Aufgabe 1 (4 Punkte)

Eine kreisförmige Scheibe vom Radius R rotiert mit Umfangsgeschwindigkeit $\vec{v}$. Wie groß ist $\nabla \times \vec{v}$ an einem beliebigen Punkt auf der Scheibe?

Lösung

Die Scheibe sei so orientiert, dass ihre Achse mit der z-Achse eines Koordinatensystems zusammenfalle. Dann ist die Umfangsgeschwindigkeit durch $\vec{v} = v\vec{e}_\Phi$ gegeben. Ein beliebiger Punkt auf der Scheibe hat die Geschwindigkeit $\vec{v}\{r\} = v\frac{\rho}{R}\vec{e}_\Phi$. Die Rotation in Zylinderkoordinaten ist dann

$$\nabla \times \vec{v} = \frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\rho\vec{v} \circ \vec{e}_\Phi)\vec{e}_z = \left(\frac{1}{\rho}(\vec{v} \circ \vec{e}_\Phi) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}(\vec{v} \circ \vec{e}_\Phi)\right)\vec{e}_z = 2\frac{v}{R}\vec{e}_z = 2\omega\vec{e}_z \quad .$$

An Stelle der hier verwendeten Zylinderkoordinaten können auch kartesische Koordinaten benutzt werden. Die Rotation ist in diesem Fall auf

$$\vec{v} = \frac{v}{R}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y)$$

mit dem Ergebnis

$$\nabla \times \vec{v} = 2(v/R)\vec{e}_z = 2\omega\vec{e}_z$$

anzuwenden.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Der reflektierte Anteil einer bezüglich der Ausbreitungsrichtung elliptisch polarisierte Welle ist nach Reflektion an einem unmagnetischen Material der Brechzahl n zirkular polarisiert. Wie ist der Reflektor bezüglich der Halbachsen der Polarisation positioniert? Begründen Sie die Aussage an Hand von Reflektionsfaktoren.

Lösung

Die Reflexion einer Welle erfolgt mit den Reflektionsfaktoren, die sich aus der Polarisation der Welle zur Grenzfläche ergibt. Der Reflexionsfaktor einer TM-Welle ist immer kleiner als der einer TE-Welle bei Reflektion an einem unmagnetischen Medium. Somit muss der Reflektor so zur Welle ausgerichtet sein, dass die kleinere Halbachse der elektrischen Feldstärkeellipse mit der TE-Polarisation bezüglich des Reflektors identisch ist. Das ist gleichbedeutend mit der

Forderung, dass die kleinere Halbachse der elektrischen Feldstärkeellipse senkrecht zur Reflexionsebene liegt. Durch den kleineren TM-Reflektionsfaktor wird die größere albachse weniger reflektiert als die kleine Halbachse und im Idealfal werden sie beide gleich groß, so dass sich die zirkulare Polarisation ergibt.

Zusatz: Reflexion einer Welle, die aus einem unmagnetiscen Medium der Brechzahl $n_1 = \sqrt{\varepsilon_1}$ auf ein unmagnetisches Medium der Brechzahl $n_2 = \sqrt{\varepsilon_2}$ mit $n_2 > n_1$ trifft.

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{k_{\text{in}} \circ \vec{n} - k_{\text{tr}} \circ \vec{n}}{k_{\text{in}} \circ \vec{n} + k_{\text{tr}} \circ \vec{n}} = \frac{1 - \frac{k_{\text{tr}} \circ \vec{n}}{k_{\text{in}} \circ \vec{n}}}{1 + \frac{k_{\text{tr}} \circ \vec{n}}{k_{\text{in}} \circ \vec{n}}} = \frac{1-a}{1+a}$$

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} k_{\text{in}} \circ \vec{n} - \frac{1}{\varepsilon_2} k_{\text{tr}} \circ \vec{n}}{\frac{1}{\varepsilon_1} k_{\text{in}} \circ \vec{n} + \frac{1}{\varepsilon_2} k_{\text{tr}} \circ \vec{n}} = \frac{1 - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_{\text{tr}} \circ \vec{n}}{k_{\text{in}} \circ \vec{n}}}{1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{k_{\text{tr}} \circ \vec{n}}{k_{\text{in}} \circ \vec{n}}} = \frac{1-b}{1+b}$$

mit $b = a\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \leq a$.
Test der obigen Aussage: Gilt $r_{\mathsf{TE}} \leq r_{\mathsf{TM}}$?
Ansatz:

$$\begin{aligned} \frac{1-a}{1+a} &\leq \frac{1-b}{1+b} \\ (1-a)(1+b) &\leq (1-b)(1+a) \\ 1+b-a-ab &\leq 1+a-b-ab \\ b &\leq a \end{aligned}$$

w.z.b.w. (was zu beweisen war).

Aufgabe 3 (5 Punkte)

An einer ungeladenen ebenen Grenzfläche bei $x = 0$ lauten die elektrischen Felder der hinlaufenden Welle

$$\vec{E}_{\text{in}} = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \exp\{i(k_0 x - k_0 y - \omega t)\}$$

und der transmittierten Welle

$$\vec{E}_{\text{tr}} = \frac{4}{9} E_0(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \exp\{i(2k_0 x - k_0 y - \omega t)\} \quad .$$

Wie lautet das elektrische Feld der reflektierten Welle, wenn man unmagnetische Medien voraussetzt?

Lösung

Aus den Angaben für die Felder resultieren zunächst $\vec{k}_{\text{in}} = k_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ und $\vec{k}_{\text{tr}} = k_0(2\vec{e}_x - \vec{e}_y)$.
Aus dem Reflektionsgesetz und dem Snelliusgesetz resultiert $\vec{k}_{\text{ref}} = k_0(-\vec{e}_x - \vec{e}_y)$.
Mit Hilfe der Dispersionsrelation ergeben sich daraus die relativen Dielektrizitätszalen:
$\|\vec{k}_{\text{in}}\|^2 = n_{\text{in}}^2 k_0^2 = \varepsilon_{\text{in}} k_0^2 = 2k_0^2$ und $\|\vec{k}_{\text{tr}}\|^2 = n_{\text{tr}}^2 k_0^2 = \varepsilon_{\text{tr}} k_0^2 = 5k_0^2$.
Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes sind an einer Grenzfläche stetig:

$$(\vec{n} \times (\vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{ef}}) \times \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{E}_{\text{tr}}) \times \vec{n} \quad .$$

Die elektrischen Felder der einfallenden und transmittierten Welle enthalten keine z-Komponenten, also verschwindet diese auch in der reflektierten Welle. Somit lautet die y-Komponente der elektrischen Feldstärkeamplitude für die reflektierte Welle

$$\vec{E}_{\text{ref}} \circ \vec{e}_y \Big|_{x=0} = -\frac{1}{9} E_0 \exp\{-i(k_0(x+y) + \omega t)\} \quad .$$

Bei der Normalkomponente muss die dielektrische Verschiebung betrachtet werden. Es ergibt sich

$$\vec{E}_{\text{ref}} \circ \vec{e}_x \Big|_{x=0} = (5\frac{4}{9} - 1)/2 E_0 \exp\{-i(k_0(x+y) + \omega t)\} = \frac{1}{9} E_0 \exp\{-i(k_0(x+y) + \omega t)\}$$

und somit

$$\vec{E}_{\text{ref}} = \frac{1}{9} E_0 (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \exp\{-i(k_0(x+y) + \omega t)\} \quad .$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein kreisförmig gebogener Draht wird von einem zeitlich veränderlichen Magnetfeld durchdrungen. Der Radius der Drahtschleife ist R, die Schleife ist so angeordnet, dass ihr Zentrum im Ursprung eines Koordinatensystems liegt und die Flächennormale mit der z-Achse zusammenfällt. Die magnetische Induktion wird in diesem Koordinatensystem durch

$$\vec{B} = B_0 \cos\{\omega t\} (\vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

beschrieben. Welche Spannung wird in dem Draht induziert?

Lösung

Für die Lösung muss einfach das Faradaygesetz in Integralform (Induktiongesetz) verwendet werden:

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \iint \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \, \mathrm{d}^2\vec{r} \quad ,$$

wobei die Induktionsspannung bis auf ein Vorzeichen der linken Seite gleich ist. Das Oberflächenelement auf der rechten Seite ergibt sich aus der Aufgabe zu $\mathrm{d}^2\vec{r} = \mathrm{d}^2 r\vec{e}_z$, die Integration ist über die Spulenfläche zu nehmen $\mathrm{d}^2 r = r\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}r$ mit $r \in [0, R]$ und $\phi \in [0, 2\pi]$. In Folge des räumlich konstanten Magnetfeldes reduziert sich somit die Integration auf eine Multiplikation mit der Kreisfläche unter Berücksichtigung des Skalarprodukts. Es resultiert nach Zeitableitung

$$U_{\mathrm{ind}} = -\omega\pi R^2 B_0 \sin\{\omega t\} \quad .$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

In einem homogenen leitfähigen Dielektrikum mit σ, ε fließt in der Nähe der Grenzfläche $z = c$ die Stromdichte $\vec{j} = (j_1\vec{e}_y + j_2\vec{e}_z)\sin\{2\pi t/T\}$. Welche elektrische Feldstärke stellt sich im angrenzenden Vakuum an der Grenzfläche ein?

Lösung

Für $z = c$ gilt jeweils mit $\vec{n} = \vec{e}_z$

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \varrho_\mathrm{S} \\ \vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) &= -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{S} \quad . \end{aligned}$$

Das Vakuum ist ein idealer Isolator mit $\varepsilon_2 = 1$. Somit folgt $\vec{j}_2 = 0$ und $\vec{D}_2 = \varepsilon_0\vec{E}_2$. Aus der Stetigkeitsbedingung für die Stromdichte resultiert demnach $\frac{\partial}{\partial t}\varrho_\mathrm{S} = \vec{n} \circ \vec{j}_1 = j_2 \sin\{2\pi t/T\}$, also gilt $\varrho_\mathrm{S} = -j_2 T/(2\pi)\cos\{2\pi(t - t_0)/T\} + \varrho_\mathrm{S}\{t_0\}$. Im leitfähigen Medium gilt das mikroskopische Ohmsche Gesetz $\vec{j}_1 = \sigma\vec{E}_1$. Damit ergibt sich für die Tangentialkomponente von $\vec{E}_2$ aus der Stetigkeitsbedingung $\vec{E}_{2\tan}\{z = c\} = j_1/\sigma \sin\{2\pi t/T\}\vec{e}_y$.
Die Normalkomponente muss über die Stetigkeitsbedingung für $\vec{D}$ berechnet werden und ergibt sich zu

$$\vec{E}_{2\mathrm{norm}}\{z = c\} = \big(j_2/(\sigma_1\varepsilon_1)\sin\{2\pi t/T\} - j_2 T/(2\pi\varepsilon_0\varepsilon_1)\cos\{2\pi(t - t_0)/T\} + \varrho_\mathrm{S}\{t_0\}/(\varepsilon_0\varepsilon_1)\big)\vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 6 (4 Punkte)

Zwei Punktladungen der Stärke Q_1 und Q_2 haben den Abstand L zueinander. Welche Energie wird frei, wenn sich der Abstand verdoppelt?

Lösung

Die potentielle Energie einer Ladung im elektrischen Feld ergibt sich aus dem Potenzial am Ort der Ladung und der Ladungsmenge $W\{\vec{r}\} = QV\{\vec{r}\}$. Das Potenzial, das eine Ladung im freien Raum erzeugt, lautet $V_1\{d\} = \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d}$, wobei d der Abstand zur Ladung ist.
Eine zweite Ladung, die in das Feld der ersten gebracht wird und im Abstand d festgehalten wird, hat somit die potentielle Energie $W_2 = Q_2V_1\{L\} = \frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d}$.
Wird der Abstand verdoppelt, nimmt die potentielle Energie der Ladung Q_2 im Feld der Ladung Q_1 ab und wird frei.
Somit ist die freiwerdende Energie gerade die Differenz der potentiellen Energie der Ladung Q_2 an den verschiedenen Lagepunkten $d_1 = L$ und $d_2 = 2L$:
$\Delta W = \frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_2}) = \frac{Q_2Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{2L}$.

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Das magnetische Feld einer Welle ist durch

$$\vec{H} = H_0(i\vec{e}_y + \vec{e}_z)\exp\{i(k_0x + \omega t)\}$$

gegeben. Welchen Polarisationszustand weist die Welle bezüglich ihrer Ausbreitungsrichtung auf?

Lösung

Die Welle breitet sich in Richtung von $\vec{k} = -k_0\vec{e}_x$ aus.
Der Realteil des Feldes wird für die Bestimmung der Polarisation heran gezogen. Mit der komplexen Schreibweise der Eulerschen Funktion ergibt sich zunächst

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= H_0(i\vec{e}_y + \vec{e}_z)\exp\{i(k_0x + \omega t)\} \\
&= H_0(i\vec{e}_y + \vec{e}_z)(\cos\{k_0x + \omega t\} + i\sin\{k_0x + \omega t\}) \\
&= H_0\left((\cos\{k_0x + \omega t\}\vec{e}_z - \sin\{k_0x + \omega t\}\vec{e}_y) + i(\cos\{k_0x + \omega t\}\vec{e}_y + \sin\{k_0x + \omega t\}\vec{e}_z)\right) \quad .
\end{aligned}$$

Der Realteil ist somit einfach

$$\mathrm{Re}\left\{\vec{H}\right\} = H_0\left(\cos\{k_0x + \omega t\}\vec{e}_z - \sin\{k_0x + \omega t\}\vec{e}_y\right) \quad .$$

Für einen festen Ort, hier zum Beispiel $x = 0$ wird der Verlauf des Zeigers verfolgt. Er zeigt zunächst in z-Richtung und wandert dann nach $-y$. Das ist eine Rechtsdrehung um die x-Achse. Da sich die Welle in negativer x-Richtung ausbreitet, ist sie also links drehend polarisiert. Die Amplitude bleibt konstant. Somit handelt es sich um eine links zirkular polarisierte ebene Welle.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Gegeben sind zwei metallische Kugelschalen mit den Radien a und b ($b > a$). Die innere Schale ist geerdet und die äußere Schale trage die Ladung q. Geben Sie die Ladung der inneren Kugelschale an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Ein unendlich langer Zylinder mit Innenradius R_i und Außenradius R_a werde in Längsrichtung homogen vom Strom J durchflossen. Geben Sie das Magnetfeld $\vec{H}$ im gesamten Raum an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Man betrachte die Grenzfläche zwischen zwei Materialien mit den Größen $\mu_1, \varepsilon_1, \sigma_1$ und $\mu_2, \varepsilon_2, \sigma_2$. Alle Feldstärken seien örtlich konstant, wobei nur $\vec{E}_1$ bekannt ist. Geben Sie die Größen $\vec{E}_2$, $\vec{D}_1$, $\vec{D}_2$, $\vec{j}_1$ und $\vec{j}_2$ an, wenn

a) die Grenzfläche ungeladen ist und beide Materialien zwar unterschiedliche, aber ideale Isolatoren sind.

b) ein Material ideal leitet, das andere ein realer Isolator und zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ die Grenzfläche mit ϱ_0 geladen ist.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Zwischen zwei konzentrischen leitenden Kugelschalen (Kugelkondensator) mit den Radien a und b ($b > a$) liegt die Spannung U_0 an. Es existiert kein $\vec{E}$-Feld außerhalb der äußeren Schale.

Berechnen Sie die Kapazität dieser Anordnung!

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Eine runde Spule mit N Windungen und Radius R_s steht senkrecht zu einem homogenen Magnetfeld $\vec{H}$. Die Spule ist zu einem Ampèremeter und Widerstand R verbunden, so dass Strom gemessen werden kann. Welche Ladung fließt durch die Spule, wenn sie um $180°$ im Magnetfeld gedreht wird?

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.