Aufgabe 1 (3 Punkte)

Berechnen Sie die Kapazität C einer Kugel mit Radius R im freien Raum.

Lösung

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Ein stationärer Strom fließt entlang eines unendlich langen zylindrischen Drahtes mit Radius R. Bestimmen Sie die magnetische Induktion $\vec{B}$ innerhalb und außerhalb des Drahtes für die Fälle, dass
(a) der Strom gleichmäßig über die äußere Oberfläche des Drahtes verteilt ist
(b) ein konstante Stromdichte im Draht vorhanden ist.

Lösung

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Entlang der z-Achse fließt ein Wechselstrom $I = I_0 \sin\{\omega t\}$. Im Abstand ρ_0 befindet sich das Zentrum einer quadratische Leiterschleife mit Kantenlänge a ($\frac{a}{2} < \rho_0$). Jeweils zwei gegenüberliegende Kanten der Leiterschleifen sind parallel bzw. radial zur z-Achse angeordnet.
Berechnen Sie die Induktionspannung in der Leiterschleife.

Lösung

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Zwei scheibenförmige Metallplatten mit Plattenfläche A und zeitlich veränderlichem Abstand $d = d_\mathrm{a} \sin\{\omega t\} + d_0, \quad A \gg d_0 \gg d_\mathrm{a}$ sind mit einer Konstantspannungsquelle verbunden. Die Anordnung verhält sich wie ein idealer Plattenkondensator, d.h. das $\vec{E}$-Feld ist zwischen den Platten homogen und verschwindet außerhalb.
Bestimmen Sie den zeitlichen Verlauf
(a) der Ladung auf den Platten
(b) der Kraft zwischen den Platten
(c) des Stroms, der zwischen Spannungsquelle und Kondensator fließt.

Lösung

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Ein idealer Plattenkondensator mit Plattenfläche A ist mit der Ladung $\pm Q$ aufgeladen. Im Plattenzwischenraum befinden sich drei Schichten verschiedener Dielektrika mit den Dielektrizitätskonstanten ε_1 ε_2 und ε_3 sowie den Dicken d_1, d_2 und d_3. Bestimmen Sie die Felder $\vec{E}\{\vec{r}\}$, $\vec{D}\{\vec{r}\}$, und $\vec{P}\{\vec{r}\}$, den Potenzialverlauf $V\{\vec{r}\}$ sowie die Kapazität.

Lösung

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Eine ebene Welle läuft aus dem Bereich $y > y_0$ in der y-z-Ebene unter dem Winkel $\pi/6$ auf die Grenzfläche $y = y_0$ zwischen zwei unmagnetischen Medien mit den Brechzahlen $n_1 = 2/\sqrt{3}$ ($y < y_0$) und $n_2 = 2$ ($y > y_0$) zu. Der Einfallswinkel wurde gegen die Grenzflächennormale gemessen. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke ist $\vec{E}_0 = E_0(\vec{e}_y + \sqrt{3}\vec{e}_z)$. Wie lautet das magnetische Feld im Bereich $y < y_0$?

Lösung

Die Einfallsebene ist die y-z-Ebene. Damit ist der Vektor senkrecht zur Einlassebene $\vec{e}_\ell = \vec{e}_x$. Der Wellenzahlvektor ist

$$\vec{k}_{\text{in}} = \frac{k_2}{2}(-\sqrt{3}\vec{e}_y + \vec{e}_z) = k_0(-\sqrt{3}\vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad .$$

Das elektrische Feld der einfallenden Welle liegt in der Einfallsebene. Es gehört also im Bezug auf die Grenzfläche zu einer TM-Welle mit

$$\vec{H}_{0\mathsf{TMin}} = H_0\vec{e}_x = -\frac{4k_0}{\omega\mu_2\mu_0}E_0\vec{e}_x \quad .$$

Zur Berechnung des Transmissionsfaktors wird zunächst der Reflexionsaktor bestimmt. Dafür wird

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_1^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|^2}$$

benötigt. Mit $\vec{n} = -\vec{e}_y$ resultiert $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{\frac{4}{3}k_0^2 - k_0^2} = \frac{1}{3}\sqrt{3}k_0$. Daraus ergibt sich

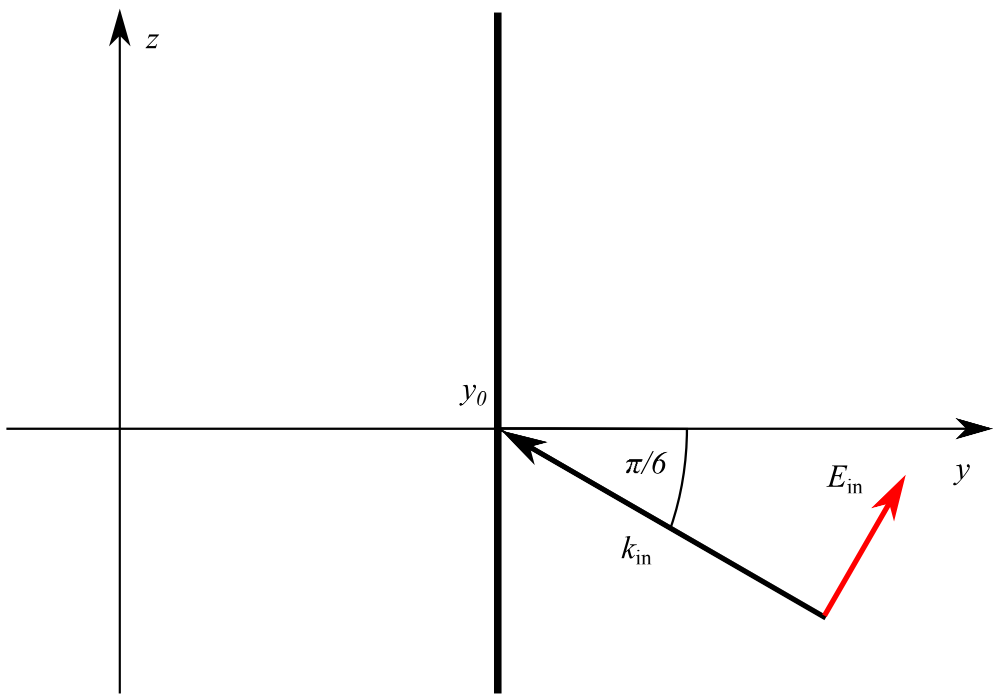

Abbildung 1: Wellenzahlvektor der einfallenden Welle in der Einfallsebene.

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\rm in}}{\varepsilon_{\rm in}} - \dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\rm tr}}{\varepsilon_{\rm tr}}}{\dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\rm in}}{\varepsilon_{\rm in}} + \dfrac{\vec{n}\circ\vec{k}_{\rm tr}}{\varepsilon_{\rm tr}}} = \frac{\dfrac{\sqrt{3}k_0}{4} - \dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{3}k_0}{\frac{4}{3}}}{\dfrac{\sqrt{3}k_0}{4} + \dfrac{\frac{1}{3}\sqrt{3}k_0}{\frac{4}{3}}} = 0 \quad .$$

Entsprechend resultiert $t_{\mathsf{TM}} = 1 + r_{\mathsf{TM}} = 1$ und somit

$$\vec{H}_{0\mathsf{TM}\rm tr} = t_{\mathsf{TM}}\vec{H}_{0\mathsf{TMin}} = \vec{H}_{0\mathsf{TMin}}$$

und

$$\vec{H}_{\mathsf{TM}\rm tr} = -\frac{4k_0}{\omega\mu_2\mu_0}E_0\vec{e}_x \exp\{i(\vec{k}_{\rm tr}\circ(\vec{r}-\vec{r}_0)-\omega t)\}$$

mit

$\vec{r}_0 = y_0 \vec{e}_y$ und

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_0(-\frac{1}{3}\sqrt{3}\vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad .$$

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Im Bereich $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ ($\varepsilon = \mu = 1$) lautet das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \left(\cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \sin\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_x - \sin\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_y \right) \exp\{i(\beta z - \omega t\} \quad .$$

Die angrenzenden Bereiche sind feldfrei. Welche Flächenstromdichte stellt sich auf der Grenzfläche bei $y = b$ ein?

Lösung

Zur Berechnung der Flächenstromdichte muss das Magnetfeld an der Grenzfläche herangezogen werden. Mit

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{B} = -\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{H}$$

resultiert

$$\begin{aligned}
-\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \vec{H} &= E_0 \Big(i\beta \sin\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_x + i\beta \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \sin\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_y \\
&\qquad -3\pi \frac{1}{a} \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_z - 5\pi \frac{1}{b} \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_z \Big) \exp\{i(\beta z - \omega t\} \\
\vec{H} &= \frac{1}{i\mu_0\omega} E_0 \Big(i\beta \sin\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_x + i\beta \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \sin\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_y \\
&\qquad -5\pi \frac{1}{b} \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_z - 3\pi \frac{1}{a} \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi \frac{y}{b}\} \vec{e}_z \Big) \exp\{i(\beta z - \omega t\} \quad .
\end{aligned}$$

Die Grenzfläche $y = b$ hat den Normalenvektor $\vec{e}_y$. Der Bereich $y > b$ ist gemäß Aufgabenstellung feldfrei. Somit resultiert für die Flächenstromdichte an dieser Stelle

$$\begin{aligned}
\vec{j}_{\mathrm{S}} &= -\vec{n} \times \vec{H}\Big|_{y=b} \\
&= \frac{1}{i\mu_0\omega} E_0 \Big(i\beta \sin\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi\} \vec{e}_z \\
&\qquad +5\pi \frac{1}{b} \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi\} \vec{e}_x + 3\pi \frac{1}{a} \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \cos\{5\pi\} \vec{e}_x \Big) \exp\{i(\beta z - \omega t\} \\
&= \frac{1}{\mu_0\omega} E_0 \left(-\beta \sin\{3\pi \frac{x}{a}\} \vec{e}_z + i\pi \left(\frac{3}{a} + \frac{5}{b} \right) \cos\{3\pi \frac{x}{a}\} \vec{e}_x \right) \exp\{i(\beta z - \omega t\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (5 Punkte)

Acht gleich große Ladungen q sind gleichmäßig am Umfang eines Kreises vom Radius a verteilt. Es soll eine neunte Ladung so angebracht werden, dass die Kraft auf alle Ladungen verschwindet. Welche Größe hat die neunte Ladung?

Lösung

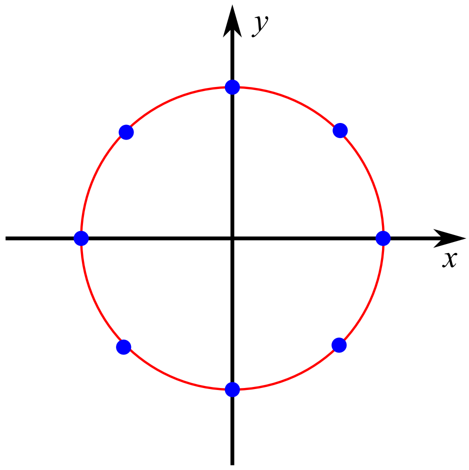

Abbildung 2: Anordnung der Ladungen im Raum.

Zur Berechnung der Kraft auf eine der Ladungen muss gemäß

$$\vec{F}\{\vec{r}\} = Q\{\vec{r}\}\vec{E}\{\vec{r}\}$$

das elektrische Feld der anderen Ladungen an ihrem Ort festgestellt werden. Dafür werden hier die Ladungen im Uhrzeigersinn beginnend bei 3 Uhr durchnummeriert. Die Orte sind dann

$$\begin{aligned}
\vec{r}_1 &= a\vec{e}_x \\
\vec{r}_2 &= \frac{a}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \\
\vec{r}_3 &= -a\vec{e}_y \\
\vec{r}_4 &= \frac{a}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x - \vec{e}_y) \\
\vec{r}_5 &= -a\vec{e}_x \\
\vec{r}_6 &= \frac{a}{\sqrt{2}}(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{r}_7 &= a\vec{e}_y\\ \vec{r}_8 &= \frac{a}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x+\vec{e}_y) \quad .\end{aligned}$$

Da alle Ladungen gleich groß sind, ergibt sich die Kraft auf Ladung 1 aus

$$\begin{aligned}\vec{F}_1 &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\sum_{j=2}^{8}\frac{\vec{r}_1-\vec{r}_j}{|\vec{r}_1-\vec{r}_j|^3}\\
&= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{(1-\sqrt{2}/2)\vec{e}_x+\sqrt{2}/2\vec{e}_y}{\sqrt{((1-\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}+\frac{\vec{e}_x+\vec{e}_y}{\sqrt{2}^3}+\frac{(1+\sqrt{2}/2)\vec{e}_x+\sqrt{2}/2\vec{e}_y}{\sqrt{((1+\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}\right.\\
&\qquad +\frac{\vec{e}_x}{4}\\
&\qquad \left.+\frac{(1+\sqrt{2}/2)\vec{e}_x-\sqrt{2}/2\vec{e}_y}{\sqrt{((1+\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}+\frac{\vec{e}_x-\vec{e}_y}{\sqrt{2}^3}+\frac{(1-\sqrt{2}/2)\vec{e}_x-\sqrt{2}/2\vec{e}_y}{\sqrt{((1-\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}\right)\\
&= \frac{Q^2}{2\pi\varepsilon_0 a^2}\left(\frac{(1-\sqrt{2}/2)}{\sqrt{((1-\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}+\frac{1}{\sqrt{2}^3}+\frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{((1+\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}+\frac{1}{8}\right)\vec{e}_x \quad .\end{aligned}$$

Dies Ergebnis wiederholt sich für alle anderen Ladungen, wobei die Richtung immer als $\vec{e}_\rho$ angegeben werden kann. Eine Ladung, die die Kraft kompensiert, müsste also irgendwo auf der ρ-Achse liegen. Der einzige Ort, den alle mögliche radialen Linien gemeinsam haben, ist der Ursprung. Also muss hier eine Ladung Q_0 angebracht werden, die auf die Ladung Q_1 die Kraft $-F_1$ ausübt. Damit gilt die Bedingung

$$-\vec{F}_1 \stackrel{!}{=} \frac{Q_1 Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\vec{e}_x \quad ,$$

woraus

$$Q_1 = -2Q\left(\frac{(1-\sqrt{2}/2)}{\sqrt{((1-\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}+\frac{1}{\sqrt{2}^3}+\frac{1+\sqrt{2}/2}{\sqrt{((1+\sqrt{2}/2)^2+0,5)}^3}+\frac{1}{8}\right)$$

folgt.

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Die x-Komponente eines elektrischen Feldes lautet

$$E_0\exp\{i(k_0(x-y)-\omega t)\} \quad .$$

Wie groß ist die y-Komponente?

Lösung

Die Darstellung des Feldes ist das Feld einer ebenen Welle mit Wellenzahlvektor

$$\vec{k} = k_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \quad .$$

Bei ebenen Wellen gilt $\vec{E} \circ \vec{k} = 0$, hier also $k_\mathrm{x} E_\mathrm{x} + k_\mathrm{y} E_\mathrm{y} = k_0(E_\mathrm{x} - E_\mathrm{y}) = 0$. Somit ist

$$E_\mathrm{y} = -E_\mathrm{x} = -E_0 \exp\{i(k_0(x-y) - \omega t)\} \quad .$$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Zwischen zwei konzentrischen, unendlich langen, ideal leitfähigen Kreiszylindern mit Radien a und c befindet sich eine ebenfalls unendlich lange kreiszylindrische homogene Flächenladung ϱ_S mit Radius b. Beide Metallzylinder sind geerdet. Wie ist der Potenzialverlauf zwischen den Zylindern?

Lösung

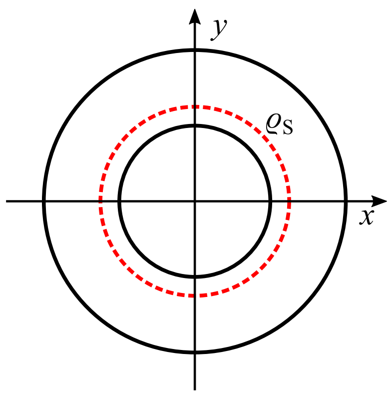

Abbildung 3: Gewähltes Koordinatensystem.

Der Breich zwischen den Zylindern ist völlig Zylindersymmetrisch und bis auf die Flächenladung ungeladen. Es werden zwei Bereiche gebildet:
Bereich 1: $a \leq \rho < b$
Bereich 2: $b < \rho \leq c$.
In beiden Bereichen gilt die Laplacegleichung mit den Lösungen

$$V_1 \quad = \quad V\{a\} + c_1 \ln\left\{\frac{\rho}{a}\right\}$$

$$V_2 \quad = \quad V\{c\} + c_2 \ln \left\{ \frac{\rho}{c} \right\} \quad .$$

Auf Grund der Erdung gilt $V\{a\} = 0$ und $V\{c\} = 0$. Stetigkeit des Potenzials bei b erfordert

$$c_1 \ln \left\{ \frac{b}{a} \right\} = c_2 \ln \left\{ \frac{b}{c} \right\} \quad .$$

Die Konstanten c_1 und c_2 hängen über die Flächenladung zusammen. Dafür wird die dielektrische Verschiebung benötigt:

$$\vec{D}_{1,2} = \varepsilon_0 \vec{E}_{1,2} = -\varepsilon_0 \nabla V_{1,2} = -\varepsilon_0 c_{1,2} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho \quad .$$

Die Stetigkeitsbedingung $\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\Big|_b = \varrho_\mathrm{S}$ ergibt $c_2 = c_1 - b\varepsilon_0 \varrho_\mathrm{S}$ und damit

$$c_1 = b\varepsilon_0 \varrho_\mathrm{S} \frac{\ln\left\{\frac{b}{c}\right\}}{\ln\left\{\frac{b}{c}\right\} - \ln\left\{\frac{b}{a}\right\}}$$

und

$$c_2 = b\varepsilon_0 \varrho_\mathrm{S} \frac{\ln\left\{\frac{b}{a}\right\}}{\ln\left\{\frac{b}{c}\right\} - \ln\left\{\frac{b}{a}\right\}} \quad .$$