Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben ist das magnetische Feld $\vec{B} = B_0(0.1\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$ in einem Medium mit relativer Permeabilität $\mu = 100$. Das Medium füllt den Halbraum $x \geq 0$, der an Luft grenzt. Skizzieren Sie in der x-y- Ebene den Verlauf der Feldlinie von $\vec{B}$, die durch den Punkt $P_0 = (-0.3, 0, 0)_R$ geht. Bestimmen Sie 6 Punkte auf der Feldlinie im Abstand $\Delta x = 0.1$ in positiver x-Richtung ausgehend von dem Punkt P_0.

Lösung

Das Feld im Halbraum 2 $x > 0$ ist homogen. Die Grenzfläche ist ladungsfrei, es wurde jedenfalls nichts anderes angegeben. Somit kann auch von einem homogenen Feld im Halbraum 1 $x \leq 0$ ausgegangen werden. An der Grenzfläche müssen die Stetigkeitsbedingungen

$$\vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0$$

und

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = 0$$

erfüllt werden. Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \vec{e}_x$, ansonsten gelten noch die Materialgleichungen für homogene isotrope Medien $\vec{B} = \mu_o \mu \vec{H}$. Somit muss an der Grenzfläche

$$\vec{B}_1 = B_0(0.1\vec{e}_x + 0.02\vec{e}_y)$$

gelten. Wegen der Homogenität und des Fehlens von Quellen kann das für den gesamten Halbraum angenommen werden. Die Feldlinie verläuft im Bereich 1 nach der Gleichung

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{11} + \Delta x(\vec{e}_x + \frac{\vec{B}_1\{\vec{r}_{11}\} \circ \vec{e}_y}{\vec{B}_1\{\vec{r}_{11}\} \circ \vec{e}_x}\vec{e}_y) = \vec{r}_{11} + \Delta x(\vec{e}_x + 0.2\vec{e}_y) \quad .$$

Im Bereich 2 gilt entsprechend

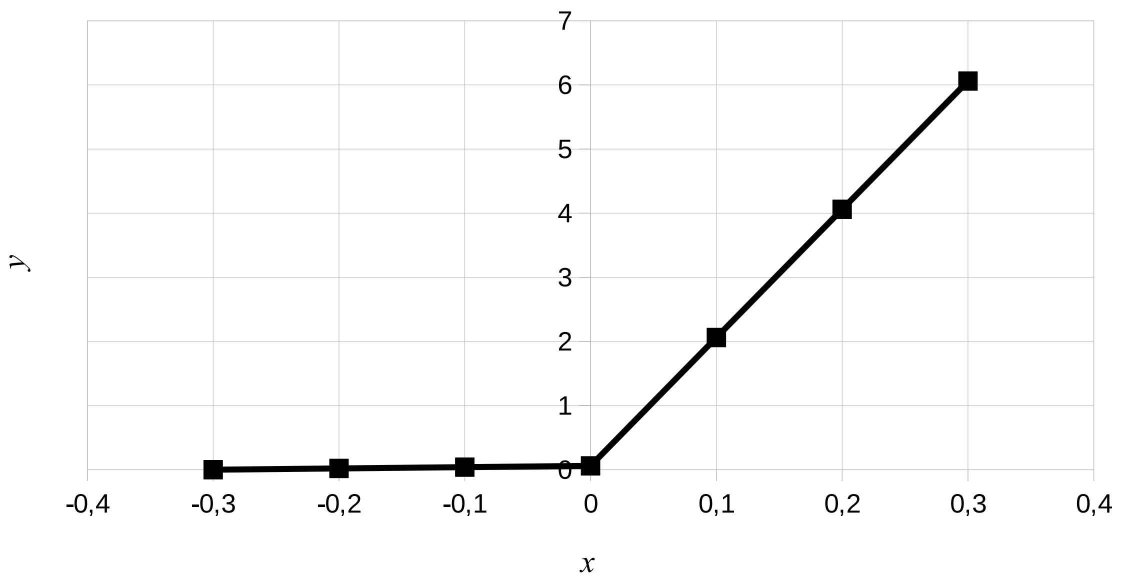
$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_{11} + \Delta x(= \vec{r}_{11} + \Delta x(\vec{e}_x + 20\vec{e}_y) \quad .$$

Ausgehend von dem angegebenen Punkt ergibt sich also die Wertetabelle 1 bzw. Grafik 1 für den Verlauf der Feldlinie.

Tabelle 1: Punkte, durch die die Feldlinie läuft.

x	y
-0.3	0
-0.2	0.02
-0.1	0.04
0	0.06
0.1	2.06
0.2	4.06
0.3	6.06

Abbildung 1: Verlauf der Feldlinie.



Aufgabe 2 (5 Punkte)

Eine ebene Welle läuft unter dem Winkel $\Theta = \pi/4$ auf die Grenzfläche $(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \circ (\vec{r} - r_0\vec{e}_x) = 0$ zu. Die y-Komponente des Wellenzahlvektors ist positiv, die x- und z- Komponenten sind gleich Null. Berechnen Sie den Wellenzahlvektor der transmittierten Welle unter der Voraussetzung, dass sich die einfallende Welle in einem Medium mit Brechzahl $n = 2$ bewegt, welches an Luft grenzt.

Lösung

Die in der Aufgabe angegebene Grenzfläche ist in der Hesseschen Normalenform einer Ebene dargestellt:

$$\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \quad ,$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor auf die Ebene ist und $\vec{r}_0$ ein Punkt auf der Ebene. Hier ist der Normalenvektor also proportional zu dem nicht normierten Vektor

$$\vec{N} = \vec{e}_x - \vec{e}_y$$

und steht im Winkel von 45° gegen den Wellenzahlvektor, der ja in $\vec{e}_y$-Richtung weist, und in der Form $\vec{k} = k\vec{e}_y$ mit $k = 2k_0$ geschrieben werden kann. Die Angabe des Einfallwinkels ist also redundant.
Für die Berechnung des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle müssen dessen Tangential- und Normalkomponente bestimmt werden. Dafür wird der Normalenvektor in der normierten Form, hier also $\vec{n} = (\vec{e}_x - \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ benötigt.
Die Normalenkomponente des Wellenzahlvektors resultiert aus

$$\vec{k}_\mathrm{n} = (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{n} = -k_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$$

und die Tangentialkomponente ergibt sich zu

$$\vec{k}_\mathrm{t} = (\vec{n} \times \vec{k}) \times \vec{n} = k_0(\vec{e}_y + \vec{e}_x) \quad .$$

Die Tangentialkomponente ist stetig, die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle ergibt sich aus

$$\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr} = \sqrt{k_0^2 - k_\mathrm{t}^2} = k_0\sqrt{1-2} = ik_0 \quad ,$$

es handelt sich also um Totalreflexion mit dem Wellenzahlvektor der transmittierten Welle

$$\vec{k}_\mathrm{tr} = \vec{k}_\mathrm{t} + (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathrm{tr})\vec{n} = k_0(\vec{e}_y + \vec{e}_x) - ik_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y)/\sqrt{2} = k_0\left(\left(1 - i/\sqrt{2}\right)\vec{e}_x + (1 + i/\sqrt{2})\vec{e}_y\right) \quad .$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Im freien Raum werden die Wellen $\vec{H}_1 = H_0 \exp\{i(kx-\omega t)\}(\vec{e}_y - i\vec{e}_z)$ und $\vec{H}_2 = 2H_0 \exp\{i(kx-\omega t)\}(i\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ miteinander überlagert. Wie ist das resultierende elektrische Feld polarisiert?

Lösung

Die Polarisation einer Welle ergibt sich aus dem Realteil des elektrischen Feldes. Hier ist nur das magnetische Feld angegeben, es handelt sich um ebene Wellen der selben Ausbreitungsrichtung $\vec{k} = k\vec{e}_x$. Das elektrische Feld ergibt sich aus dem Zusammenhang $\omega\varepsilon\varepsilon_0 = \vec{H} \times \vec{k}$. Wegen der selben Ausbreitungsrichtung kann hier einfach

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = H_0 \exp\{i(kx-\omega t)\}((1+2i)\vec{e}_y + (2-i)\vec{e}_z) = H_0 \exp\{i(kx-\omega t)\}(1+2i)(\vec{e}_y - i\vec{e}_z)$$

geschrieben werden. Daraus resultiert

$$\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = kH_0 \exp\{i(kx-\omega t)\}(1+2i)(\vec{e}_z + i\vec{e}_y) = \sqrt{5}kH_0 \exp\{i(kx-\omega t + \arctan 2)\}(\vec{e}_z + i\vec{e}_y) =$$

und er Realteil lautet

$$\mathrm{Re}\left\{\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}\right\} = \sqrt{5}kH_0 \left(\cos\{kx-\omega t+\arctan 2\}\vec{e}_z - \sin\{kx-\omega t+\arctan 2\}\vec{e}_y\right) \quad .$$

Es handelt sich also um eine zirkular polarisierte Welle, die rechts um die Ausbreitungsrichtung dreht.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die Welle $\vec{H}_1 = H_0 \exp\{i(kx+\omega t)\}(\vec{e}_y - \vec{e}_z)$ trifft auf die Grenzfläche $(\vec{e}_y + \vec{e}_z) \circ \vec{r} = 0$. Wie ist die Welle bezüglich der Grenzfläche polarisiert?

Lösung

Für die Polarisation bezüglich der Grenzfläche muss der Normalenvektor $\vec{n}$ herangezogen werden. Zusammen mit dem Ausbreitungsvektor $\vec{k}$ ergibt sich der Lateralvektor, der die Polarisation bezüglich der Grenzfläche eindeutig bestimmt. Hier gilt $\vec{n} = (\vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{2}$ und $\vec{k} = -k\vec{e}_x$. Damit ergibt sich aus $\vec{n} \times \vec{k} = k(\vec{z} - \vec{e}_y)/\sqrt{2}$ der Lateralvektor

$$\vec{e}_\ell = (\vec{z} - \vec{e}_y)/\sqrt{2} \quad .$$

Das magnetische Feld ist parallel zu $\vec{e}_\ell$, also ist die Welle TM bezüglich der Grenzfläche polarisiert. Alternativ hätte man das ohne Berechnung des Lateralvektors auch durch den Test $\vec{n} \circ \vec{H} = 0$ und $\vec{n} \circ \vec{E} \neq 0$ herausfinden können.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Eine Welle fällt aus Luft auf die ebene Grenzfläche $y = 0$. Im angrenzenden unmagnetischen Medium wird das elektrische Feld $\vec{E}_2 = E_0 \exp\{i(k_0x - k_0y + \omega t)\}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ gemessen. Wie lautet das elektrische Feld der einfallenden Welle?

Lösung

Für die Berechnung wird der luftgefüllte Halbraum mit dem Index 1 und der mediengefüllte Halbraum mit Index 2 versehen. Die angegebene Welle hat den Wellenzahlvektor

$$\vec{k}_{21} = k_0(\vec{e}_y - \vec{e}_x) \quad .$$

Der Normalenvektor auf die Grenzfläche ist $\vec{n} = \vec{e}_y$. Für die Berechnung des elektrischen Feldes der Welle im angrenzenden Medium muss festgestellt werden, welche Polarisation vorliegt. Da das elektrische Feld der transmittierten Welle eine Normalenkomponente hat, ist sie zumindestens teilweise TM- polarisiert. Für eine genaue Angabe wird der Lateralvektor benötigt, der senkrecht zur Einfalls- oder Ausfallsebene, also senkrecht zu $\vec{n}$ und $\vec{k}_{21}$ liegt. Das ist hier $\vec{e}_\ell = \vec{e}_z$. Das magnetische Feld der angegebenen Welle lautet wegen des unmagnetischen Mediums

$$\begin{aligned} \omega\mu_0\vec{H}_{\mathrm{tr}} &= \vec{k}_{21} \times \vec{E}_{\mathrm{tr}} = k_0E_0 \exp\{i(k_0x - k_0y + \omega t)\}(\vec{e}_y - \vec{e}_x) \times (\vec{e}_x + \vec{e}_y) \\ &= -2k_0E_0 \exp\{i(k_0x - k_0y + \omega t)\}\vec{e}_z \quad , \end{aligned}$$

ist also TM-polarisiert.

Hier ist $\varepsilon_1 = 1$ (Luft) und $\varepsilon_2 = 2$ wegen $k_{21} = \sqrt{2}k_0$ und unmagnetischer Medien. Mit der Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors $\vec{k}_{\mathrm{t}} = (\vec{n} \times \vec{k}) \times \vec{n} = -k_0\vec{e}_x$ resultiert, dass die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der Welle im Halbraum 1 verschwindet und $\vec{k}_1 = -k_0\vec{e}_x$ resultiert.

Die Welle in Medium 1 läuft also parallel zur Grenzfläche. In diesem Fall kann nicht zwischen einfallender und reflektierter Welle unterschieden werden. Der Ansatz für die magnetische Feldstärke lautet

$$\vec{H}_1 = H_1 \exp\{i(k_0x + \omega t)\}\vec{e}_z$$

und aus der Stetigkeitsbedingung für die stromfreie Grenzfläche ergibt sich

$$H_1 = \frac{-2k_0}{\omega\mu_0}E_0$$

woraus mit dem Ansatz

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{01} \exp\{i(k_0x + \omega t)\}$$

$$\vec{E}_{01} = \frac{1}{\omega\varepsilon_0}(\vec{H}_1 \times \vec{k}_1) = 2E_0\vec{e}_y$$

resultiert.

Aufgabe 6 (2 Punkte)

In einem Medium mit relativer Dielektrizitätszahl ε wird die elektrische Feldstärke $1\,\mathrm{V/m}\sin\{2\pi\frac{x}{1\,\mathrm{cm}}\}\vec{e}_x$ gemessen. Wie groß ist die Polarisationsladungsdichte?

Lösung

Die Polarisationsladungsdichte resultiert aus $\nabla \circ \vec{P}$. Dabei kann $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}$ und $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ zur Berechnung von $\vec{P}$ aus $\vec{E}$ verwendet werden:

$$\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\vec{E} \quad .$$

Somit ergibt sich in dem hier homogenen Medium

$$-\varrho_\mathrm{p} = \nabla \circ \vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon - 1)\nabla \circ \vec{E} = 8\pi^2(\varepsilon - 1)10^{-5}\,\mathrm{As/m^3}\cos\{2\pi\frac{x}{1\,\mathrm{cm}}\} \quad .$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

In einem geraden Linienleiter der Länge ℓ wird die Stromdichte $I\cos\{\pi\frac{u}{\ell} - \omega t\}$ gemessen, wobei u die Entfernung von der Mitte des Leiters ist. Wie groß ist die Ladungsdichte an den Enden des Leiters?

Lösung

Aus der Kontinuitätsgleichung $\nabla \circ \vec{j} + \partial/\partial t\varrho = 0$ resultiert die Ladungsdichte an den Enden des Leiters, wenn man die zugehörige Stetigkeitsbedingung $\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\partial/\partial t\varrho_\mathrm{s}$ verwendet. Die Stromdichte ist in diesem Fall durch $\vec{j} = I\cos\{\pi\frac{u}{\ell} - \omega t\}\delta\{v\}\delta\{w\}\vec{e}_u$ gegeben, wenn v und w die zum Draht senkrechten Koordinaten darstellen. Am Ende des Drahtes in u-Richtung ist $u = \ell/2$ und $\vec{j}_2 = 0$ einzusetzen. Somit resultiert $\partial/\partial t\varrho_\mathrm{s} = I\cos\{\pi/2 - \omega t\}\delta\{v\}\delta\{w\}$,
also

$$\varrho_\mathrm{s} = -I/\omega\sin\{\pi/2 - \omega t\}\delta\{v\}\delta\{w\}$$

und bei $u = -\ell/2$

$$\varrho_\mathrm{s} = I/\omega\sin\{-\pi/2 - \omega t\}\delta\{v\}\delta\{w\} \quad .$$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Im freien Raum liegt eine ebene kreisförmige Linienladung mit Radius a. Die Ladungsstärke ändert sich zeitlich harmonisch und ist entlang des Umfangs sinusförmig verteilt, wobei auf dem Umfang genau eine Periode durchschritten wird. Wie groß ist das elektrische Feld auf der Kreisachse im Raum?

Lösung

Hier kann das Coulombintegral verwendet werden:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \varrho\{\vec{r}'\} \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}^3 r' \quad .$$

Das Koordinatensystem wählt man so, dass die Ringladung paraxial zur z-Achse in der x-y-Ebene liegt. Dann ergibt sich für die Ladungsdichte in Zylinderkoordinaten
$\varrho\{\vec{r}\} = \varrho'\delta\{z\}\delta\{\rho - a\}$. Es gilt $\mathrm{d}^3 r' = \rho \, \mathrm{d}\phi' \, \mathrm{d}\rho' \, \mathrm{d}z'$ und auf der Kreisachse
$\vec{r} - \vec{r}' = -\rho'\vec{e}_{\rho'} + (z - z')\vec{e}_z = -\rho'(\cos\{\phi'\}\vec{e}_x + \sin\{\phi'\}\vec{e}_y) + (z - z')\vec{e}_z$.
Nach Aufgabenstellung ist

$$\varrho' = \varrho_0 \sin\{\phi + \omega t\} = \varrho_0 \sin\{\phi\} \cos\{\omega t\} + \varrho_0 \cos\{\phi\} \sin\{\omega t\} \quad ,$$

also

$$\varrho = \varrho_0 \cdot (\sin\{\phi\} \cos\{\omega t\} + \cos\{\phi\} \sin\{\omega t\}) \cdot \delta\{z\} \cdot \delta\{\rho - a\} \quad .$$

Damit ergibt sich unter Berücksichtigung von

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2\{x\} \, \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos^2\{x\} \, \mathrm{d}x &= \pi \\ \int_0^{2\pi} \cos\{x\} \sin\{x\} \, \mathrm{d}x &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \int\limits_{0}^{2\pi} \varrho_0 (\sin\{\phi'\}\cos\{\omega t\} + \cos\{\phi'\}\sin\{\omega t\})\delta\{z'\}\delta\{\rho' - a\} \\
&\quad \frac{-\rho'(\cos\{\phi'\}\vec{e}_x + \sin\{\phi'\}\vec{e}_y) + (z - z')\vec{e}_z}{(\rho'^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \rho' \, \mathrm{d}\phi' \, \mathrm{d}\rho' \, \mathrm{d}z' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{0}^{2\pi} \varrho_0 a (\sin\{\phi'\}\cos\{\omega t\} + \cos\{\phi'\}\sin\{\omega t\}) \frac{a\cos\{\phi'\}\vec{e}_x + a\sin\{\phi'\}\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}\phi' \\
&= \frac{1}{4\varepsilon_0} \varrho_0 \frac{a^2}{(a^2 + z^2)^{3/2}} (\sin\{\omega t\}\vec{e}_x + \cos\{\omega t\}\vec{e}_y) \quad .
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9 (9 Punkte)

Ein monochromatischer Lichtstrahl passiert zwei unmagnetische, planparallele Plättchen, deren Materialeigenschaften durch $n_1 = 2$ bzw. $n_2 = 3$ beschrieben sind. Beide Plättchen stehen jeweils im Brewsterwinkel im Strahlengang und haben dieselbe Einfallsebene. Bevor der Lichtstrahl auf das erste Plättchen trifft, ist das Verhältnis der TE- und TM-Amplitude gleich. Geben Sie das Verhältnis des TE- und TM-Anteils an, nachdem das Licht beide Plättchen passiert hat.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 10 (4 Punkte)

Eine ungeladene dielektrische Kugel mit Radius R und Dielektrizitätszahl ε_1 sei von einem homogenen, isotropen Dielektrikum mit Dielektrizitätszahl ε_2 umgeben. Das Feld innerhalb und außerhalb der Kugel ist durch

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \cdot \frac{3\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \vec{e}_z$$

bzw.

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 \vec{e}_z - E_0 \cdot R^3 \cdot \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + 2\varepsilon_2} \left(\frac{\vec{e}_z}{r^3} - \frac{3z\vec{r}}{r^5} \right)$$

gegeben. Geben Sie das Dipolmoment der Kugel an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 11 (3 Punkte)

Eine ebene Welle breitet sich im Medium 1 (n_1, unmagnetisch) aus und fällt unter dem Winkel θ auf die Grenzfläche zu Medium 2 (n_2, unmagnetisch). Legen Sie ein Koordinatensystem fest und geben Sie die Wellenzahlvektoren der einfallenden, reflektierten und transmittierten Welle in diesem Koordinatensystem an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 12 (5 Punkte)

Ein Zylinderkondensator bestehend aus zwei koaxialen Zylindern der Länge l mit Radien R_1 und R_2 ($R_1 < R_2$) befindet sich im Vakuum. Auf dem inneren Zylinder herrscht das Potenzial V_1, auf dem äußeren Zylinder befindet sich die Ladung Q_2. Beide Zylinder sind homogen geladen. Feldverzerrungen an den Enden sind zu vernachlässigen. Bestimmen Sie den Potentialverlauf unter den gegebenen Randbedingungen.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 13 (5 Punkte)

Durch einen rechteckigen Leiter mit der Querschnittsfläche $A = a \cdot b$ (a in x-Richtung, b in z-Richtung) und der Länge l (in y-Richtung) fließt ein homogener Strom $I \cdot \vec{e}_y$. Der Leiter wird zusätzlich homogen vom magnetischen Fluss $\vec{B} = -B_0 \cdot \vec{e}_x$ durchsetzt. Zwischen Ober- und Unterseite des Leiters fällt die Spannung U ab. Wie groß ist die Ladungsträgerdichte im Leiter?

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.