Aufgabe 1 (10 Punkte)

Das elektrische Feld einer elektromagnetischen Welle schwinge in Richtung der y-Achse, und der Poynting-Vektor sei durch

$$\vec{S}(x,t) = (100\,\mathrm{W/m^2})\left[\exp\left\{i(20\,\frac{x}{\mathrm{m}} - 6\cdot 10^9\,\frac{t}{\mathrm{s}})\right\}\right]\vec{e_{\mathrm{x}}} \quad , \tag{1}$$

gegeben. In welcher Richtung breitet sich die Welle im Vakuum aus, und wie groß ist der Betrag des elektrischen Feldes?
Hinweis: für $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$ gilt $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{a}) = ||\vec{a}||^2\cdot\vec{b}$

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Ein Magnetfeld mit homogener Flußdichte $\vec{B}$ sei scharf auf ein zylinderförmiges Gebiet mit Radius R begrenzt. Außerhalb des begrenzten Kreises sei das Magnetfeld gleich null. Die Änderung des Magnetfelds B betrage $\mathrm{d}B/\mathrm{d}t$. Wie groß ist das elektrische Feld, das im Abstand $r \in [0;\infty)$ vom Mittelpunkt des Kreises in der Ebene induziert wird?

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Zwei lange, leitende, koaxiale, zylindrische Röhren tragen gleich große, aber entgegengesetzte Ladungen. Die innere Röhre habe den Radius a und die Ladung $+q$. Die äußere habe den Radius b und die Ladung $-q$. Die Länge der Röhren sei l. Berechnen Sie die Potenzialdifferenz zwischen den Röhren.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Eine nichtleitende Kugel ($\varepsilon = 1$) mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Ursprung habe einen kugelförmigen Hohlraum mit dem Radius b und dem Mittelpunkt bei $x = b$, $y = 0$ und $z = 0$. Die Kugel besitze die homogene Raumladungsdichte ϱ. Geben Sie das elektrische Feld im Hohlraum an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Eine homogen geladene Kugel mit dem Radius R um den Ursprung trage die Ladung Q. Bestimmen Sie die Kraft auf eine homogen geladene Linie mit der Ladung q, welche von R bis $R + d$ in radialer Richtung verläuft.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 6 (15 Punkte)

Zwei gleiche ebene rechteckige Leiterschleifen mit Abmessungen $a \times b$ werden mit dem Strom I betrieben. Sie sind als Helmholtzspulen mit Spulenabstand d angeordnet (Flächen im Abstand d, Stromfluss an jeder Stelle in den Schleifen parallel). Wie groß ist die magnetische Induktion in der Symmetrieebene zwischen den Spulen?
Hilfsintegrale:

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t + \sqrt{a^2 + t^2}\}$$

$$\int \frac{1}{(a^2 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + t^2}$$

$$\int \frac{t}{(a^2 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}}$$

Lösung

Zur Lösung genügt es, das Feld eines Drahtstücks zu bestimmen. Das Gesamtfeld ergibt sich dann aus der Überlagerung der Einzelstücke. Auf dem Weg nimmt man dafür zunächst zwei gleiche Stücke der beiden Schleifen, dann heben sich bereits einige Vektorkomponenten auf. Danach nimmt man die Stücke mit entgegengesetztem Stromfluss. Zum Schluss kann man dies Ergebnis um 90° gedreht für die anderen Leiterstücke nehmen, muss aber a gegen b tauschen.
Da es sich bei der angegebenen Anordnung um Leiterschleifen handelt, kann das Biot-Savart-Gesetz vorteilhaft angewendet werden. Für die weitere Rechnung wird angenommen, dass sich die beiden Schleifen in den Ebenen $z = \pm d/2$ befinden. Die Drahtstücke der Länge a sollen sich in den Ebenen jeweils bei $y = \pm b/2$ befinden, die beiden anderen Drahtstücke entsprechend bei $x = \pm a/2$. Der Strom soll in den Drahtstücken bei $x = -a/2$ in y-Richtung fließen.
Hier wird zunächst das Drahtstück bei $z = -d/2$, $x = -a/2$ betrachtet. Die Stromdichte lautet für $-b/2 \leq y \leq b/2$

$$\vec{j} = I\delta\{x + a/2\}\delta\{z + d/2\}\vec{e}_y$$

und sonst ist sie Null.
Gesucht ist das Feld in der Symmetrieebene zwischen den Spulen, also bei $z = 0$ in dem hier gewählten Koordinatensystem. Somit resultiert im ersten Schritt

$$\begin{aligned}
\vec{B}_{11} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\{\vec{r}'\} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \,\mathrm{d}^3r \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \frac{\delta\{x' + a/2\}\delta\{z' + d/2\}\vec{e}_y \times ((x - x')\vec{e}_x + (y - y')\vec{e}_y + (z - z')\vec{e}_z)}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}y' \,\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int\limits_{-b/2}^{b/2} \frac{-(x + a/2)\vec{e}_z + (z + d/2)\vec{e}_x}{((x + a/2)^2 + (y - y')^2 + (z + d/2)^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}y' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{-(x + a/2)\vec{e}_z + (z + d/2)\vec{e}_x}{(x + a/2)^2 + (z + d/2)^2} \frac{y - y'}{\sqrt{(x + a/2)^2 + (y - y')^2 + (z + d/2)^2}} \right]_{-b/2}^{b/2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-(x + a/2)\vec{e}_z + (z + d/2)\vec{e}_x}{(x + a/2)^2 + (z + d/2)^2} \cdot \\
&\quad \left(\frac{y + b/2}{\sqrt{(x + a/2)^2 + (y + b/2)^2 + (z + d/2)^2}} - \frac{y - b/2}{\sqrt{(x + a/2)^2 + (y - b/2)^2 + (z + d/2)^2}} \right) .
\end{aligned}$$

In der Symmetrieebene ist $z = 0$ und somit gilt

$$\vec{B}_{11}\{z=0\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{-(x+a/2)\vec{e}_z + (d/2)\vec{e}_x}{(x+a/2)^2+(d/2)^2}\cdot \left(\frac{y+b/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y+b/2)^2+(d/2)^2}} - \frac{y-b/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y-b/2)^2+(d/2)^2}}\right) .$$

Für das Feld des entsprechenden Leiterstücks in der anderen Spule muss in obiger Gleichung d durch $-d$ ersetzt werden. Es ergibt sich also

$$\vec{B}_{21}\{z=0\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{-(x+a/2)\vec{e}_z - (d/2)\vec{e}_x}{(x+a/2)^2+(d/2)^2}\cdot \left(\frac{y+b/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y+b/2)^2+(d/2)^2}} - \frac{y-b/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y-b/2)^2+(d/2)^2}}\right)$$

und die Summe der beiden Felder wird zu

$$\vec{B}_{1}\{z=0\} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(x+a/2)\vec{e}_z}{(x+a/2)^2+(d/2)^2}\cdot \left(\frac{y+b/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y+b/2)^2+(d/2)^2}} - \frac{y-b/2}{\sqrt{(x+a/2)^2+(y-b/2)^2+(d/2)^2}}\right) .$$

Für das entsprechende Feld der beiden Leiterstücke mit entgegengesetzter Stromrichtung dreht sich zunächst das Feld um. Zusätzlich muss aber a durch $-a$ ersetzt werden:

$$\vec{B}_{3}\{z=0\} = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{(x-a/2)\vec{e}_z}{(x-a/2)^2+(d/2)^2}\cdot \left(\frac{y+b/2}{\sqrt{(x-a/2)^2+(y+b/2)^2+(d/2)^2}} - \frac{y-b/2}{\sqrt{(x-a/2)^2+(y-b/2)^2+(d/2)^2}}\right) .$$

Für die Leiterstücke mit Stromfluss in x-Richtung (bei $y = b/2$) ergibt sich das Feld entsprechend zu $\vec{B}_1$, wenn man x durch y und y durch $-x$ ersetzt und a und b tauscht:

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_2\{z=0\} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(y+b/2)\vec{e}_z}{(y+b/2)^2+(d/2)^2}\cdot\\
&\left(\frac{-x+a/2}{\sqrt{(y+b/2)^2+(-x+a/2)^2+(d/2)^2}}-\frac{x-a/2}{\sqrt{(y+b/2)^2+(-x-a/2)^2+(d/2)^2}}\right)\\
&= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{-(y+b/2)\vec{e}_z}{(y+b/2)^2+(d/2)^2}\cdot\\
&\left(\frac{-x+a/2}{\sqrt{(y+b/2)^2+(x-a/2)^2+(d/2)^2}}-\frac{x-a/2}{\sqrt{(y+b/2)^2+(x+a/2)^2+(d/2)^2}}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Das Feld des letzten Leiterpaares ergibt sich wieder durch Umdrehen der Richtung und ersetzen von b durch $-b$:

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_4\{z=0\} &= \frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{(y-b/2)\vec{e}_z}{(y-b/2)^2+(d/2)^2}\cdot\\
&\left(\frac{-x+a/2}{\sqrt{(y-b/2)^2+(x-a/2)^2+(d/2)^2}}-\frac{x+a/2}{\sqrt{(y-b/2)^2+(x+a/2)^2+(d/2)^2}}\right) \quad .
\end{aligned}
$$

Das Feld in der Symmetrieebene ist die Summe der Einzelfelder $\vec{B}\{z=0\}=\vec{B}_1+\vec{B}_2+\vec{B}_3+\vec{B}_4$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Eine elliptisch polarisierte Welle trifft aus Luft auf die ebene Grenzfläche zu einem liearen, isotropen, homogenen Medium mit Brechzahl 2. Der TE- und der TM-Anteil wird gleich reflektiert. Welche Größe haben μ und ε in dem Medium?

Lösung

Gleiche Reflektion für TE und TM bedeutet, dass die Reflektionsfaktoren

$$
\begin{aligned}
r_{\mathrm{TE}} &= \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}-\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}+\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}\\
r_{\mathrm{TM}} &= \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}-\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}+\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}
\end{aligned}
$$

gleich sein müssen. In beiden sind jeweils die Normalkomponenten des einfallenden und des reflektierten Wellenzahlvektors identisch. Durch Umstellen ergibt sich

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}} - \dfrac{\mu_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}} + \dfrac{\mu_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}$$

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}} - \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\vec{n}\circ\vec{k}_{\mathrm{tr}}} + \dfrac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}$$

und nach Vergleichen muss gelten

$$\frac{\mu_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{tr}}} = \frac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}} \quad .$$

Sortieren nach Material:

$$\frac{\mu_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} = \frac{\mu_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}} \quad .$$

Da die Welle aus Luft auf das Medium fällt, ist die linke Seite gleich 1 und es muss gelten $\varepsilon_{\mathrm{tr}} = \mu_{\mathrm{tr}}$. Wegen $n_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\varepsilon_{\mathrm{tr}}\mu_{\mathrm{tr}}} = 2$ resultiert $\varepsilon_{\mathrm{tr}} = \mu_{\mathrm{tr}} = 2$.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Eine ebene Welle fällt unter dem Winkel 60 ° auf die ebene Grenzfläche zum einem Medium mit $\varepsilon = 1$ und $\mu = 9$. Geben Sie den Wellenzahlvektor der einfallenden Welle und die zugehörigen Wellenzahlvektoren der reflektierten und transmittierten Wellen im Koordinatensystem Ihrer Wahl an.

Lösung

Zunächst wird das Koordinatensystem festgelegt. Die Grenzfläche sei bei $z = 0$, somit ist der Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_z$. Die Welle soll aus dem Bereich $z < 0$ auf die Grenzfläche fallen und sich in der x-z-Ebene in positive x-Richtung bewegen. Somit lautet der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = k_{\mathrm{in}}(\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_x + \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_z) \quad .$$

Da hier keine Angaben über das Medium der einfallenden Welle gemacht werden, kann Luft angenommen werden. Somit folgt

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = 0,5(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_z)k_0 \quad .$$

Beim Wellenzahlvektor der reflektierten Welle dreht sich nur die Normalenkomponente um:

$$\vec{k}_{\mathrm{ref}} = k_{\mathrm{in}}(\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_x - \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}\vec{e}_z) = 0,5(\sqrt{3}\vec{e}_x - \vec{e}_z)k_0 \quad .$$

Die Tangentialkomponenten aller Wellenzahlvektoren sind identisch $\|\vec{n} \times \vec{k}\|^2 = 3/4k_0^2$. Für die Normalkomponente der transmittierten Welle resultiert mit Hilfe der Dispersionsrelation

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{k_{\mathrm{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}\|^2} \quad .$$

Mit der Wellenzahl im angrenzenden Medium $k_{\mathrm{tr}} = n_{\mathrm{tr}}k_0 = 3k_0$ resultiert

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{9 - 3/4}k_0 = \sqrt{33}/2k_0$$

und damit

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = 0,5(\sqrt{3}\vec{e}_x + \sqrt{33}\vec{e}_z)k_0 \quad .$$

Aufgabe 9 (4 Punkte)

Eine ebene Welle mit elektrischer Feldstärke 1 V/m läuft in der Ebene y=b unter dem Winkel von 30° gegen die z-Achse. Wie lautet der zeitgemittelte Poyntingvektor?

Lösung

Die Welle läuft parallel zur x-z-Ebene. Als Medium wird Luft angenommen, da nichts anderes angegeben ist. Somit lautet der Wellenzahlvektor

$$\vec{k} = (\sin\{\theta\}\vec{e}_x + \cos\{\theta\}\vec{e}_z)k_0 = 0,5(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z)k_0 \quad .$$

Der zeitgemittelte Poyntingvektor ergibt sich aus

$$\bar{\vec{S}} = 1/2\mathrm{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\} \quad .$$

Mit $\vec{H} = (\vec{k} \times \vec{E})/(\omega\mu\mu_0)$ und wegen $\vec{k} \circ \vec{E} = 0$ resultiert in Luft

$$\vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E})^*/\omega\mu_0 = |\vec{E}|^2\vec{k}/\omega\mu_0 = 0,5|\vec{E}|^2/(c_0\mu_0)(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z) \quad .$$

Mit $c_0\mu_0 = 120\pi\,\Omega$ ergibt sich

$$\bar{\vec{S}} = 0,25/(120\pi)(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z)\,\mathrm{W/m^2} \approx 0,66(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z)\,\mathrm{mW/m^2} \quad .$$

Aufgabe 10 (3 Punkte)

Auf der Oberfläche eines idealen Isolators bei $x = a$ wird die Ladungsdichte $\varrho_0 \sin\{\omega t\}$ gemessen. Welche Aussage lässt sich über die Stromdichte im angrenzenden Medium machen?

Lösung

An der Grenzfläche müssen die Stetigkeitsbedingungen für die Felder erfüllt sein:

$$\begin{aligned}
\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\Big|_{x=a} &= 0 \\
\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{x=a} &= \varrho_\mathrm{S} \\
\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{x=a} &= \vec{j}_\mathrm{S} \\
\vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)\Big|_{x=a} &= 0 \\
\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1)\Big|_{x=a} &= -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{S}
\end{aligned}$$

Unter der Annahme, dass der Isolator im Bereich $x > a$ liegt und der Normalenvektor in x-Richtung zeigt, ergibt sich $\vec{j}_2 = 0$.
Im Medium 1 sind Stromdichte und elektrische Feldstärke über das mikroskopische Ohmsche Gesetz $\vec{j}_1 = \sigma_1 \vec{E}_1$ miteinander verknüpft. Weiterhin gilt $\vec{D}_1 = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}_1$. Über die Tangentialkomponente der magnetischen Feldstärke im Isolator ist nichts bekannt. Somit kann nur

$$\vec{n} \circ \vec{j}_1 = \frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{S} = \omega \varrho_0 \cos\{\omega t\}$$

bei $x = a$ geschlossen werden. Eine Aussage über die Tangentialkomponente der Stromdichte ist mit den Angaben nicht möglich.