Aufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Elektronenstrahl ist entlang der z-Achse gerichtet. Bei $z = 0$ und bei $z = L$ befindet sich jeweils eine Lochblende, welche nur Teilchen transmittieren lässt, die sich auf der z-Achse befinden. Zwischen den Blenden wirkt ein homogenes elektrisches Feld $\vec{E} = E\vec{e}_x$. Die Geschwindigkeit der Elektronen ist v_0 bei $z = 0$. Welche Größe muss ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ zwischen den Blenden haben, damit alle Elektronen die Blende bei $z = L$ passieren können? An welchen Orten treffen die Elektronen auf, wenn ihre Geschwindigkeit bei $z = 0$ von v_0 abweicht (qualitativ, keine Berechnung)?

Lösung

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial $\vec{A}\{\vec{r}\}$ habe die Form $f\{r\}\vec{e}_r$. Bestimmen Sie $f\{r\}$ so, dass $\vec{A}\{r\}$ der Coulomb-Eichung genügt.
Berechnen Sie das Feld der zugehörigen magnetischen Induktion $\vec{B}$.

Lösung

Aufgabe 3 (12 Punkte)

In der Ebene $z = 0$ befindet sich eine homogen geladene unendlich ausgedehnte Folie mit einer Flächenladungsdichte ϱ_S, eine zweite Folie mit entgegengesetzt gleicher Flächenladungsdichte befindet sich in der Ebene $z = d$. Beide Folien bewegen sich mit der Geschwindigkeit v in x-Richtung. Berechnen Sie die magnetische Induktion im ganzen Raum.
Hinweise:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a^2 + t^2}\,\mathrm{d}t &= \arctan\{x/a\} \\
\int \frac{1}{(a^2 + t^2)^{1/2}}\,\mathrm{d}t &= \ln\left\{t + \sqrt{a^2 + t^2}\right\} \\
\int \frac{1}{(a^2 + t^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}t &= -\frac{1}{a^2}\frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}
\end{aligned}$$

Lösung

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Eine Schallplatte mit Radius R trägt eine gleichförmige Flächenladungsdichte ϱ_S und rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω. Bestimmen Sie ihr magnetisches Dipolmoment.

Lösung

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Die Amplitude des elektrischen Feldes einer monochromatischen ebenen Welle ist $\vec{E} = E_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. Die zugehörige magnetische Feldamplitude ist $\vec{H} = H_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$. Die Welle läuft in einem Medium mit Brechzahl n. Wie lautet ihr Wellenzahlvektor?

Lösung

Der Wellenzahlvektor muss sowohl auf $\vec{H}$ als auch auf $\vec{E}$ senkrecht stehen. Wegen $\omega\mu\mu_0\vec{H} = \vec{k} \times \vec{E}$ hat $\vec{k}$ die Richtung von $\vec{E} \times \vec{H} = -2E_0H_0\vec{e}_z$. Die Dispersionsrelation verlangt $\|\vec{k}\| = nk_0$ und somit gilt $-\vec{k} = nk_0\vec{e}_z$.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Ein Dauermagnet wird gemäß Abbildung 1 parallel zur Fläche S einer ebenen Drahtschleife mit konstanter Geschwindigkeit v bewegt. Das Magnetfeld B ist im Bereich des Magneten homogen und steht senkrecht zur Schleife. Streufelder sind zu vernachlässigen. Die Schleife selbst verfügt über eine infinitesimale Unterbrechung. Berechnen Sie die im Draht induzierte Spannung als Funktion der Zeit, wenn sich der Magnet zum Zeitpunkt $t = 0$ gerade außerhalb der Schleife ist und zum Zeitpunkt $t = T$ den Schleifenbereich gerade wieder verlassen hat.

Lösung

Zur Berechnung der induzierten Spannung wird das Faraday-Gesetz in integraler Form heran gezogen:

$$\oint \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\phi \quad .$$

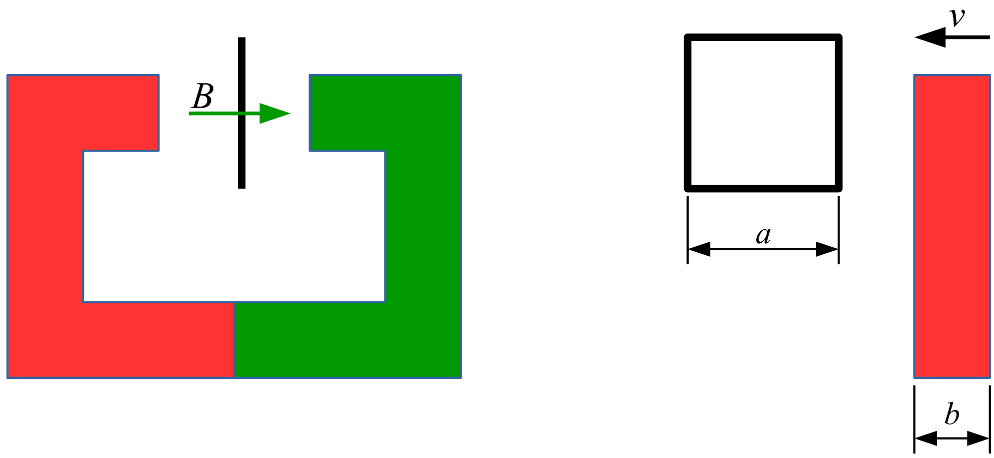

Abbildung 1: Drahtschleife im Magnetfeld eines Magneten mit Querschnitt $b \times b$.

Die linke Seite ist die induzierte Spannung, die an dem Spalt gemessen werden kann. Das Integral rechts ist der magnetische Fluss ϕ durch die Schleife wie in Abbildung 2 skizziert.
Die Durchflutung steigt bis zum Maximum $B_0 b^2$ in der Zeit $t_1 = b/v$ an, bleibt über die Zeit $t_2 = (a - 2b)/v$ konstant und sinkt dann wieder linear über die Zeit t_1. Die Zeit T für den Transfer berechnet sich somit zu $T = t_1 + t_2 + t_1 = a/v$. Damit kann der Fluss durch

$$\phi = B_0 b^2 \cdot \begin{cases} t/t_1 & & 0 \leq t \leq t_1 \\ 1 & \text{für} & t_1 \leq t \leq t_1 + t_2 \\ 1 - t/t_1 & & t_1 + t_2 \leq T \\ 0 & & \text{sonst} \end{cases}$$

beschrieben werden. Nach Anwendung der Zeitableitung resultiert für die Spannung

$$U = B_0 bv \begin{cases} 1 & & 0 \leq t \leq t1 \\ 0 & \text{fr} & t_1 < t \leq t1 + t_2 \\ -1 & & t_1 + t_2 < t \leq T \\ 0 & & \text{sonst} \end{cases} .$$

Aufgabe 7 (4 Punkte)

Der Wellenzahlvektor einer transmittierten Welle ist

$$\vec{k}_{\text{tr}} = i2k_0\vec{e}_x + 3k_0\vec{e}_z$$

Welche Mindestgröße hat die Brechzahl des Mediums, in dem die einfallende Welle läuft?

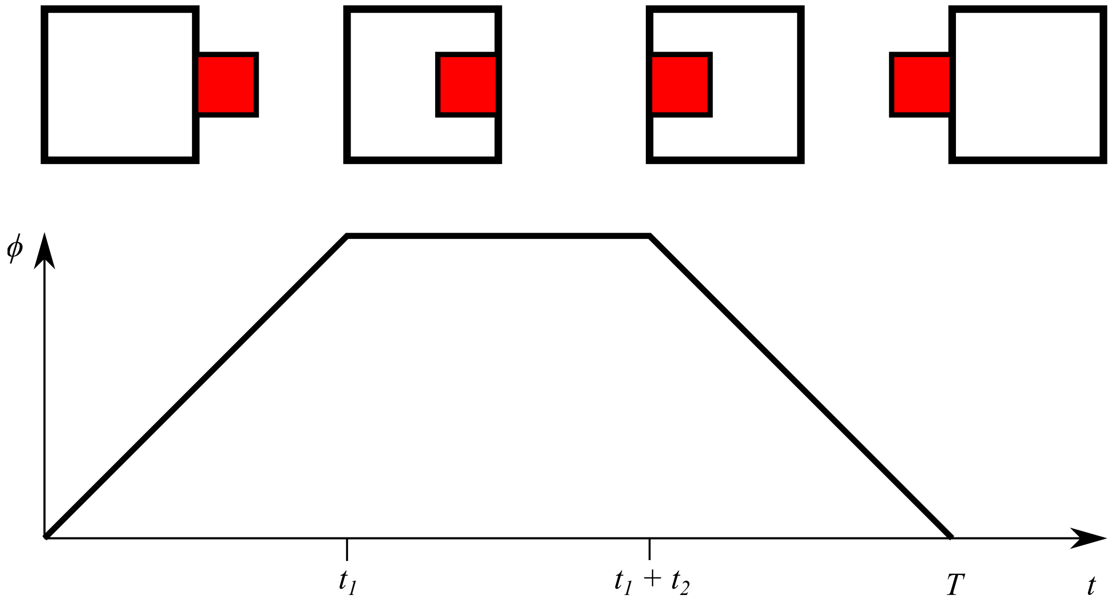

Abbildung 2: Durchflutung der Drahtschleife als Funktion der Zeit.

Lösung

Für die Wellenzahlvektoren von ebenen Wellen an einer Grenzfläche gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{ref}} - \vec{k}_{\mathrm{in}}) &= 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{ref}} + \vec{k}_{\mathrm{in}}) &= 0 \\ \vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{tr}} - \vec{k}_{\mathrm{in}}) &= 0 \\ \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} &= \sqrt{k_{\mathrm{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{ref}}\|^2} \\ . \end{aligned}$$

Nur der letzte Term kann imaginär werden. Damit resultiert

$$(\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{in}}) \times \vec{n} = (\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{tr}}) \times n = 3k_0\vec{e}_z \quad .$$

Für die Brechzahl gilt

$$n = \|\vec{k}_{\mathrm{in}}\|/k_0$$

mit

$$\|\vec{k}_{\mathrm{in}}\|^2 = (\vec{n} \circ (\vec{k}_{\mathrm{ref}})^2 + \|\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{in}}\|^2 \geq \|\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathrm{in}}\|^2 = (3k_0)^2 \quad .$$

Damit gilt $n \geq 3$.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Der Potenzialverlauf in einem Schichtstapel aus vier planparallelen Platten unterschiedlicher Materialien soll bestimmt werden. Die Platten haben die Dicken d_1 bis d_4 und sind unendlich ausgedehnt. In den Platten 1 und 4 herrscht die Leitfähigkeit σ, die Platten dazwischen tragen homogene Ladungsdichten $\varrho_2 > 0$ und $\varrho_3 < 0$. Die relative Dielektrizitätszahl ist hier $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon$.

Welche Dicke muss die Platte 3 haben, damit der gesamte Schichtstapel ungeladen ist? Berechnen Sie mit dieser Dicke den Potenzialverlauf im Stapel unter der Voraussetzung, dass kein Strom fließt und Platte 1 geerdet ist.

Lösung

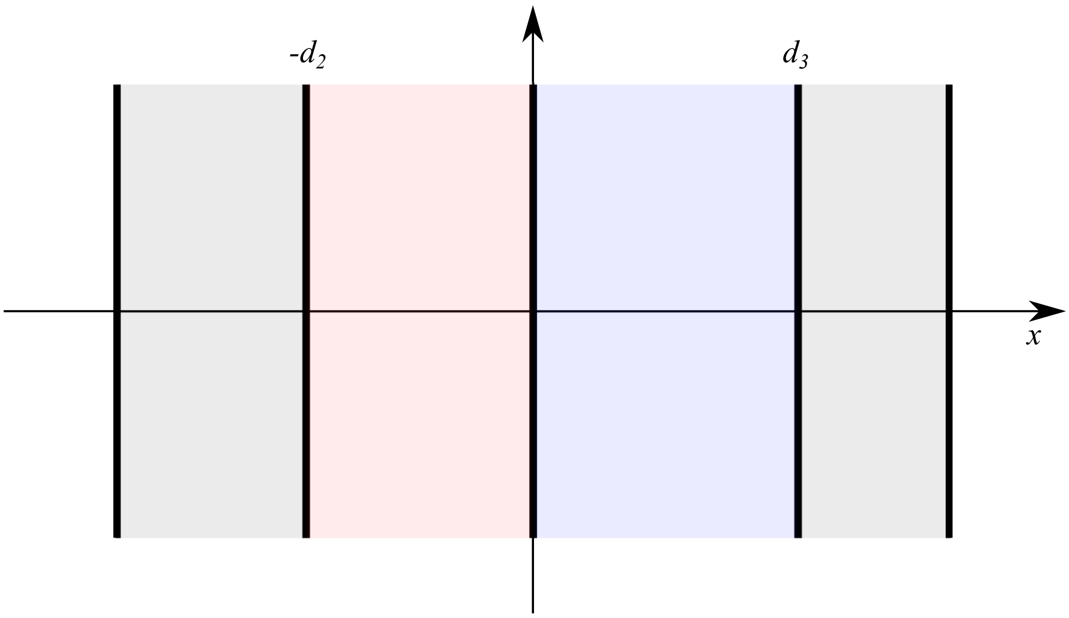

Abbildung 3: Wahl des Koordinatensystems.

Ladungsneutralität erfordert dass sich die Ladungen in allen Platten ausgleichen. Auf Grund der Leitfähigkeit der beiden äußeren Platten und des fehlenden Stromflusses können diese keine Ladungen tragen. Die mittleren Platten sind homogen geladen, damit reduziert sich der Vergleich der Ladungen von Volumenintegralen auf Integrale über die Dicke der Platten und diese wiederum auf eine einfache Multiplikation mit der Plattenstärke:

$$\varrho_2 d_2 + \varrho_3 d_3 = 0 \quad ,$$

also $d_3 = -d_2\varrho_2/\varrho_3$.
Zur Berechnung des Potenzials wird zunächst das elektrische Feld in der Struktur bestimmt und dann daraus das Potenzial gewonnen. Wegen der homogenen Ladung verbunden mit der unendlichen Ausdehnung der Platten kann es nur eine Ortsabhängigkeit in Richtung des Stapels geben, hier also in x-Richtung.
Daraus resultiert der Ansatz $V = V\{x\}$ und somit $\vec{E} = E\vec{e}_x$.
Im Bereich der Platte 1 und der Platte 4 ist das elektrische Feld jeweils wegen der Leitfähigkeit und des verschwindenden Stroms $E_{1,4} = 0$. Entsprechend gibt es hier jeweils ein konstantes Potenzial. Platte 1 ist geerdet und somit ist das Potenzial in der gesamten Platte $V_1 = 0$.
In den Platten 2 und 3 gilt mit obigem Ansatz

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} E_{2,3} = \frac{\varrho_{2,3}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{2,3}} \quad .$$

Die Lösung der DGL lautet im jeweiligen Bereich

$$E_{2,3} = \frac{\varrho_{2,3}}{\varepsilon_0 \varepsilon_{2,3}} x + c_{2,3} \quad .$$

Es wurden keine Flächenladungen angegeben. Somit resultiert auf Grund der Stetigkeit von $\vec{n} \circ \vec{D}$ bei $x = -d_2$und bei $x = 0$

$$c_2 = \frac{\varrho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} d_2$$

$$c_3 = \frac{\varrho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_3} d_2 = -\frac{\varrho_3}{\varepsilon_0 \varepsilon_3} d_3$$

und somit

$$E_2 = \frac{\varrho_2}{\varepsilon_0 \varepsilon_2} (x + d_2)$$

$$E_3 = \frac{\varrho_3}{\varepsilon_0 \varepsilon_3} (x - d_3) \quad .$$

Die Stetigkeitsbedingung für $\vec{n} \circ \vec{D}$ bei d_3 ist automatisch wegen der Bedingung der Ladungsneutralität erfüllt. Für das Potenzial resultiert jetzt einfach nach Integration

$$V_2 = -\frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}(x+d_2)^2 + f_2$$

und

$$V_3 = -\frac{\varrho_3}{2\varepsilon_0\varepsilon_3}(x-d_3)^2 + f_3 \quad .$$

Aus der Stetigkeit des Potenzials bei $-d_2$ und 0 resultieren $f_2 = 0$ und

$$f_3 = -\frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}d_2^2 + \frac{\varrho_3}{2\varepsilon_0\varepsilon_3}d_3^2 \quad .$$

Insgesamt ergibt sich also

$$\begin{aligned} V_2 &= -\frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}(x+d_2)^2\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon} \\ &= -\frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon}(x+d_2)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_3 &= \frac{\varrho_3}{2\varepsilon_0\varepsilon_3}\left(d_3^2-(x-d_3)^2\right) - \frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}d_2^2\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon} \\ &= \frac{1}{2\varepsilon_0\varepsilon}\left(\varrho_3\left(d_3^2-(x-d_3)^2\right) - \varrho_2 d_2^2\right) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} V_4 &= \frac{\varrho_3}{2\varepsilon_0\varepsilon_3}d_3^2 - \frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}d_2^2 \\ &= \varrho_3 d_3\left(\frac{d_3}{2\varepsilon_0\varepsilon_3} + \frac{d_2}{2\varepsilon_0\varepsilon_2}\right)\Big|_{\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon} \\ &= \frac{\varrho_3}{2\varepsilon_0\varepsilon}d_3(d_2+d_3) = -\frac{\varrho_2}{2\varepsilon_0\varepsilon}d_2(d_2+d_3) \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Die Grenzfläche zwischen zwei unterschiedlichen Medien wird durch $\vec{e}_y \circ (\vec{r} - 5\,\mathrm{cm}\vec{e}_x) = a$ mit $a = 0$ charakterisiert. In den Bereichen 1 ($a < 0$) und 2 ($a > 0$) läuft jeweils eine ebene Welle mit

$$\vec{H}_{1,2} = H_{1,2}\exp\{i(k_\mathrm{x}x + k_{\mathrm{y}1,2}y - \omega t)\}\vec{e}_z$$

von der Grenzfläche weg. Wie groß sind die Flächenstrom- und Flächenladungsdichte auf der Grenzfläche?

Lösung

Die angegebene Grenzfläche hat den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_y$ und Abstand $d = \vec{e}_y \circ 5\text{cm}\vec{e}_x = 0$ vom Ursprung. Die Stromdichte n der Grenzfläche resultiert aus

$$\vec{j}_\text{S} = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)\Big|_{\vec{n}\circ\vec{r}=d}$$

also

$$\begin{aligned}
\vec{j}_\text{S} &= \vec{e}_y \times (H_2 \exp\{i(k_\text{x}x + k_\text{y2}y - \omega t)\}\vec{e}_z - H_1 \exp\{i(k_\text{x}x + k_\text{y1}y - \omega t)\}\vec{e}_z)\Big|_{y=0} \\
&= (H_2 - H_1) \exp\{i(k_\text{x}x - \omega t)\}\vec{e}_x \quad .
\end{aligned}$$

Für die Flächenladungsdichte wird

$$\varrho_\text{S} = \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_{\vec{n}\circ\vec{r}=d}$$

herangezogen. $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ kann aus $\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \vec{H} \times \vec{k}$ bestimmt werden:

$$\vec{D} = \frac{1}{\omega}\left(\vec{H} \times \vec{k}\right) \quad .$$

Es resultiert

$$\begin{aligned}
\varrho_\text{S} &= \frac{1}{\omega}\vec{e}_y \circ \left(\vec{H}_2 \times \vec{k}_2 - \vec{H}_1 \times \vec{k}_1\right)\Big|_{y=0} \\
&= \frac{1}{\omega}\vec{e}_y \circ \Big(H_2\,(k_\text{x}\vec{e}_y - k_\text{y2}\vec{e}_x) \exp\{ik_\text{y2}y\} - \\
&\qquad H_1(k_\text{x}\vec{e}_y - k_\text{y1}\vec{e}_x) \exp\{ik_\text{y2}y\}\Big) \exp\{i(k_\text{x}x - \omega t)\}\Big|_{y=0} \\
&= \frac{k_\text{x}}{\omega}\,(H_2 - H_1) \exp\{i(k_\text{x}x - \omega t)\} \quad .
\end{aligned}$$

Der schnellere Weg:
Für die Flächenladungsdichte gilt die Kontinuitätsgleichung

$$\nabla \circ \vec{j}_\text{S} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varrho_\text{S} = 0 \quad .$$

Damit resultiert

$$\varrho_\text{S} = \frac{k_\text{x}}{\omega}(H_2 - H_1) \exp\{i(k_\text{x}x - \omega t)\} \quad .$$