Aufgabe 1 (6 Punkte)

In einem Material mit Dielektrizitätszahl ε wird das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \sin\{\omega t + kx\}\vec{e}_x$ gemessen. Welche Stromdichte $\vec{j}_{\text{frei}}$ herrscht in dem Gebiet? Es genügt, eine mögliche Lösung anzugeben.

Lösung

Aus dem Zusammenhang $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ resultiert, dass das Magnetfeld zeitunabhängig sein muss, weil die Rotation des elektrischen Feldes verschwindet. Das bedeutet, dass die rechte Seite in der Maxwell-Gleichung $\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}$ ebenfalls zeitunabhängig werden muss. Im Idealfall nimmt man an, dass die Rotation des Magnetfeldes verschwindet. Dann resultiert ganz einfach

$$\vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{D} = -\varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\varepsilon_0\varepsilon E_0\omega\cos\{\omega t + kx\} \quad .$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Zur Verbesserung der Lichtausbeute von Leuchtdioden wird deren Oberfläche strukturiert. Hier soll angenommen werden, dass die Oberfläche regelmäßig mit pyramidenförmigen Erhebungen aus einem Material mit der Brechzahl n_{p} beschichtet ist. Welchen Spitzenwinkel 2α gemäß Abbildung 1 müssen die Pyramiden mindestens aufweisen, damit das Licht, das in die Pyramide eintritt, die Oberfläche ohne Totalreflexion verlassen kann?

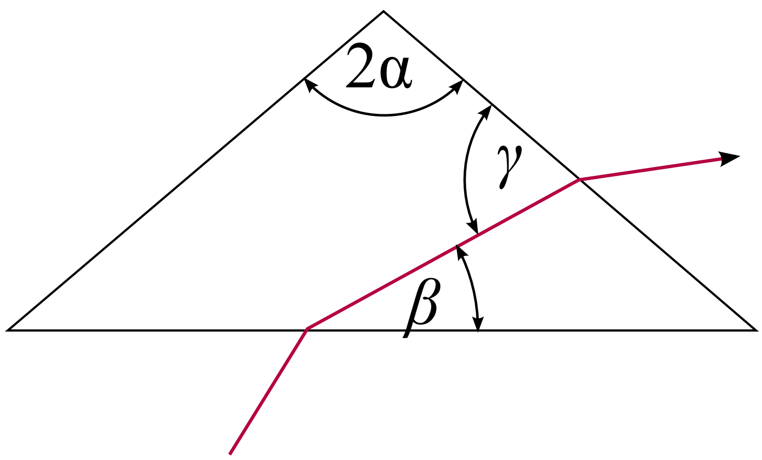


Abbildung 1: Pyramidenförmige Oberfläche einer Leuchtdiode. Das Licht tritt unter dem Winkel β an der Basis in die Pyramide ein und soll die Seitenfläche ohne Totalreflexion passieren.

Lösung

Eine Begrenzung des Lichtaustritts erfolgt durch Totalreflexion an der Grenzfläche zur Luft. Zur Feststellung der Bedingung für Totalreflexion muss der Winkel relativ zur Normale dort festgestellt werden. Hier wird der allgemeine Fall betrachtet. Der Winkel in dem Dreieck unten rechts ist $(\pi - 2\alpha)/2 = \pi/2 - \alpha$. Damit resultiert der Gegenwinkel zu γ zu $\pi - \beta - (\pi/2 - \alpha) = \pi/2 - \beta + \alpha$. Somit wird $\gamma = \pi/2 + \beta - \alpha$ und der Winkel zur Normale lautet $\alpha - \beta$. Zur Vermeidung von Totalreflexion muss

$$n_\mathrm{p} \sin\{\alpha - \beta\} \leq 1$$

bleiben. Es gilt $0 \leq \beta \leq \pi/2$. Im ungünstigsten Fall ($\beta = 0$) muss also

$$n_\mathrm{p} \sin\{\alpha\} \leq 1$$

eingehalten werden und für den halben Spitzenwinkel der Pyramide resultiert die Bedingung

$$\alpha \geq \arcsin\{1/n_\mathrm{p}\} \quad .$$

Das hätte man auch viel einfacher aus dem Winkel unten rechts entnehmen können. Der Winkel der Basis zur Normale der rechten Seitenfläche ist genau α, womit unter Anwendung des Snellius Gesetzes wie oben direkt die Bedingung für den Spitzenwinkel resultiert.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Im freien Raum fließt ein Flächenstrom in Form eines unendlich langen Hohlzylinders vom Durchmesser $2a$ in Richtung der Zylinderachse. Wie lautet die magnetische Induktion im gesamten Raum?

Lösung

Auf Grund der Zylindersymmetrie kann die magnetische Feldstärke nur eine Umfangskomponente bezüglich des Zylinders haben und darf nur vom Abstand zur Zylinderachse abhängen. Für die weitere Berechnung werden Zylinderkoordinaten verwendet. Die z-Achse liegt dafür auf der Achse des Zylinders. Mit Hilfe des Durchflutungsgesetzes resultiert sofort

$$\vec{H} = H_0 \vec{e}_\phi \begin{cases} 0 & 0 \leq \rho \leq a \\ a/\rho & a < \rho \end{cases} \quad ,$$

wobei H_0 aus der Größe des Flächenstroms $J = \iint j_\mathrm{s} \delta\{\rho - a\} \rho \, \mathrm{d}\rho \, \mathrm{d}\phi = j_\mathrm{s} 2\pi a$ zu j_s resultiert.

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Eine Welle mit elektrischem Feld $\vec{E} = E_0 \exp\{i(k_0 z - \omega t)\}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ fällt aus Luft auf die Grenzfläche zu einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 2. Die Grenzfläche enthält den Ursprung des Koordinatensystems und hat den Normalenvektor parallel zu $2\vec{e}_x + \vec{e}_z$. Berechnen Sie das elektrische Feld der reflektierten Welle.

Lösung

Für die Berechnung der Reflexion ist erforderlich festzustellen, welche Polarisation die einfallende Welle bezüglich der Grenzfläche aufweist. Dazu wird der Lateralvektor mit Hilfe des Normalenvektors $\vec{n} = (2\vec{e}_x + \vec{e}_z)/\sqrt{5}$ auf die Grenzfläche $\vec{n}$ und des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle $\vec{k}_{\text{in}} = k_0 \vec{e}_z$

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{n} \times \vec{k}}{|\vec{n} \times \vec{k}|} = -\vec{e}_y$$

bestimmt. Das elektrische Feld des TE-Anteils ist

$$\vec{E}_{\mathsf{TE}} = (\vec{e}_\ell \circ \vec{E})\vec{e}_\ell = E_0 \exp\{i(k_0 z - \omega t)\}\vec{e}_y \quad ,$$

Das des TM-Anteils der Rest:

$$\vec{E}_{\mathsf{TM}} = \vec{E} - \vec{E}_{\mathsf{TE}} = E_0 \exp\{i(k_0 z - \omega t)\}\vec{e}_x \quad .$$

Für die Berechnung der jeweiligen Reflexionsfaktoren werden noch die Normalkomponenten der Wellenzahlvektoren der einfallenden und der transmittierten Welle benötigt:

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} &= k_0/\sqrt{5} \\ \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} &= \sqrt{k_{\text{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|^2} \quad , \end{aligned}$$

wobei unter Berücksichtigung von $k_{\text{tr}} = n_{\text{tr}} k_0 = 2k_0$ mit der Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle $(\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}) \times \vec{n} = ((4/5)k_{\text{in}}\vec{e}_x) \times \vec{n} = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_z)k_0/5$ resultiert

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = (4/\sqrt{5})k_0 \quad .$$

Die Reflexionsfaktoren resultieren damit zu

$$\begin{aligned} r_{\mathsf{TE}} &= \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} - \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}}{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} + \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}} = 0.6 \\ r_{\mathsf{TE}} &= \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}/\varepsilon_{\text{in}} - \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}/\varepsilon_{\text{tr}}}{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}/\varepsilon_{\text{in}} + \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}/\varepsilon_{\text{tr}}} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Der Wellenzahlvektor der reflektierten Welle hat die selbe Tangentialkomponente wie die der einfallenden Welle, die Normalkomponente dreht sich um:

$$\vec{k}_{\mathrm{ref}} = (-2\vec{e}_x + 4\vec{e}_z)k_0/5 - (2\vec{e}_x + \vec{e}_z)k_0/5 = (-4\vec{e}_x + 5\vec{e}_z)k_0/5$$

und es resultiert

$$\vec{E}_{\mathrm{ref}} = 0.6E_0 \exp\{i(\vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_y \quad .$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Welchen Polarisationszustand weist die Welle

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - kx)\}\,((1+i)\vec{e}_y + (1-i)\vec{e}_z)$$

auf?

Lösung

Zur Feststellung des Polarisationszustandes muss der Realteil des elektrischen Feldes untersucht werden. Das elektrische Feld hängt bis auf die Richtung linear vom magnetischen Feld ab und resultiert bei der hier vorliegenden ebenen Welle aus $\omega\varepsilon_0\varepsilon\vec{E} = \vec{H} \times \vec{k}$ zu

$$\begin{aligned}
\omega\varepsilon_0\varepsilon\vec{E} &= H_0 k \exp\{i(\omega t - kx)\}\,((1-i)\vec{e}_y - (1+i)\vec{e}_z) \\
&= H_0 k \exp\{i(\omega t - kx)\}(1-i)(\vec{e}_y - i\vec{e}_z) \\
&= H_0 k\sqrt{2} \exp\{i(\omega t - kx - \pi/4)\}(\vec{e}_y - i\vec{e}_z) \\
&= H_0 k\sqrt{2} \exp\{i(\omega t - kx - \pi/4)\}(\vec{e}_y + \exp\{-i\pi/2\}\vec{e}_z) \\
&= H_0 k\sqrt{2} \exp\{i(\omega t - kx - \pi/4)\}(\vec{e}_y + \exp\{-i\pi/2\}\vec{e}_z) \quad .
\end{aligned}$$

Offensichtlich sind die Amplituden der Wellenanteile in y- und z-Richtung gleich groß. Gleichzeitig gibt es eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ zwischen den Anteilen. Somit handelt es sich um eine zirkular polarisierte Welle. Die Drehrichtung bezüglich der Ausbreitungsrichtung (x) resultiert aus der Betrachtung des Realteils:

$$\omega\varepsilon_0\varepsilon\mathrm{Re}\left\{\vec{E}\right\} = H_0 k\sqrt{2}\,(\cos\{\omega t - kx - \pi/4\}\vec{e}_y + \cos\{\omega t - kx + -\pi/4 - \pi/2\}\vec{e}_z) \quad .$$

Die Analyse erfolgt durch einsetzen zweier aufeinander folgender Zeitwerte t, so dass $\omega t - kx - \pi/4$ zunächst den Wet 0 und dann etwas größer wird, zum Beispiel $\pi/4$. Das elektrische Feld hat dann die Werte $E_0\vec{e}_y$ und $E_0\vec{e}_z$. Der Zeiger hat sich also in der y-z-Ebene nach links gedreht,

was eine Rechtsdrehung bezüglich der x-Achse bedeutet. Es handelt sich also um eine rechts zirkular polarisierte Welle.
Dies Ergebnis folgt wegen der Linearen Abhängigkeit auch direkt aus der Betrachtung des Magnetfeldes

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - kx)\}\left((1+i)\vec{e}_y + (1-i)\vec{e}_z\right) = H_0 \exp\{i(\omega t - kx)\}(1+i)\left(\vec{e}_y - i\vec{e}_z\right) \quad .$$

Mit der selben Berechnung wie oben findet man auch hier die Rechtsdrehung um die Richtung der Ausbreitung.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Wie lautet die Dispersionsrelation für die Gaußwelle

$$E = E_0 \cdot \left(1 - i\frac{z - z_0}{p^2 k}\right) \cdot \exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\} \cdot \exp\left\{i[k(z - z_0) - \omega t]\right\} \quad ,$$

die bei $z = z_0$ startet.

Hinweis: Verwenden Sie die Schreibweise $E = E_0 \cdot X \cdot Z \cdot T$ mit $X = \exp\left\{-\frac{x^2}{2p^2}\right\}$ und $Z = (1 - i(z - z_0)/(p^2 k)) \exp\left\{ik(z - z_0)\right\}$.

Lösung

Mit dem Ansatz aus der Aufgabe resultiert

$$T = \exp\left\{-i\omega t\right\} \quad .$$

Die Dispersionsrelation folgt, wenn man den Lösungsansatz für die Welle, hier die Gaußwelle, in die (homogene) Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0$$

einsetzt. Die hier angegebene vektorielle Wellengleichung wird in die skalare Wellengleichung

$$\Delta E - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E = 0$$

überführt, wenn man den Ansatz $\vec{E} = E\vec{e}_E$ wählt. Mit dem vorgeschlagenen Produktansatz zur Separation der Variablen geht die Wellengleichung in die Darstellung

$$\frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X + \frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \frac{1}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T = 0$$

über. Für die einzelnen Summanden ergibt sich

$$\begin{aligned}
\frac{1}{X}\frac{\partial^2}{\partial x^2}X &= \frac{1}{X}\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{p^2}\exp\left\{\frac{-x}{2p^2}\right\}\right) = \left(\frac{x^2-p^2}{p^4}\right) \\
\frac{1}{Z}\frac{\partial^2}{\partial z^2}Z &= \frac{1}{Z}\frac{\partial}{\partial z}\left[\left(ik\left(1-i\frac{z-z_0}{kp^2}\right)-i\frac{1}{kp^2}\right)\exp\left\{ik(z-z_0)\right\}\right] \\
&= \frac{1}{Z}\left[\left(-k^2\left(1-i\frac{z-z_0}{kp^2}\right)+\frac{2}{p^2}\right)\exp\left\{ik(z-z_0)\right\}\right] \\
&= \left(-k^2\left(1-i\frac{z-z_0}{kp^2}\right)+\frac{2}{p^2}\right)\frac{1}{1-i\frac{z-z_0}{kp^2}} = k^2\left(\frac{2}{k^2p^2-ik(z-z_0)}-1\right) \\
\frac{1}{T}\frac{\partial^2}{\partial t^2}T &= -\omega^2
\end{aligned}$$

Die Dispersionsrelation (Separationsbedingung) lautet demnach

$$\frac{x^2-p^2}{p^4}+k^2\left(\frac{2}{k^2p^2-ik(z-z_0)}-1\right)+\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2=0 \quad .$$

Es genügt also nicht, die übliche Dispersionsrelation $k^2=\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2$ zu fordern. Diese ist nur an den Orten, die durch

$$\frac{x^2-p^2}{p^4}+\frac{2k^2}{k^2p^2-ik(z-z_0)}=0$$

bestimmt werden, gültig.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Mit welcher Geschwindigkeit prallt ein Molekül mit Ladung q und Masse m auf die Elektrode eines ebenen Plattenkondensators, das sich aus der Gegenelektrode gelöst hat? Der Plattenabstand ist d, der Kondensator ist auf die Spannung U geladen.

Lösung

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann der Platte mit den Molekülladungen das Potenzial $V=|U|(q/|q|)$ zugewiesen werden. Dann muss die Gegenelektrode das Potenzial 0 aufweisen.
Mit dieser Anfangsbedingung haben die Moleküle gemäß Definition die potentielle Energie $W=qV=|qU|$. Nach Durchlaufen des Kondensators ist die potentielle Energie auf 0 gefallen und das Molekül hat kinetische Energie aufgenommen.
Unter der Annahme, dass die gesamte potentielle Energie umgewandelt wurde (keine Reibung), ist die kinetische Energie dann also $mv^2/2=|qU|$ und die Geschwindigkeit beim Auftreffen lautet $v=\sqrt{2|qU|/m}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

An der Stelle $z = 0$ stoßen zwei unmagnetische Medien aneinander. Medium 1 befindet sich im Bereich $z < 0$ und hat die Brechzahl $\sqrt{10}$, Medium 2 hat die Brechzahl 2. Im Medium 2 läuft eine Welle parallel zu $\vec{e}_x + \vec{e}_z$. Die Amplitude ihrer elektrischen Feldstärke ist E_2 und weist in y-Richtung. Wie lautet das elektrische Feld der erzeugenden Welle in Medium 1?

Lösung

Das Szenario aus der Aufgabenstellung beschreibt eine transmittierte ebene Welle, die sich in der x-z-Ebene von der Grenzfläche $z = 0$ weg bewegt. Der Ausbreitungsvektor lautet gemäß Aufgabenstellung $\vec{k}_{\text{tr}} = n_{\text{tr}} k_0 (\vec{e}_x + \vec{e}_z)/\sqrt{2}$ und muss die selben Komponenten wie der Ausbreitungsvektor der einfallenden Welle aufweisen. Somit lässt sich der Lateralvektor $\vec{e}_\ell$ zur Feststellung der Polarisation bezüglich der Grenzfläche auch mittels $\vec{e}_\ell = (\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}})/\|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}}\| = \vec{e}_y$ berechnen. Da das elektrische Feld parallel zu $\vec{e}_\ell$ steht, handelt es sich hier um TE-Wellen. Der Tangentialanteil der Wellenzahlvektoren muss gemäß Snellius in allen beteiligten Ausbreitungsvektoren gleich groß sein und resultiert aus dem Ausbreitungsvektor der Transmittierten Welle zu $\vec{k}_{\tan} = k_0 \vec{e}_x$. Der Normalanteil des Ausbreitungsvektors der einfallenden und reflektierten Welle resultiert aus der Dispersionsrelation zu $k_{\text{norm},1} = \sqrt{n_{\text{in}}^2 k_0^2 - \|\vec{k}_{\tan}\|^2} = 3k_0$. Der Transmissionsfaktor für das elektrische Feld der TE-Welle lautet $t_{\mathsf{TE}} = 1 + r_{\mathsf{TE}} = \frac{2k_{\text{norm}}}{k_{\text{norm},1} + k\text{norm},2}$ mit $k\text{norm},2 = k_0$ und ergibt hier den Wert $1,5$. Die Amplitude E_1 der einfallenden Welle ist also $E_1 = E_2/1,5$ und die Welle muss die Darstellung

$$\vec{E}\text{in} = E_2 \vec{e}_y \exp\{ik_0(3x + z)\}/1,5$$

haben.

Aufgabe 9 (5 Punkte)

Eine elektromagnetischen Welle breitet sich als Gauss'scher Impuls aus. Das $\vec{E}$- und $\vec{H}$-Feld sind gegeben als:

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(\omega t - kz)^2\}\vec{e}_{\text{x}},$$

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(\omega t - kz)^2\}\vec{e}_{\text{y}}.$$

Treffen Sie eine Aussage, ob die Wellengleichung für das $\vec{E}$-Feld erfüllt ist, und geben Sie den Wellenzahlvektor als Funktion von ω an.

Lösung

Aufgabe 10 (8 Punkte)

In einem unendlich langen zylinderförmigen Leiter fließt der Strom $I = I_0 \sin\{\omega t\}$, wobei die folgende Stromdichte vorliegt:

$$\vec{j} = \begin{cases} j_0 \sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{z}, & 0 \leq \rho < a \\ j_0 \frac{b^2}{\rho^2} \sin\{\omega t\}\vec{e}_\mathrm{z}, & a \leq \rho \leq b \end{cases}.$$

Geben Sie die Stromdichte j_0 in Abhängigkeit von I_0 an und berechnen Sie das Magnetfeld im gesamten Raum unter Vernachlässigung von Verschiebungsströmen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{D}$.

Lösung

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Gegeben ist ein Zylinder als Koaxialanordnung, bei dem die folgende Verteilung des elektrischen Feldes vorliegt:

$$\vec{E} = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\rho^2\vec{e}_\rho, & \rho \leq a \\ 0, & a < \rho < b \\ \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0}\frac{a^3}{\rho}\vec{e}_\rho, & b < \rho < c \\ 0, & \rho > c \end{cases}.$$

Geben Sie die entsprechenden Raumladungsdichten an und berechnen Sie das elektrische Potential im gesamten Raum ($V\{\infty\} = 0$).

Lösung

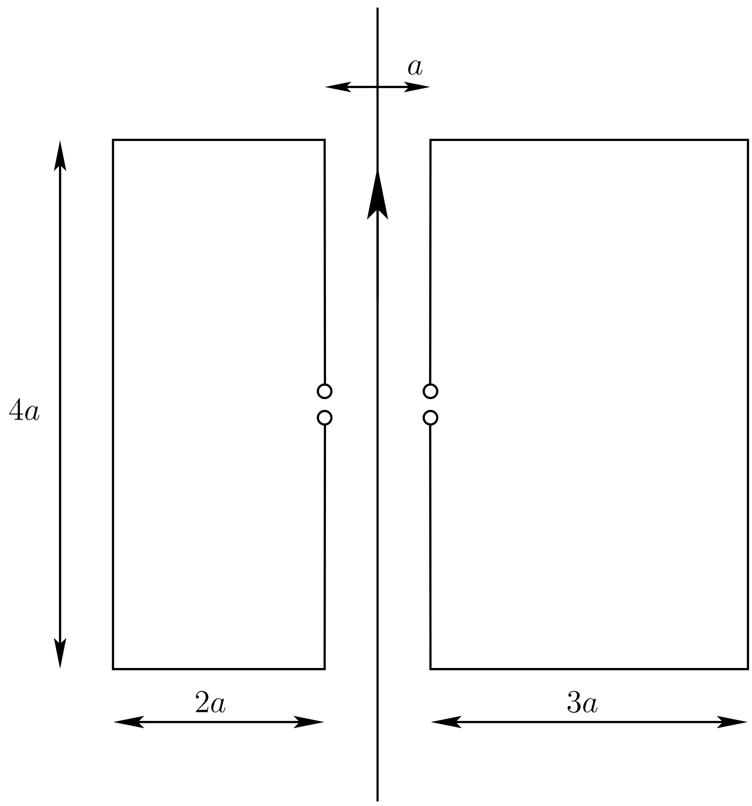
Aufgabe 12 (4 Punkte)

Gegeben ist ein Koaxialleiter der Länge l. Der Innenleiter hat den Radius R_a, der Außenleiter die Radii R_b und R_c für Innen und Außen. Ein Ende des Leiters ist kurzgeschlossen (ideal), am anderen liegt die Spannung U an. Durch den Leiter fließt der Strom I in axial Richtung. Der äußere Leiter hat die konstante Leitfähigkeit σ_a. Geben Sie die Leitfähigkeit des Innenleiters σ_i an.

Lösung

Aufgabe 13 (5 Punkte)

In einem unendlich langen, dünnen Draht fließt der Strom $I = I_0 \sin\{\omega t\}$ entlang der $z-$Achse. In der $y-z-$Ebene befinden sich zwei Leiterschleifen im Abstand a um den Draht (siehe Skizze). Wie groß ist der Unterschied zwischen den induzierten Spannungen der beiden Schleifen?



Lösung

Aufgabe 14 (3 Punkte)

Eine ebene Welle breitet sich im homogenen verlustfreien Medium aus. Die Welle ist durch $\vec{E} = E_0 \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)\}$ beschrieben. In Welche Richtung breitet sich die Welle aus, wenn $k_{\mathrm{y}} = \omega\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ gilt?

Lösung

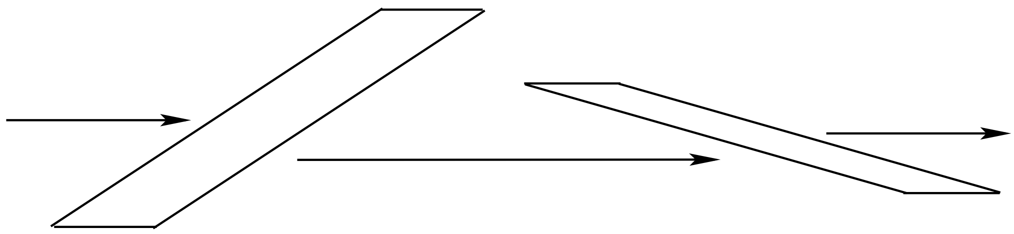
Aufgabe 15 (6 Punkte)

Eine lange Spule mit Länge l, Durchmesser D und n Windungen (dünne Wicklung) wird vom Strom $I = I_0 \sin\{\omega t\}$ durchflossen. Die Spule ist in z-Richtung ausgedehnt. Berechnen Sie zunächst die magnetische Flussdichte im Inneren. Innerhalb der Spule ist nun zentriert und achsenparallel eine kreisförmige Leiterschleife mit Radius r und Widerstand R platziert. Berechnen Sie den Strom, welcher in der Leiterschleife induziert wird.

Lösung

Aufgabe 16 (6 Punkte)

In den Strahlengang eines unpolarisierten monochromatischen Lichtstrahls werden ein Quarzglas- ($\varepsilon = 2,25$) und ein Galliumarsenidplättchen ($\varepsilon = 12,25$) jeweils so platziert, dass die reflektierten Anteile nur eine Polarisation aufweisen. Eine mögliche Konfiguration ist in der Abbildung skizziert. Wie ist das Verhältnis von TE- und TM-Anteilen (Amplitude), nachdem das Licht beide Plättchen passiert hat?



Lösung