Aufgabe 1

Ein unendlich langer gerader Hohlzylinder (r_1, $r_2 > r_1$) führt die homogene Stromdichte j parallel zur z-Achse in positiver Richtung. Bestimmen Sie das magnetische Feld $\vec{H}$ im gesamten Raum.

Lösung

Aufgabe 2

Eine Kugel mit der Ladung $-Q$ schwebt im Abstand h unter dem Mittelpunkt einer kreisförmigen homogenen Linienladung mit dem Radius R. Die Gesamtladung der Linienladung ist Q. Bestimmen Sie die Masse der Kugel.

Lösung

Aufgabe 3

Gegeben ist die Stromdichte auf der Oberfläche ($\vec{n} = \vec{e}_\mathrm{y}$) eines idealen Leiters mit $\vec{j}_s = j_0(\cos\{\omega t - kz\})\vec{e}_\mathrm{z}$. Welche Oberflächenladungsdichte korrespondiert dazu?

Lösung

Aufgabe 4

Ein geladener Teilchenstrom tritt mit der Geschwindigkeit v senkrecht durch die Eingangsbohrung eines Massenspektrometers. Innerhalb des Spektrometers wird ein Feld ($\vec{E}$ oder $\vec{B}$) angelegt, so dass die Teilchen der Ladung q abgelenkt werden. Die gegenüberliegende Wand des Spektrometers befindet sich in der Entfernung l. Berechnen Sie die Ablenkung h eines Partikels der Masse m von der ursprünglichen Flugbahn, wenn jeweils nur ein elektrisches oder magnetisches Feld angelegt wird.

Lösung

Aufgabe 5

Wie groß ist die zeitgemittelte Energieflußdichte der Welle

$$\vec{E} = E_0(\cos\{\omega t - k_\mathrm{x}x - k_\mathrm{z}z\} + \cos\{\omega t + k_\mathrm{x}x - k_\mathrm{z}z\})\vec{e}_\mathrm{y}?$$

Lösung

Aufgabe 6

Gegeben sind im ladungsfreien Raum die Potenziale
$\vec{A} = C_1\varepsilon_0\mu_0 t\,[(x^2+z^2)\cdot\vec{e}_x + 2(x-x_0)y\cdot\vec{e}_y + xy\cdot\vec{e}_z]$ und $\phi = -2C_1xt^2$ mit der Konstanten C_1. Bestimmen Sie die Eichfunktion Λ so, dass Lorentzeichung gilt. **Hinweis:** Es gibt unendlich viele Lösungen, eine reicht!

Lösung

Die Lorentzeichung fordert

$$\nabla\circ\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = 0$$

Einsetzen von $\nabla\circ\vec{A} = C_1\varepsilon_0\mu_0 t\,[2x + 2(x-x_0)]$ und $\frac{\partial}{\partial t}\phi = -4C_1xt$ ergibt mit $\mu = 1$, $\varepsilon = 1$

$$\begin{aligned}\nabla\circ\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi &= C_1\varepsilon_0\mu_0 t\,[2x + 2(x-x_0)] - \varepsilon_0\mu_0 4C_1xt\\ &= C_1\varepsilon_0\mu_0 t\,[2x + 2(x-x_0) - 4x]\\ &= -C_1\varepsilon_0\mu_0 2x_0t \quad .\end{aligned}$$

Die Lorentzeichung ist also zunächst nur für $x_0 = 0$ erfüllt. Eine Eichung mit Λ bewirkt das neue magnetische Vektorpotenzial $\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda$ und das modifizierte skalare Potenzial $\phi' = \phi\frac{\partial}{\partial t}\Lambda$ zu den selben Feldern $\vec{B}$ und $\vec{E}$ führen. Die Eichfunktion muss der Bedingung

$$\nabla\circ\vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\phi = -\Delta\Lambda + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda$$

also

$$-C_1\varepsilon_0\mu_0 2x_0t = -\Delta\Lambda + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda$$

genügen. Offensichtlich hängt der Quellterm der inhomogenen Wellengleichung für Λ nur von der Zeit ab. Somit bietet sich der Ansatz $\Delta\Lambda = 0$ an und es resultiert

$$\Lambda = -C_1 x_0 \frac{t^3}{3}$$

Aufgabe 7

In der x-y-Ebene fließt ein Strom mit der Dichte j_S in y-Richtung. Bestimmen Sie das Feld $\vec{B}$ ausserhalb der x-y-Ebene.

Hilfsintegrale:

$$\int \frac{1}{(a^2+t^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}t = \ln\left\{t + \sqrt{a^2+t^2}\right\}$$

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\{t/a\}$$

$$\int \frac{1}{(a^2+t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}$$

Lösung

Das Magnetfeld kann mit Hilfe des Biot-Savart-Gesetzes bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{\vec{j}\{\vec{r'}\}\times(\vec{r}-\vec{r'})}{|\vec{r}-\vec{r'}|^3}\,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \frac{j_\mathrm{S}}{4\pi}\iiint \frac{\delta z' \vec{e}_y \times ((x-x')\vec{e}_x + (y-y')\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z)}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}^3}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \\
&= \frac{j_\mathrm{S}}{4\pi}\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{-(x-x')\vec{e}_z + z\vec{e}_x}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+z^2}^3}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \\
& t = y - y' \\
&= \frac{j_\mathrm{S}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(-(x-x')\vec{e}_z + z\vec{e}_x)\left[\frac{1}{(x-x')^2+z^2}\frac{t}{\sqrt{(x-x')^2+z^2+t^2}^3}\right]_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x' \\
&= \frac{j_\mathrm{S}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{-(x-x')\vec{e}_z + z\vec{e}_x}{(x-x')^2+z^2}\,\mathrm{d}x' \\
&= \frac{j_\mathrm{S}}{2\pi}\left[\frac{z}{|z|}\arctan\left\{\frac{t}{z}\right\}\vec{e}_x - \ln\{z^2+t^2\}\vec{e}_z\right]_{-\infty}^{\infty} = \mathrm{sign}\{z\}\frac{1}{2}j_\mathrm{S}\vec{e}_x \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 8

Ein in x und y-Richtung unendlich ausgedehnter Plattenkondensator ist mit einem Dielektrikum mit $\varepsilon = 1 + z/d$ gefüllt. Die Kondensatorplatte bei $z = d$ hat das Potenzial V_0, die Platte bei $z = 0$ hat das Potenzial $V = 0$. Bestimmen Sie den Potenzialverlauf im Dielektrikum.

Lösung

Hier muss das inhomogene Medium berücksichtigt werden. Das Ampérsche Gesetz führt in inhomogenen Medien auf die Form

$$\begin{aligned} \nabla \circ \vec{D} &= \varrho|_{\text{hier}} = 0 \\ \nabla \circ (\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) = \varepsilon_0 \nabla\varepsilon \circ \vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \nabla \circ \vec{E} &= \quad . \end{aligned}$$

Die relative Dielektrizitätszahl ε und ihr Gradient, der in z-Richtung zeigt, sind bekannt. Das Potenzial ändert sich in z-Richtung. Daher muss es wenigstens einige Orte geben, an denen eine z- Komponente des elektrischen Feldes existiert. Auf den beiden Rändern des betrachteten Gebietes ist das Potenzial von den beiden anderen Richtungen unabhängig. Daher wird hier ein Ansatz gemäß $\vec{E} = E\vec{e}_z$ gewählt. Obige Differentialgleichung reduziert sich nun auf

$$\begin{aligned} 0 &= E\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon + \varepsilon\frac{\partial}{\partial z}E \\ \frac{1}{E}\frac{\partial}{\partial z}E &= \frac{-1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial z}\varepsilon \\ \ln\{E\} &= -\ln\{\varepsilon\} + \ln\{c\} = \ln\left\{\frac{c}{\varepsilon}\right\} \end{aligned}$$

$$E = \frac{c}{\varepsilon} = \frac{c}{1 + z/d} = \frac{dc}{z + d} \quad .$$

Das zugehörige Potenzial hat den Verlauf

$$V = V\{0\} - \int_0^z E\bigg|_{z=t} \mathrm{d}t = V\{0\} - [dc\ln\{t + d\}]_{t=0}^z = V\{0\} - dc\ln\{1 + z/d\}$$

und aus den Randbedingungen $V\{0\} = 0$, $V\{z = d\} = V_0$ resultiert $-dc\ln\{2\} = V_0$ und damit

$$V = V_0\frac{\ln\{1 + z/d\}}{\ln\{2\}} \quad .$$

Aufgabe 9

Eine skalare Welle wird durch $E\{\vec{r}\} = u\{\vec{r}\}\exp\{\omega t - k(z - z_0)\}$ beschrieben. Welche Bedingung muss $u\{\vec{r}\}$ im ladungsfreien Raum erfüllen?

Lösung

Die Welle muss in jedem Fall die Wellengleichung erfüllen. In diesem Fall bedeutet das

$$\Delta\left(u\{\vec{r}\}\exp\left\{\omega t - k(z-z_0)\right\}\right) - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2 u\{\vec{r}\}\exp\{\omega t - k(z-z_0)\} = 0 \quad .$$

Anwenden der Produktregel und Verwendung von $k^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2$ führt auf

$$k^2 u\{\vec{r}\} + \Delta u\{\vec{r}\} - k^2 u\{\vec{r}\} = 0$$

mit der daraus resultierenden Bedingung

$$\Delta u\{\vec{r}\} = 0 \quad .$$

Aufgabe 10

Nach einem Blitzschlag in ein Auto hat sich das isoliert stehende Fahrzeug mit der Ladung Q aufgeladen. Welcher Strom ist für die Zeit T des Überschlags geflossen? Wählen Sie geeignete Annahmen zur Berechnung und benennen Sie diese.

Lösung

Zur Lösung wird die Kontinuitätsgleichung herangezogen:

$$\nabla \circ \vec{j} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho = 0 \quad .$$

Diese muss in die integrale Form überführt werden. Nach Volumenintegration über das Fahrzeug und Anwendung des Gaußschen Satzes resultiert

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{\text{Auto}} (\nabla \circ \vec{j})\,\mathrm{d}^3 r &= -\iiint\limits_{\text{Auto}} (\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho)\,\mathrm{d}^3 r \\
\oiint\limits_{\text{Auto}} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint\limits_{\text{Auto}} \varrho\,\mathrm{d}^3 r \\
J_{\text{Auto}} &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} Q_{\text{Auto}}
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass der Stromfluss während des Blitzschlags konstant war, resultiert $J_{\text{Auto}} T = Q_{\text{Auto}}$ und damit einfach $J_{\text{Auto}} = Q_{\text{Auto}}/T$.

Aufgabe 11

Welcher Strom muss durch die Spulen des Linearmotors einer Magnetschwebebahn der Masse m fließen, um diese im Feld eines Permanentmagneten der Stärke B anzuheben? Machen Sie geeignete Annahmen zur einfachen Berechnung und benennen Sie diese.

Lösung

Die Kraftwirkung wird durch die Lorentz-Kraft

$$\vec{F} = \iiint q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}\, \mathrm{d}^3 r$$

beschrieben. Unter der Annahme, dass die Stromdichte $\vec{j} = q\vec{v}$ innerhalb des Magnetfeldes $\vec{B}$ homogen verteilt, konstant sowie senkrecht zum Magnetfeld orientiert ist, resultiert recht einfach

$$F = \iiint jB\, \mathrm{d}^3 r \quad .$$

Das Integrationsvolumen wird so gelegt; dass es genau den stromdurchflossenen Querschnitt S der Spule umfasst. In der Längsrichtung wir das Volumen so groß gewählt, dass es den Bereich ℓ erfasst, in dem der Stromfluss vom Magnetfeld durchdrungen ist. Somit vereinfacht sich das Volumenintegral zu $F = jBS\ell = J\ell B$.

Aufgabe 12

Außerhalb einer als ideal leitfähige angenommenen Stahlplatte mit relativer Permeabilität μ existiert das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A} = A_0 \sin\{\pi x/a\} \cos\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_y$. Das Koordinatensystem liegt so, dass die Flächennormale der Platte in y-Richtung weist und der Ursprung auf der Oberfläche liegt. Bestimmen Sie die Flächenladungen und -ströme an der Grenzfläche.

Lösung

Zur Bestimmung der Flächenladungen und -ströme müssen die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{\mathrm{S}} &= \varrho_{\mathrm{S}} \\ \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{\mathrm{S}} &= \vec{j}_{\mathrm{S}} \end{aligned}$$

herangezogen werden. Die Felder im Raum außerhalb der Platte ergeben sich aus

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = A_0(\pi/a)\cos\{\pi x/a\}\cos\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_z + A_0\beta\sin\{\pi x/a\}\sin\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_x$$

und im stromfreien Raum aus $\nabla \times \vec{H} = \mathrm{d}\vec{D}/\,\mathrm{d}t$ wegen $\nabla \circ \vec{A} = 0$ zu

$$\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E} = \nabla \times \vec{B} = -\Delta\vec{A} = A_0\left((\pi/a)^2 + \beta^2\right)\sin\{\pi x/a\}\cos\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_y$$

und damit

$$\vec{E} = \frac{-A_0}{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}\frac{(\pi/a)^2 + \beta^2}{\omega}\sin\{\pi x/a\}\sin\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_y \quad .$$

Innerhalb der Platte existiert wegen der unendlich guten Leitfähigkeit kein elektrisches Feld und somit kein korrespondierendes Magnetfeld. Somit resultiert unter der Voraussetzung, dass die Platte im Bereich $y < 0$ liegt für die Flächenstromdichte

$$\vec{j}_\mathrm{S} = \vec{e}_y \times \vec{H} = \frac{A_0}{\mu\mu_0}\left((\pi/a)\cos\{\pi x/a\}\cos\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_x - \beta\sin\{\pi x/a\}\sin\{\beta z - \omega t\}\vec{e}_z\right)$$

und für die Flächenladungsdichte

$$\varrho_\mathrm{S} = \frac{-A_0}{\mu\mu_0}\frac{(\pi/a)^2 + \beta^2}{\omega}\sin\{\pi x/a\}\sin\{\beta z - \omega t\} \quad .$$

Aufgabe 13

Das magnetische Vektorpotenzial einer ebenen Welle sei durch $\vec{A} = A_0\exp\{i(k_0 z - \omega t)\}\vec{e}_x$ gegeben. Wie lautet das zugehörige Lorentz-geeichte elektrische Feld $\vec{E}$?

Lösung

Lorentz-Eichung verlangt

$$\nabla \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = 0 \quad .$$

Hier ist $\nabla\vec{A} = 0$ und somit gibt es nur ein nicht relevantes statisches Potenzial Φ. Das gesuchte Feld lautet demnach

$$\vec{E} = -(\nabla\Phi + \mathrm{d}\vec{A}/\,\mathrm{d}t) = i\omega A_0\exp\{i(k_0 z - \omega t)\}\vec{e}_x \quad .$$

Aufgabe 14

Das elektrische Feld in einem luftgefüllten Rechteckhohlleiter wird durch

$$\vec{E} = E_0 \cos\{8\pi x/a\} \cos\{6\pi y/b\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_z$$

beschrieben. Welche Größe muss β aufweisen?

Lösung

Der Raum im Hohlleiter ist strom- und ladungsfrei. Also gilt für $\vec{E}$ die homogene Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\vec{E} = 0 \quad .$$

Nach Einsetzen resultiert die Dispersionsrelation und somit

$$\beta^2 = \omega^2\varepsilon_0\mu_0 - (8\pi/a)^2 - (6\pi/b)^2 \quad .$$

Aufgabe 15

Ein Lichtstrahl fällt unter dem Winkel von $60\,^\circ$ gegen die Flächennormale auf die ebene Grenzfläche zwischen Wasser ($n = 1,5$) und Luft. Bestimmen Sie die Wellenzahlvektoren der reflektierten und transmittierten Wellen, wenn der Lichtstrahl aus dem Wasser kommt. Geben Sie die Wahl des Koordinatensystems an.

Lösung

Für die einfallende Welle resultiert aus den Angaben

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = 1.5k_0(\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{n} + \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_t) = (3/4)k_0(\vec{n} + \sqrt{3}\vec{e}_t)$$

wenn angenommen wird, dass die Normale vom Wasser zur Luft gerichtet ist. Die Werte für die trigonometrischen Funktionen wurden Tabelle 1 entnommen. Der Wellenzahlvektor der reflektierten Welle folgt zu

$$\vec{k}_{\mathrm{ref}} = (3/4)k_0(-\vec{n} + \sqrt{3}\vec{e}_t) \quad .$$

Bei der transmittierten Welle ist die tangentiale Komponente gleich, für die normale Komponente resultiert

$$(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}}) = k_0^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{in}}\|^2 = k_0^2(1 - (27/4)^2) = -11k_0^2/16$$

und somit

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = (k_0/4)(i\sqrt{11}\vec{n} + \sqrt{27}\vec{e}_t) \quad .$$

Tabelle 1: Wichtige Werte trigonometrischer Funktionen.

ϕ	$\sin\{\phi\}$	$\cos\{\phi\}$
$0\,°$	0	1
$30\,°$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{3}/2$
$45\,°$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$
$60\,°$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{1}/2$
$90\,°$	1	0

Aufgabe 16

Eine ebene Welle fällt unter dem Winkel von $60\,°$ (gemessen gegen die Flächennormale) auf die ebene Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien. Die Welle ist bezüglich der Grenzfläche TM-polarisiert, hat die magnetische Feldstärke H_{in} und läuft in einem Medium mit $\varepsilon = 9$. Im angrenzenden Medium gilt $\varepsilon = 4$. Wie lautet die elektrische Feldstärke $\vec{E}_{\mathrm{tr}}$ der transmittierten Welle?

Lösung

Zur Berechnung wird hier das Koordinatensystem (n, t, ℓ) herangezogen. Alternativ hätte auch das kartesische System heran gezogen werden können. Festlegung: $\vec{H}_{\mathrm{in}} = H_{\mathrm{in}}\vec{e}_\ell$, $\vec{k}_{\mathrm{in}} = k_1(\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{n} + \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_t)$, mit $k_1 = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{in}}\mu_{\mathrm{in}}}k_0 = 3k_0$ resultiert

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = (3k_0/2)(\vec{n} + \sqrt{3}\vec{e}_t) = (k_0/2)(3\vec{n} + \sqrt{27}\vec{e}_t) \quad .$$

Zur Berechnung des Transmissionsfaktors wird die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle benötigt. Mit $k_2 = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{tr}}\mu_{\mathrm{tr}}}k_0 = 2k_0$ resultiert $\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{k_2^2 - (\vec{e}_t \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})^2} = k_0\sqrt{4 - 27/4} = ik_0\sqrt{11}/2$ und somit

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = (k_0/2)(i\sqrt{11}\vec{n} + \sqrt{27}\vec{e}_t)$$

und damit der Transmissionsfaktor

$$t_{\mathrm{TM}} = \frac{2(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})/(\varepsilon_1)}{(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})/(\varepsilon_1) + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}})/(\varepsilon_2)} = \frac{2(3/18)}{3/18 + i\sqrt{11}/8} = \frac{8}{4 + i3\sqrt{11}} \quad .$$

Aus dem magnetischen Feld der transmittierten Welle

$$\vec{H}_{\mathrm{tr}} = t_{\mathrm{TM}} H_{\mathrm{in}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{tr}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \vec{e}_\ell$$

resultiert das elektrische Feld zu

$$\vec{E}_{\mathrm{tr}} = \frac{\vec{H}_{\mathrm{tr}} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\omega \varepsilon_2 \varepsilon_0} = H_{\mathrm{in}} \frac{k_0}{\omega \varepsilon_0} \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{tr}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \frac{i\sqrt{11}\vec{e}_t - \sqrt{27}\vec{n}}{4 + i3\sqrt{11}} \quad .$$

Aufgabe 17

Welche Polarisation weist die Welle

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} \vec{e}_y$$

bezüglich der durch $(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \circ (\vec{r} - a\vec{e}_x) = 0$ beschriebenen Fläche auf?

Lösung

Aus dem Vergleich zur Hesseschen Normalform der Ebene $\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0$ mit $(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \circ (\vec{r} - a\vec{e}_x) = 0$ resultiert für den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$. Das Skalarprodukt $\vec{n} \circ \vec{H}$ verschwindet nicht. Somit ist das Feld nicht rein TM polarisiert. Für das elektrische Feld

$$\vec{E} = \frac{1}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} \vec{k} \times \vec{H}$$

gilt ebenfalls $\vec{n} \circ \vec{E} \neq 0$. Somit ist das Feld bezüglich der Grenzfläche auch nicht rein TE polarisiert. Es liegt also bezüglich der Grenzfläche eine gemischt TE und TM polarisierte Welle vor.

Aufgabe 18

Wie lautet die Darstellung der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ einer elliptisch polarisierten, links drehenden Welle, deren Feldstärke in x-Richtung halb so groß wie die in z-Richtung ist?

Lösung

Grundsätzlich lautet das Feld

$$\vec{H} = (H_x \vec{e}_x + H_z \vec{e}_z) \exp\{i(ky - \omega t)\}$$

wenn man Ausbreitung in y-Richtung annimmt. Gemäß Aufgabenstellung muss $|H_y| = 2|H_x|$ sein. Elliptische Polarisation ergibt sich durch Phasenverschiebung zwischen den beiden Richtungen, hier $\Phi = \pi/2$. Also resultiert

$$\vec{H} = H_0(\vec{e}_x \pm i2\vec{e}_z) \exp\{i(ky - \omega t)\} \quad .$$

Für die Drehrichtung muss der Realteil gebildet und der zeitliche Verlauf des Zeigers an einem festen Ort verfolgt werden. Hier wird $y = 0$ gewählt. Dann resultiert unter Voraussetzung, dass H_0 reell ist

$$\mathrm{Re}\left\{\vec{H}\right\} = H_0(\cos\{\omega t\}\vec{e}_x \pm 2\sin\{\omega t\}\vec{e}_z) \quad .$$

Wird das Pluszeichen gewählt, dreht sich der Zeiger links um die y-Achse, beim Minuszeichen rechts herum. Damit resultiert

$$\vec{H} = H_0(\vec{e}_x + i2\vec{e}_z) \exp\{i(ky - \omega t)\} \quad .$$