Aufgabe 1 (7 Punkte)

Eine ebene Welle der Form

$$\vec{E} = (E_{\mathrm{x}}, -iE_{\mathrm{x}}, 0) \exp\{i(kz + \omega t)\}$$

trifft aus dem Vakuum bei $z = 0$ auf ein Medium mit $\varepsilon = 6$ und $\mu = 1,5$, das sich im Weiteren unendlich ausdehnt. Wie groß sind die Reflexionsfaktoren der Amplitude für den TE- und TM-Anteil? Wie ist die Welle polarisiert bevor sie auf das Medium trifft (Begründung erforderlich!)?

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Gegeben ist eine koaxiale Anordnung aus einem dünnen Draht und einem dünnen kreisförmigen Hohlleiter mit Radius a. Sowohl im Draht als auch im Hohlleiter fließt der Strom J, allerdings in entgegengesetzter Richtung. Geben Sie das Magnetfeld innerhalb und außerhalb dieser koaxialen Anordnung an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist das $\vec{H}$-Feld einer elektromagnetischen Welle als

$$\vec{H} = -H_0 \exp\{i(\omega t - kz)\}\vec{e_{\mathrm{y}}} + iH_1 \exp\{i(\omega t - kz)\}\vec{e_{\mathrm{x}}}.$$

Geben Sie die Polarisation der Welle mit Begründung an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Eine nichtleitende Kugel ($\varepsilon = 1$) mit dem Radius a und dem Mittelpunkt im Ursprung habe einen kugelförmigen Hohlraum mit dem Radius b und dem Mittelpunkt bei $x = b$, $y = 0$ und $z = 0$. Die Kugel besitze die homogene Raumladungsdichte ϱ. Geben Sie das elektrische Feld im Hohlraum an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Gegeben sind zwei metallische Kugelschalen mit den Radien a und b ($b > a$). Die innere Schale ist geerdet und die äußere Schale trage die Ladung q. Geben Sie die Ladung der inneren Kugelschale an.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Gegeben sind 2 gerade, unendlich lange Elektroden (Dicke vernachlässigbar) mit Innenradius r_i und Außenradius r_a, die als Koaxialkabel angeordnet sind. Das Material zwischen den Elektroden besitzt die homogene Leitfähigkeit σ. Desweiteren liegt zwischen den Elektroden die Spannung U an. Andere Spannungsabfälle sind nicht vorhanden. Bestimmen Sie den Strom, welcher im Abschnitt der Länge L von der inneren zur äußeren Elektrode fließt.

Lösung

Noch keine Musterlösung verfügbar.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

In Bereich 1 bei $x > \frac{d}{2}$ sei ein homogenes Dielektrikum ($\varepsilon_1 > 1$) und es gelte

$$\vec{E}_1 = E_0 \exp\left\{ i \left(\frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c_0} z - \omega t \right) \right\} \vec{e}_y \,.$$

In Bereich 2 bei $x \leq \frac{d}{2}$ sei Vakuum. Wie lautet das elektrische Feld in Bereich 2?

Lösung

Bei dem angegebenen Feld handelt es sich um eine Welle, die in z-Richtung läuft, also parallel zur Grenzfläche. Formal handelt es sich um eine TE-Welle, da das elektrische Feld parallel zur Grenzfläche liegt und keine Normalkomponente aufweist. In dem Fall des parallelen Einfalls einer Welle ergibt sich, dass es keine reflektierte Welle gibt. Das Feld im angrenzenden Medium muss zur Erfüllung der Randbedingungen auch mindestens in diese Richtung laufen. Somit ist die Tangentialkomponente durch

$$(\vec{n} \times \vec{k}_2) \times \vec{n} = \vec{k}_1 = \frac{\omega\sqrt{\varepsilon_1}}{c_0} \vec{e}_z = k_0\sqrt{\varepsilon_1}\vec{e}_z = k_1 \vec{e}_z$$

gegeben. Die Normalkomponente des Ausbreitungsvektors der Welle im angrenzenden Raum ergibt sich aus der Dispersionsrelation zu

$$k_2 \circ \vec{e}_x = \pm k_0 \sqrt{1 - \varepsilon_1} = \pm i k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - 1} \quad ,$$

wobei das Vorzeichen noch zu bestimmen ist. Bei $x = d/2$ muss das tangentiale elektrische Feld stetig sein:

$$\vec{E}_2\{x = d/2\} = E_0 \exp\{i(k_1 z - \omega t)\}\vec{e}_y \quad .$$

Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} \vec{E}_2 &= E_0 \exp\{i(k_1 z \pm i k_0 \sqrt{\varepsilon_1 - 1}(x - d/2) - \omega t)\}\vec{e}_y \\ &= E_0 \exp\{i(k_1 z - \omega t) \mp k_0\sqrt{\varepsilon_1 - 1}(x - d/2)\}\vec{e}_y \quad . \end{aligned}$$

Das Vorzeichen der Normalkomponente von $\vec{k}_2$ ergibt sich aus der Bedingung, dass das Feld unendlich weit entfernt von der Grenzfläche (bei $x \to \infty$) verschwinden muss. Das ergibt sich für das positive Vorzeichen, so dass das gesuchte Feld

$$\vec{E}_2 = E_0 \exp\{i(k_1 z - \omega t) - k_0\sqrt{\varepsilon_1 - 1}(x - d/2)\}\vec{e}_y \quad .$$

lautet.

Aufgabe 8 (4 Punkte)

Auf der Oberfläche einer sich im Ursprung befindenden Kugel vom Radius R herrscht die Oberflächenstromdichte $\vec{j} = j_0 \vec{e}_\phi$. Wie lautet das magnetische Vektorpotential auf der z-Achse außerhalb der Kugel?

Lösung

Das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ berechnet sich zu

$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}(\vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|} \, \mathrm{d}^3\vec{r'} \quad .$$

In Kugelkkordinaten lautet $\mathrm{d}^3\vec{r'} = r'^2 \sin\{\theta'\} \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}\phi' \, \mathrm{d}r'$. Die Stromdichte hat die Darstellung $\vec{j} = j_0 \delta\{r - a\} \vec{e}_\phi$. Auf der z-Achse gilt

$$|\vec{r} - \vec{r'}|^2 = z^2 + r'^2 + 2zr' \cos\{\theta\}$$

und somit ergibt sich

$$\vec{A} = \iiint \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{j_0 \delta\{r' - a\} \vec{e}_{\phi'}}{\sqrt{z^2 + r'^2 + 2zr' \cos\{\theta\}}} r'^2 \sin\{\theta'\} \, \mathrm{d}\theta' \, \mathrm{d}\phi' \, \mathrm{d}r' \quad .$$

Hier wird der Vektor $\vec{e}_\phi$ über 2π integriert. Alle anderen Terme sind bezüglich dieser Integration konstant. Somit ergibt sich

$$\vec{A}\{x = 0; y = 0; z\} = 0 \quad .$$

Aufgabe 9 (8 Punkte)

Eine Blochwelle wird durch den Ansatz

$$\vec{E} = u\{x, y, z\} \exp\{i\,(k(z - z_0) - \omega t)\}\, \vec{e}_x$$

beschrieben. Welche Differentialgleichung muss $u\{\vec{r}\}$ in einem quellenfreien Raumgebiet erfüllen, damit die Blochwelle die Maxwell-Gleichungen erfüllt?

Lösung

Die Maxwell-Gleichungen sind für eine Welle erfüllt, wenn die Wellengleichung

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} = 0$$

gelöst wird. Einsetzen ergibt in Teilschritten

$$\begin{aligned}
\Delta\vec{E} &= \Big((\Delta u)\exp\big\{i\,(k(z-z_0)-\omega t)\big\} + 2(ik)\big(\frac{\partial}{\partial z}u\big)\exp\big\{i\,(k(z-z_0)-\omega t)\big\} \\
&\quad -uk^2\exp\big\{i\,(k(z-z_0)-\omega t)\big\}\Big)\vec{e}_x \\
&= \left(\frac{1}{u}\Delta u + i\frac{2k}{u}\frac{\partial}{\partial z}u - k^2\right)u\exp\big\{i\,(k(z-z_0)-\omega t)\big\}\vec{e}_x \\
&= \left(\frac{1}{u}\Delta u + i\frac{2k}{u}\frac{\partial}{\partial z}u - k^2\right)\vec{E}
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = -\omega^2\vec{E}$$

und somit

$$\frac{1}{u}\Delta u + i\frac{2k}{u}\frac{\partial}{\partial z}u - k^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} = 0$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Ein Molekül löst sich aus der Elektrode eines ebenen Plattenkondensators und prallt auf die Gegenelektrode. Welche Geschwindigkeit hat das Molekül, wenn es die Masse m und Ladung q besitzt und der Kondensator auf die Spannung U geladen ist?

Lösung

Das Molekül hat die potenzielle Energie $W = qU$, wenn es sich gerade aus der Elektrode gelöst hat. Wenn es auf der anderen Seite ankmmt, hat es keine potezielle Energie mehr, dafür aber kinetische Energie $W = \frac{1}{2}mv^2$. Auf Grund der Energieerhaltung muss diese gerade so groß wie der Unterschied in der potenziellen Energie sein. somit ergibt sich

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \quad .$$

Aufgabe 11 (7 Punkte)

Drei Kondensatoren der Kapazitäten C, $2C$ und C werden auf die Spannung U geladen und anschließend in Reihe geschaltet. Die Reihenschaltung wird nun über einen Widerstand R kurzgeschlossen. Welche Ladung fließt bis zum Abschluss des Vorgangs durch die Kondensatoren? Wie groß ist deren jeweilige Spannung danach?

Lösung

Zu Beginn liegt in der Reihenschaltung die Spannung $3U$ an. Die Ladungen der Einzelnen Kapazitäten sind $Q_j = \frac{U}{C_j}$. Durch den Entladevorgang fließt der selbe Strom über die selbe Zeit durch alle Kapazitäten, also werden sie alle um die selbe Ladungsmenge ΔQ entladen. Am Ende des Entladungsvorgangs ist somit ihre Spannung um jeweils $\Delta U_j = \frac{\Delta Q}{C_j}$ gesunken. Nach dem Entladen liegt keine Spannung mehr am Widerstand an. Somit muss gelten

$$0 = 3U - \sum_{j=1}^{3} \Delta U_j = 3U - \frac{\Delta Q}{C}(1 + 0.5 + 1) \quad .$$

Also ist die gesuchte Ladung

$$\Delta Q = 6/5\, CU = 1.2CU \quad .$$

Die Endspannungen lauten

$$U_j = U - \Delta U_j$$

und somit

$$U_1 = U_3 = U - 1.2U = -0.2U$$

und

$$U_2 = U - 0.6U = 0.4U \quad .$$

Aufgabe 12 (4 Punkte)

Vier Punktladungen sind in der Form eines ebenen Quadrats mit Kantenlänge $2a$ angeordnet. Ihre Ladung beträgt $Q, 2Q, 3Q$ und $4Q$, wobei die Reihenfolge einem Umlauf am Umfang entspricht.
Wie groß muss eine Ladung Q_5 sein, damit Ladungsneutralität herrscht? Wo muss Q_5 platziert werden, damit auch das Dipolmoment verschwindet?
Hinweis: Skizzieren Sie die Anordnung. Es ist praktisch, das Koordinatensystem in die Mitte des Quadrats parallel zu den Seiten zu legen.

Lösung

Ladungsneutralität heißt

$$Q_\mathrm{v} = \iiint \varrho_\mathrm{V}\, \mathrm{d}^3 r = 0$$

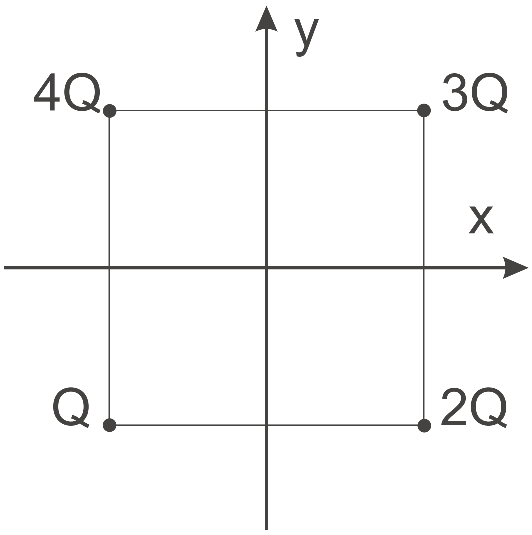

Abbildung 1: Leiterschleife in der $x - y$-Ebene.

was hier bei den konzentrierten Ladungen auf

$$\sum_{j=1}^{5} Q_j = 0$$

hinausläuft. damit ergibt sich durch Umstellen

$$Q_5 = -\sum_{j=1}^{4} Q_j = -10Q \quad .$$

Das elektrische Dipolmoment einer Ladungsverteilung ist

$$\vec{p} = \iiint \vec{r} \varrho_{\mathrm{V}}\{\vec{r}\} \, \mathrm{d}^3 r \quad .$$

Befindet sich die Ladung Q_5 bei $\vec{r}_5$, ergibt sich für $\vec{p}$ insgesamt

$$\vec{p} = 4aQ\vec{e}_{\mathrm{y}} + Q_5\vec{r}_5 = 4aQ\vec{e}_{\mathrm{y}} - 10Q\vec{r}_5 \quad .$$

Damit das Dipolmoment verschwindet, muss $\vec{r}_5$ den Wert $0.4a\vec{e}_{\mathrm{y}}$ annehmen.