Amplituden auch gleich groß $\Rightarrow r_{\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TM}}$. Der Ausbreitungswinkel θ_{tr} im Material kann entweder aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz

$$\theta_{\mathrm{tr}} = \arcsin\{\frac{n_1}{n_2}\sin\{\theta_{in}\}\},$$

oder alternativ mit etwas Umrechnung als

$$\cos\theta_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\mu\varepsilon - \sin^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}}$$

dargestellt werden. Für die Reflexionsfaktoren ergibt sich somit

$$r_{\mathrm{TE}} = r_{\mathrm{TM}} = \frac{0.5 - 0.5\sqrt{4-0.75}}{0.5 + 0.5\sqrt{4-0.75}} = \frac{-0.401}{1.401} = -0.286$$

Die reflektierte Leistung ist dann

$$R = \frac{r_{\mathrm{TE}}^2 + r_{\mathrm{TM}}^2}{2} = r_{\mathrm{TE}}^2 = 0.0818.$$

Im zweiten Teil sind die Materialeigenschaften abgeändert, so dass wegen $\mu = 1$ das Material unmagnetisch ist. Der zur Einfallsebene parallel polarisierte Anteil ist der TM-Anteil. Da das Material unmagnetisch ist, muss für den Brewster-Winkel

$$\theta_{\mathrm{B}} = \arctan\{\frac{n_2}{n_1}\}$$

genommen werden. Mit den gegebenen Materialeigenschaften ergibt sich dieser zu 60°, welches dem Einfallswinkel entspricht, d.h. der zur Einfallsebene parallel polarisierte Anteil erfährt keine Reflexion an der Grenzfläche$r_{\mathrm{TM}} = 0 \Rightarrow R_{\mathrm{TM}} = 0$.

Aufgabe 6

Ein in x und y-Richtung unendlich ausgedehnter Plattenkondensator ist mit einem Dielektrikum mit $\varepsilon = \exp\{-\frac{z}{d}\}$ gefüllt. Die Kondensatorplatte bei $z = d$ hat das Potenzial V_0, die Platte bei $z = 0$ hat das Potenzial $V = 0$. Bestimmen Sie den Potenzialverlauf im Dielektrikum. Wie lautet das Potential, wenn das Medium zwischen den Platten zusätzlich die Leitfähigkeit σ hat?

Lösung

Das elektrische Feld ist über $\vec{E}\{\vec{r}\} = -\nabla V\{\vec{r}\}$ und $\vec{D}\{\vec{r}\} = \varepsilon_0\varepsilon\{\vec{r}\}\vec{E}\{\vec{r}\}$ gegeben. Da die Raumladung über $\rho\{\vec{r}\} = \nabla \circ \vec{D}\{\vec{r}\}$ definiert ist, ergibt sich nach Auswertung der Divergenz

$$
\begin{aligned}
-\rho\{\vec{r}\} &= \nabla \cdot (\varepsilon_0\varepsilon\{\vec{r}\}\nabla V\{\vec{r}\}) && (1)\\
&= \varepsilon_0\varepsilon\{\vec{r}\}\Delta V\{\vec{r}\} + \varepsilon_0\nabla\varepsilon\{\vec{r}\} \circ \nabla V\{\vec{r}\} && (2)
\end{aligned}
$$

Es kann ein ladungsfreier Raum $\rho = 0$ angenommen werden. Der Kondensator ist in x und y-Richtung unendlich ausgedehnt, deshalb entfallen die partiellen Ableitungen $\partial/\partial x$ und $\partial/\partial x$ und es bleibt eine gewöhnliche Differentialgleichung von $V\{\vec{r}\} = V\{z\}$ stehen:

$$
\varepsilon_0 \exp\{-\frac{z}{d}\}\frac{\partial^2 V\{z\}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_0}{d}\exp\{-\frac{z}{d}\}\frac{\partial V\{z\}}{\partial z} = 0\,. \qquad (3)
$$

Das charakteristische Polynom dieser Differentialgleichung ist $\lambda^2 - \lambda/d = 0$ mit den Eigenwerten $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 1/d$. Damit kann das Potential mit $V\{z\} = C_0 \exp\lambda_0 z + C_1\exp\{\lambda_1 z\}$ mit den Konstanten C_0 und C_1 angesetzt werden. Als Randbedingungen sind in der Aufgabenstellung $V\{z=0\} = 0$ und $V\{z=d\} = V_0$ vorgegeben. Für die Konstanten bedeutet das $C_0 + C_1 = 0$ und $C_0 + C_1\exp\{1\} = V_0$. Aus diesen zwei Gleichungen können die Konstanten bestimmt werden und damit lautet das Potential $V\{z\} = \frac{V_0}{\exp\{1\}-1}\left(\exp\{\frac{z}{d}\} - 1\right)$.
Ist das Medium zwischen den Platten leitfähig, so muss immer die Kontinuitätsgleichung $\nabla \circ \vec{j}_\mathrm{V} + \partial\rho_\mathrm{V}/\partial t = 0$ erflüllt werden. Soll die Raumladung nicht ins Unendliche steigen, so muss $\vec{j}$ divergenzfrei sein. Für die gegebene Anordnung zwingt das $\vec{j} = j_0\vec{e}_z$ mit konstantem j_0. Entsprechend gilt dann $\vec{E} = \vec{j}/\sigma = j_0/\sigma\vec{e}_z$. Nur ein $V\{z\} = C_2 z + C_3$ kann dann $\vec{E}\{z\} = -\nabla V\{z\}$ erflüllen. Die Konstanten $C_2 = V_0/d$ und $C_3 = 0$ können aus den Randbedingungen bei $z = 0$ und $z = d$ bestimmt werden.

Aufgabe 7

Eine ebene Welle mit $\vec{k}_1 = n_1 k_0 \vec{e}_x$ im Medium mit der Brechzahl n_1 trifft auf eine ebene Grenzfläche mit der Flächennormalen $\vec{n} = (\vec{e}_x - 2\vec{e}_z)/\sqrt{5}$. Wie lautet der Wellenzahlvektor im angrenzenden Medium mit der Brechzahl $n_2 > n_1$?

Lösung

Der Ausbreitungsvektor kann immer in einen Anteil parallel zur Grenzfläche und einen Anteil senkrecht zur Grenzfläche zerlegt werden. Der tangentiale Anteil von k muss stetig sein: $\vec{n} \times (\vec{n} \times (\vec{k}_\mathrm{tr} - \vec{k}_\mathrm{in})) = 0$. Mit dem gegebenen $\vec{n}$ und $\vec{k}_\mathrm{in}$ folgt $k_{2\tan} = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{k}_2) = \vec{n} \times (\vec{n} \times \vec{k}_2) =$

$n_1 k_0(2/5\vec{e}_z + 4/5\vec{e}_x)$. Der Anteil senkrecht zur Grenzfläche ergibt sich aus der Dispersionsrelaton $k_2^2 = k_{2tan}^2 + k_{2\mathrm{norm}}^2 = n_2^2 k_0^2$. Damit ist

$$\begin{aligned} \vec{n}\cdot(\vec{k}_2 \circ \vec{n}) &= \vec{k}_{2\mathrm{norm}} && (4)\\ &= k_0\left(\frac{\vec{e}_x}{\sqrt{5}} - \frac{2\vec{e}_z}{\sqrt{5}}\right)\sqrt{n_2^2 - n_1^2 4/5}\,. && (5)\end{aligned}$$

Überlagert man die beiden Anteile ergibt sich nun

$$\vec{k}_2 = k_0\left(\frac{4}{5}n_1 + \frac{\sqrt{n_2^2 - n_1^2 4/5}}{\sqrt{5}}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{2}{5}n_1 - \frac{2\sqrt{n_2^2 - n_1^2 4/5}}{\sqrt{5}}\right)\vec{e}_z\,. \tag{6}$$

Aufgabe 8

Entlang der z-Achse sind geschlossene Kreisschleifen angeordnet. Beginnend mit einer Schleife bei $z = d/2$, in der der Strom I in $+\varphi$-Richtung orientiert ist, wechselt die Orientierung der Stromrichtung zwischen den im Abstand d benachbarten Leiterschleifen. Jede einzelne Schleife hat den Radius R und die von der Schleife aufgespannte Fläche liegt in der xy-Ebene mit Mittelpunkt auf der z-Achse. Bestimmen Sie das Magnetfeld $\vec{B}$ auf der z-Achse.

Lösung

Das Feld eine einzelnen Schleife mit Index i kann in Zylinderkoordinaten mit $\vec{j}_{\mathrm{V}i}\{\vec{r}'\} = I\delta\{z' - d/2 - id\}\delta\{\rho' - R\}\vec{e}_{\varphi'}$ parametrisiert werden. Das Magnetfeld ist dann auf Punkten entlang der z-Achse

$$\begin{aligned} \vec{B}_i\{\vec{r}\} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty} \delta\{z' - d/2 - id\}\,\delta\{\rho' - R\}\left(\vec{e}_{\mathrm{y}}\cos\{\varphi'\} - \vec{e}_{\mathrm{x}}\sin\{\varphi'\}\right)\\ &\quad\times \frac{(z-z')\vec{e}_{\mathrm{z}} - \rho'\vec{e}_{\mathrm{x}}\cos\{\varphi'\} - \rho'\vec{e}_{\mathrm{y}}\sin\{\varphi'\}}{\left((z-z')^2 + \rho'^2\cos^2\{\varphi'\} + \rho'^2\sin^2\{\varphi'\}\right)^{3/2}}\rho'\,\mathrm{d}\rho'\,\mathrm{d}\varphi'\,\mathrm{d}z'\\ &= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{((z - d/2 - id)^2 + R^2)^{3/2}}\vec{e}_{\mathrm{z}} && (7)\end{aligned}$$

Die Überlagerung der Felder unendlich vieler Leiterschleifen ist dann unter Beachtung der Stromrichtung in jeder Schleife i

$$\vec{B}_i\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0 I R^2}{2}\sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{(-1)^i}{((z - d/2 - id)^2 + R^2)^{3/2}}\vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{8}$$

Aufgabe 9

Eine Welle im Medium n_1 mit $\vec{E} = E_0 \cdot \exp\{i(\omega t + k_0 x/\sqrt{2} - k_0 z/\sqrt{2})\}(\vec{e}_x + \vec{e}_z)$ fällt auf eine Grenzfläche mit $\vec{n} = \vec{e}_x$ zum Medium $n_2 = n_1/3$. Beide Medien sind unmagnetisch. Wie sind die einfallende Welle und die an der Grenzfläche reflekierte Welle polarisiert (linear, elliptisch, zirkular)?

Lösung

Für Einfallswinkel $\theta > \theta_{\text{gr}} = \arcsin\{n_2/n_1\} = 19.5°$ wird jede TM- und TE-polarisierte Welle totalreflektiert. Der Einfallswinkel ergibt sich aus der Aufgabenstellung mit $\theta = \arccos\{\vec{n} \circ \vec{k}/\|\vec{k}\|\} = 45° > \theta_{\text{gr}}$. Die einfallende Welle hat eine TE- (der Anteil von $\vec{E} \circ \vec{n}$ also die $\vec{e}_z$ Komponente) und eine TM-Komponente (der $\vec{e}_x$-Anteil von $\vec{E}$), die mit der gleichen Phase schwingen. Deshalb ist die einfallende Welle linear polarisiert. Bei Totalreflektion wird der Betrag der Amplituden erhalten, die Teilkomponenten werden jedoch mit unterschiedlicher Phase zurückgeworfen. Der Reflexionsfaktor im TE-Fall wird durch

$$r_{\text{TE}} = \exp\{-2i\psi_{\text{TE}}\} \tag{9}$$

mit

$$\tan\{\psi_{\text{TE}}\} = \frac{\sqrt{n_1^2 \sin^2\{\theta\} - n_2^2}}{n_1 \cos\{\theta\}} \tag{10}$$

beschrieben. In analoger Weise ist der Phasenfaktor im TM-Fall

$$\tan\{\psi_{\text{TM}}\} = \frac{n_1^2}{n_2^2} \tan\{\psi_{\text{TE}}\}\,. \tag{11}$$

Die reflektieren Teilwellen haben damit gleiche Amplitude und die Relativphase $\Delta\phi = 2(\psi_{TM} - \psi_{TE}) \approx 4.11\pi$. Diese Phase passt nicht zu $N \cdot \pi$ (wie für eine linear polarisierte Welle notwendig) oder $\pi/2 + N \cdot \pi$ (wie für eine zirkular polarisierte Welle notwendig). Deshalb ist die reflektierte Welle elliptisch polarisiert.

Aufgabe 10

Eine nichtisoliertes Hochspannungskabel liegt in gerader Linie auf der Erdoberfläche. Bedingt durch den Ableitstrom nimmt der Strom im Kabelquerschnitt mit 100 A/m entlang des Kabels ab. Das Kabel ist ideal leitfähig und der Kabelquerschnitt ist vernachlässigbar klein. Die unendlich ausgedehnte ebene Gegenelektrode ist sehr tief im Erdreich mit $\varepsilon = 10$ und σ =0.01 $1/(\text{Ohm} \cdot \text{m})$ vergraben. Bestimmen Sie das elektrische Feld auf der Erdoberfläche in Betrag und Richtung.

Lösung

Das Kabel ist unendlich leitfähig. Deshalb existiert innerhalb des Kabels kein elektrisches Feld. Aufgrund der Randbedingung am Kablemantel muss deshalb auch ausserhalb des Kabels $\vec{E} \circ \vec{e}_z = \vec{j} \circ \vec{e}_z = 0$ sein, wenn das Kabel entlang der z-Achse verläuft. Aufgrund der Drehsymmetrie und der weit entfernten Gegenelektrode fallen im Erdreich ($y \leq 0$) die partiellen Ableitungen $\partial/\partial\phi$ weg. Die Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten $\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial V}{\partial\rho}) = 0$ liefert nach doppelter Integration den Ansatz für das elektrostatische Potential $V = \log\{\rho/\rho_0\} + V_0$. Das elektrische Feld ergibt sich dann zu $\vec{E} = -\nabla V = E\{\rho\}\vec{e}_\rho$ und ebenso $\vec{j} = j\{\rho\}\vec{e}_\rho$. Zudem kann durch Integration der Strom durch einem Halbzylindermantel vom Radius ρ durch $j\{\rho\} = I'/(\pi\rho)$ mit dem längenbezogenen Ableitstrom I'=100 A/m angegeben werden. Die Kontinuitätsgleichung wird erfüllt, da $\vec{j}$ divergenzfrei ist. Damit ist das elektrische Feld an der Erdoberläche bestimmbar: $\vec{E}\{y = 0\} = I'\vec{e}_x/(\pi\sigma x) = E_0\vec{e}_x/x$ mit $E_0 = 3183\,\mathrm{V}$.

Aufgabe 11

Außerhalb einer dielektrischen Kugel mit Radius R und relativer Dielektrizitätszahl ε herrscht die Feldstärke $\vec{E} = E_0/r^2\vec{e}_r$. Für die Beschreibung wurde der Ursprung des Koordinatensystems auf die Kugel zentriert. Welche Ladung enthält die Kugel?

Lösung

Die Ladung der Kugel kann durch

$$Q_\mathrm{V} = \oiint\limits_{S_\mathrm{V}} \vec{D} \circ \mathrm{d}\vec{r}^2$$

bestimmt werden. Dabei wird die Integrationsfläche auf der Oberfläche der Kugel gewählt, also $\mathrm{d}\vec{r}^2 = R^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\vec{e}_r$. Die dielektrische Verschiebung an der Oberfläche ergibt sich aus der elektrischen Feldstärke im freien Raum zu $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 E_0/R^2\vec{e}_r$ und somit ist die Ladung der Kugel

$$Q_\mathrm{V} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varepsilon_0 E_0 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi = 4\pi\varepsilon_0 E_0 \quad .$$

Anmerkung: Man hätte auch D auf der Innenseite der Kugeloberfläche nehmen können. Da aber die Normalkomponente von D stetig ist (keine Oberflächenladung), wird das Ergebnis nicht verändert.

Aufgabe 12

In einem homogenen leitfähigen Medium mit σ, ε fließt in der Nähe der Grenzfläche $y = 0$ die Stromdichte $\vec{j} = (j_1\vec{e}_x + j_2\vec{e}_y)\sin\{2\pi t/T\}$. Welche Feldstärke stellt sich im angrenzenden Vakuum an der Grenzfläche ein?

Lösung

An der Grenzfläche gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned}\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0\\ \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \varrho_\mathrm{S}\\ \vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) &= \frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{S}\end{aligned}$$

Die Grenzfläche $y = 0$ bedeutet, dass der Normalenvektor parallel zur y- Richtung ist. Gewählt: $\vec{n} = \vec{e}_y$. Damit ist der Bereich $y < 0$ mit dem Index 1 in den obigen Gleichungen zu nehmen. Hier wird das Medium in den Bereich 1 gelegt, da es keine Vorgabe dazu gibt. Zusätzlich müssen noch die Materialgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\\ \vec{j} &= \sigma\vec{E}\end{aligned}$$

berücksichtigt werden. Aus der ersten Stetigkeitsbedingung folgt direkt $(\vec{n} \times \vec{E}_2) \times \vec{n} = \frac{1}{\sigma}(\vec{n} \times \vec{j}) \times \vec{n} = \frac{1}{\sigma}j_1 \sin\{2\pi t/T\}\vec{e}_x$. Die zweite und dritte Stetigkeitsbedingung erfordern

$$\varepsilon_0 E_{2\mathrm{y}} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} j_2 \sin\{2\pi t/T\} = \varrho_\mathrm{S}$$

und

$$-j_2 \sin\{2\pi t/T\} = \frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{S} \quad .$$

Zeitliche Integration in der letzten Bedingung und Einsetzen in der vorletzten ergibt

$$j_2 \frac{T}{2\pi} \cos\{2\pi t/T\} = \varrho_\mathrm{S} \quad .$$

$$\varepsilon_0 E_{2\mathrm{y}} - \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} j_2 \sin\{2\pi t/T\} = j_2 \frac{T}{2\pi} \cos\{2\pi t/T\}$$

also

$$E_{2\mathrm{y}} = j_2\left(\frac{\varepsilon}{\sigma} \sin\{2\pi t/T\} + \frac{T}{2\pi\varepsilon_0} \cos\{2\pi t/T\}\right) \quad .$$

Aufgabe 13

In einem Magnetron durchlaufen Elektronen (Masse m_e, Ladung e) eine Kreisbahn vom Radius R mit der Frequenz f. Welche Richtung und Größe muss ein Magnetfeld haben, dass die Elektronen auf der Kreisbahn hält?

Lösung

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Elektronen in der x-y-Ebene rechts um die z-Achse kreisen. Die Kreisgeschwindikeit der Elektronen ist dann $\vec{\omega} = 2\pi f \vec{e}_z$ und die Umfangsgeschwindigkeit $\vec{v} = \vec{r} \times \omega|_{\rho=R} = R\omega\vec{e}_\phi$ mit $\vec{r} = \rho\vec{e}_\rho$. Somit ergibt sich eine Lorentzkraft von $\vec{F} = q(\vec{v}\times\vec{B}) = -eR\omega(\vec{e}_\phi\times\vec{B})$, die die Zentrifugalkraft $F = m(\vec{\omega}\times\vec{r})\times\vec{\omega} = m\omega^2 R\vec{e}_\rho$ kompensieren muss. Idealerweise steht das Magnetfeld senkrecht zur Bewegung des Elektrons, also parallel zu $\vec{\omega}$. Mit $\vec{B} = B\vec{e}_z$ resultiert aus $\vec{F}_\text{Lorentz}+\vec{F}_\text{Zentrifugal} = 0$ die Bedingung $-eR\omega B\vec{e}_\rho + m\omega^2 R\vec{e}_\rho = 0$ und somit für das Magnetfeld $B = m\omega/e$.

Aufgabe 14

Im freien Raum herrscht das konstante Magnetfeld $\vec{B}$. Eine kreisförmige Leiterschleife mit infinitesimalem Spalt und Radius R wird so angeordnet, dass ihr Querschnitt senkrecht vom Feld durchsetzt wird. Der Umfang der Leiterschleife wächst in der Zeit T gleichmäßig auf das Doppelte an. Welche Spannung wird in der Leiterschleife induziert?

Lösung

Als Ansatz wird das Faraday-Gesetz in integraler Form gewählt:

$$-\oint\limits_{\mathrm{C_S}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\mathrm{S}} \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \quad .$$

Die linke Seite ergibt auf Grund der idealen Leitfähigkeit der Leiterschleife einfach das negative Integral der Feldstärke über den Spalt, also den gesuchten Spannungsabfall am Spalt. Auf der rechten Seite ist zwar das Magnetfeld konstant, aber die Fläche wächst kontinuierlich. Es resultiert aus dem Integral $BS\{t\}$, wobei $S\{t\}$ die Fläche der Schleife zum Zeitpunkt t angibt. Die Vorgabe ist, dass der Umfang linear mit der Zeit innerhalb von T auf das Doppelte ansteigt. Demnach kann für den Radius die Gleichung $r = R_1 t/T + R_0$ angegeben werden. Zum Startzeitpunkt ist der Radius R, bei $t = T$ $2R$. Daraus folgt die Gleichung $r = R(t/T + 1)$ und die Fläche ist $S\{t\} = \pi r^2 = \pi R^2(1 + t/T)^2$. Somit ergibt sich $U = B(2\pi R^2/T)(1 + t/T)$.

Aufgabe 15

Eine Punktladung Q befindet sich im Abstand d zu einer homogenen Linienladung der Stärke ϱ_L. Welche Energie muss aufgebracht werden, um den Abstand zwischen den Ladungen auf ein Zehntel zu reduzieren?

Lösung

Die potenzielle Energie einer Ladung q hängt mit dem elektrischen Potenzial über $W = qV$ zusammen. Somit ist der Energieaufwand zur Verschiebung mit der Potenzialdifferenz zwischen Anfangs- und Endlage der Ladung proportional. Das Potenzial einer Linienladung ergibt sich aus

$$V = \ln\{\rho/\rho_0\}\varrho_\mathrm{L}/(2\pi\varepsilon_0) + V\{\rho_0\} \quad .$$

Somit ist die Potenzialdifferenz $V = \varrho_\mathrm{L}\ln\{\rho_1/\rho_2\}/(2\pi\varepsilon_0) = \varrho_\mathrm{L}\ln\{10\}/(2\pi\varepsilon_0)$ und die benötigte Energie wird

$$W = Q\varrho_\mathrm{L}\ln\{10\}/(2\pi\varepsilon_0) \quad .$$

Aufgabe 16

Im Inneren eines unendlich langen, geraden, ideal leitfähigen Metallrohres mit Querschnittabmessungen $a \times b$ herrscht das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \sin\{\pi x/a\}\cosh\{\pi z/a\}\vec{e}_y$. Hier wurde angenommen, das eine Kante des Rohres auf der z-Achse liegt und das die Seite mit Länge a parallel zur x-Achse orientiert ist. Welche Oberflächenladung wird auf den Rohrwänden induziert?

Lösung

Die Ladungsdichte auf einer Metallfläche errechnet sich aus dem angrenzenden Feld zu

$$\varrho_\mathrm{S} = -\vec{n} \circ \vec{D}$$

wobei der Normalenvektor jeweils auf die Metallfläche zeigt und das Feld an der Grenzfläche genommen werden muss. Das Innere des Metallrohres ist hier nicht gefüllt, also gilt $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$. Mit $D_0 = \varepsilon_0 E_0$ ergeben sich:

Für die Fläche $x = 0$ und $x = a$: $\vec{n} = \mp\vec{e}_x \rightarrow \varrho_\mathrm{S} = 0$.

Für die Fläche $y = 0$ und $y = a$: $\vec{n} = \mp\vec{e}_y \rightarrow$

$$\varrho_\mathrm{S} = \pm D_0 \sin\{\pi x/a\} \cosh\{\pi z/a\} \quad .$$

Die Ladung auf den Flächen errechnet sich aus der Integration über alle Flächen. Hier kompensieren sich gerade die Ladungen, so dass die Gesamtladung Null wird.

Aufgabe 17

Auf einer ebenen nicht leitfähigen Platine fließt der Strom J in einer Leiterschleife, die die Form eines regelmäßigen Sechsecks mit Kantenlänge a hat. Wie groß ist das Magnetfeld $\vec{B}$ im Abstand $2a$ zum Zentrum der Leiterschleife? Der Querschnitt der Leiterschleife kann infinitesimal klein angenommen werden. Hinweis: die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a ist $\sqrt{3}\,a^2/4$.

Lösung

Näherungslösung mit dem magnetischen Dipolmoment

Das Magnetfeld außerhalb einer Leiterschleife errechnet sich aus

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\vec{m} \circ (\vec{r}/|\vec{r}|))\vec{r}/|\vec{r}| - \vec{m}}{|\vec{r}|^3}$$

mit dem magnetischen Dipolmoment $\vec{m}$. Dieses Ergebnis gilt streng genommen nur, wenn der Aufpunkt im Vergleich zu den Linearabmessungen der Stromverteilung in großer Entfernung d liegt, was hier sicher nicht der Fall ist. Das Dipolmoment resultiert dabei aus dem Strom in der Leiterschleife und der von ihr umflossenen (ebenen) Fläche , also $m = 3\sqrt{3}a^2 I/2$. Die Richtung vom $\vec{m}$ ist so zu wählen, dass sie parallel zur Flächennormalen ist und der Strom mathematisch positiv um $\vec{m}$ fließt. Die Abfrage nach dem Magnetfeld im Abstand $2a$ vom Zentrum der Schleife ist ungenau gestellt. Hier gibt es zwei Extrema: einmal senkrecht über oder unter der Fläche und einmal in der Ebene der Fläche. Im ersten Fall resultiert

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\pm 3\vec{m} - \vec{m}}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(\pm 3 - 1)3\sqrt{3}a^2}{2z^3} I\vec{e}_z \bigg|_{z=2a} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\sqrt{3}}{8a} I\vec{e}_z \quad ,$$

im zweiten Fall ergibt sich einfach

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m}}{\varrho^3} \bigg|_{\varrho=2a} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3\sqrt{3}}{16a} I\vec{e}_z \quad .$$

Exakte Lösung mit dem Biot-Savart-Gesetz

Für einen Stromfaden der Länge ℓ, der sich in der Ebene $z = 0$ bei $y = -\sqrt{3}a/2$ befindet und in x-Richtung vom Strom Idurchflossen wird resultiert mit dem Biot-Savart-Gesetz

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-a/2}^{a/2} \frac{(y+\sqrt{3}a/2)\vec{e}_z - z\vec{e}_y}{((x-x')^2 + (y+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}((y+\sqrt{3}a/2)\vec{e}_z - z\vec{e}_y) \left[\frac{-1}{(y+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2} \frac{x-x'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2}} \right]_{-\ell/2}^{\ell/2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}((y+\sqrt{3}a/2)\vec{e}_z - z\vec{e}_y) \frac{-1}{(y+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2} \\
&\quad \left(\frac{x-\ell/2}{\sqrt{(x-\ell/2)^2 + (y+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2}} - \frac{x+\ell/2}{\sqrt{(x+\ell/2)^2 + (y+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2}} \right) \quad .
\end{aligned}$$

Für jedes der sechs Leiterstücke muss das Feld berechnet werden. Dazu ist es am einfachsten, obiges Ergebnis für ein jeweils um $\phi_n = n\pi/3$ verdrehtes Koordinatensystem (x_n, y_n, z) zu nehmen und die Koordinaten dann auf das ursprüngliche Koordinatensystem zu transformieren. Das Gesamtfeld ist die Überlagerung aus allen Teilfeldern.

So lange man nur das Feld auf der z-Achse betrachtet, wird es sehr einfach: Die y-Komponenten kompensieren sich und das Feld ist einfach das sechsfache des Feldes des einzelnen Stückes in z-Richtung:

$$\vec{B} = \frac{3\sqrt{3}a\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{3a^2/4 + z^2} \frac{\ell}{\sqrt{\ell^2/4 + 3a^2/4 + z^2}} \vec{e}_z \quad .$$

Hier ist $\ell = a$ und $z = 2a$ gemäß Aufgabenstellung zu verwenden, also resultiert

$$\vec{B} = \frac{3\sqrt{3}\mu_0 I}{4\pi} \frac{4}{19\sqrt{5}a} \vec{e}_z \quad .$$

Bei beliebiger Lage des Aufpunktes resultiert das Feld aus der Überlagerung der Felder der einzelnen Leiterstücke

$$\vec{B} = \sum_{n=0}^{6} \vec{B}_n$$

mit dem oben bestimmten Teilfeld

$$\begin{aligned}
\vec{B}_n &= \frac{\mu_0 I}{4\pi}((y_n+\sqrt{3}a/2)\vec{e}_z - z\vec{e}_{y_n}) \frac{-1}{(y_n+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2} \\
&\quad \left(\frac{x_n - a/2}{\sqrt{(x_n-a/2)^2 + (y_n+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2}} - \frac{x_n + a/2}{\sqrt{(x_n+a/2)^2 + (y_n+\sqrt{3}a/2)^2 + z^2}} \right) \quad ,
\end{aligned}$$

wobei die Koordinatentransformation gemäß

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\{\phi_n\} & \sin\{\phi_n\} \\ -\sin\{\phi_n\} & \cos\{\phi_n\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{x_n} \\ \vec{e}_{y_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\{\phi_n\} & \sin\{\phi_n\} \\ -\sin\{\phi_n\} & \cos\{\phi_n\} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

erfolgt.
Es ist sofort ersichtlich, dass die Näherungslösung in der Nähe der Stromverteilung deutliche Fehler aufweist. Die Fehler werden umso größer, je mehr man von der Achse senkrecht zur Verteilung in die Ebene der Verteilung geht. Hier erzwingen die Ecken in der Stromverteilung eine erhebliche Modulation der Feldstärke, die in der Näherungslösung völlig untergeht.

Aufgabe 18

Welche Polarisation weist die Welle $\vec{H} = H_0 \exp\{i(k_0 z - \omega t)\}(\vec{e}_x - i\vec{e}_y)$ auf?

Lösung

Bei der Welle handelt es sich um eine zirkular olarisierte Welle, da es eine Phaseverschebung von $\pi/2$ zwischen den ansonsten gleich großen Komponenten in x- und y- Richtung gibt. Ausbreitungsrichtung der Welle ist die z-Richtung, der Feldzeiger dreht rechts um diese Richtung. Somit handelt es sich um eine rechts zirkular polarisierte Welle.

Aufgabe 19

Wie ist die Welle $\vec{H} = H_0 \exp\{i(k_0 z - \omega t)\}(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ bezüglich der Grenzfläche $(\vec{r} + a\vec{e}_x) \circ (\vec{e}_x + \vec{e}_y) = 0$ polarisiert?

Lösung

In der Aufgabe ist die Fläche in der Hesseschen Normalform angegeben: $(\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \vec{n} = 0$. Hier ist $\vec{r}_0$ ein Vektor, der auf einen Punkt in der Fläche zeigt. Somit ergibt sich $\vec{n} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$. Die Welle hat den Ausbreitungsvektor $\vec{k} = k_0 \vec{e}_z$. Für die Bestimmung der Polarisation bezüglich der Grenzfläche wird der Vektor $\vec{e}_\ell = \frac{\vec{k} \times \vec{n}}{\|\vec{k} \times \vec{n}\|} = (-\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ benötigt. Der TM-Anteil der Welle hat das magnetische Feld $\vec{H}_{\mathrm{TM}} = (\vec{e}_\ell \circ \vec{H})\vec{e}_\ell = 0$. Somit muss es sich hier um eine bezüglich der Grenzfläche TE-polarisierte Welle handeln.