Aufgabe 1 (5 Punkte)

Eine monochromatische Welle mit Kreisfrequenz ω befindet sich in einem ungeladenem, anisotropen Medium, in dem $\mu = 1$ und

$$[\varepsilon] = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

gilt.
Wie lautet die Lösung der Wellengleichung für das elektrische Feld?

Lösung

Wir betrachten die homogene Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\Delta\vec{E} - \mu\mu_0[\varepsilon]\varepsilon_0\vec{E} = 0$$

Da $[\varepsilon]$ diagonal ist, sind die Differentialgleichungen nach wie vor entkoppelt. Wir wählen eine ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})$$

als Ansatz und suchen einen Wellenvektor $\vec{k}$, so dass die Gleichung erfüllt ist. Nach Einsetztten des Ansatzes in Gleichung erhalten wir drei Dispersionsrelationen, für jede Raumrichtung eine:
x-Richtung:

$$k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 a$$

y-Richtung:

$$k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 b$$

z-Richtung:

$$k^2 = \omega^2\mu_0\epsilon_0 c\ .$$

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Eine sehr große Platte befindet sich im Abstand h parallel zur Erdoberfläche. Unterhalb der Platte schwebt eine Punktladung Q mit der Masse m im Abstand $d < h$ zur Platte.
Welche Flächenladung trägt die Platte?
Was passiert, wenn ein Dielektrikum zwischen die geladene Platte und die Punktladung gebracht wird?

Lösung

Für das elektrische Feld einer in x- und y-Richtung unendlich ausgedehnten Flächenladung ϱ_S, die bei $z = 0$ liegt, gilt:

$$E_x = 0, E_y = 0, E_z = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \ .$$

Auf die Punktladung wirkt somit die elektrische Kraft:

$$F_\mathrm{el} = QE_z \ .$$

Die Gewichtskraft, die auf die Punktladung wirkt, ist

$$F_\mathrm{gew} = ma = mg \ .$$

Diese beiden Kräfte müssen sich ausgleichen, damit die Kugel schwebt. Somit erhalten wir für die Flächenladung

$$\varrho_\mathrm{S} = -\frac{2mg\varepsilon_0}{Q} \ .$$

Ein Dielektrikum zwischen der Platte und der Punktladung ändert nichts, da sich das elektrische Feld außerhalb des Dielektrikums durch dieses nicht verändert.

Aufgabe 3 (2 Punkte)

Begründen Sie, weshalb sich eine geladene Kugel mit einer radialsymmetrischen Ladungsdichte zur Berechnung des elektrischen Feldes außerhalb der Kugel auf eine Punktladung mit der Größe der Gesamtladung der Kugel reduzieren lässt, die sich im Zentrum der Kugel befindet.

Lösung

Sowohl eine Punktladung als auch eine geladene Kugel haben eine radialsymmetrische Feldverteilung – eine radialsymmetrische Ladungsverteilung auf der Kugel vorausgesetzt. Nach dem Satz von Gauß spielt nur die Symmetrie und die Gesamtladung innerhalb einer Gaußschen Fläche für das Feld, welches diese durchsetzt, eine Rolle. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Ein Proton wird aus der Ruhe über eine Potentialdifferenz U beschleunigt und bewegt sich danach parallel zur Erdoberfläche.

Die Anordnung ist so orientiert, dass sich die Einflüsse des Erdmagnetfeldes und der Gravitation kompensieren.
Wie groß muss die Spannung U sein, damit das Proton weiterhin in die selbe Richtung fliegt? Vernachlässigen Sie die Effekte durch Gravitation und das Magnetfeld während der Beschleunigung im elektrischen Feld.

Schätzen Sie die Geschwindigkeit des Protons und die Spannung mit folgenden Werten ab:
Ladung eines Protons: $q = 1,602 \cdot 10^{-19}$ C
Masse eines Protons: $m_\mathrm{p} = 1,673 \cdot 10^{-27}$ kg
Erdbeschleunigung: $g = 9,81$ m/s^2
Erdmagnetfeld am Äquator: $B = 30$ µT

Lösung

Die Geschwindigkeit des Protons ergibt sich aus der Energie:

$$E_\mathrm{kin} = qU = \frac{1}{2} m_\mathrm{p} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m_\mathrm{p}}} \ .$$

Der Betrag der Gravitationskraft ist:

$$F = m_\mathrm{p} a = m_\mathrm{p} g \ .$$

Der Betrag der Lorentzkraft ist:

$$F = qvB \ .$$

Die Kräfte müssen sich gerade aufheben, es ist also

$$m_\mathrm{p} g = qvB = q\sqrt{\frac{2qU}{m_\mathrm{p}}} B \ .$$

Auflösen nach U liefert:

$$U = \frac{m_\mathrm{p}^3 g^2}{2q^3 B^2} = 6,08 \cdot 10^{-14}\,\mathrm{V} \ .$$

Daraus ergibt sich eine Geschwindigkeit von $3{,}4 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s}$ (Exakte Werte nicht gefragt, nur zum Vergleich mit geschätzter Lösung)
Abschätzung Spannung U:

$$U = \frac{m_\mathrm{p}^3 g^2}{2q^3 B^2} \approx 0,5 \left(\frac{1,6 \cdot 10^{-27}}{1,6 \cdot 10^{-19}}\right)^3 \cdot \left(\frac{9,81}{30 \cdot 10^{-6}}\right)^2 \mathrm{V} \approx 0,5 \left(\frac{10^{-27}}{10^{-19}}\right)^3 \cdot \left(\frac{100}{1000 \cdot 10^{-12}}\right) \mathrm{V}$$

$$= 0,5 \left(10^{-8}\right)^3 \cdot \left(10^{11}\right) \mathrm{V} = 5 \cdot 10^{-14}\mathrm{V}$$

Abschätzung Geschwindigkeit v:

$$v = \sqrt{\frac{2qU}{m_\mathrm{p}}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 10^{-14} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}}{1,6 \cdot 10^{-27}}} \mathrm{m/s}^2 = \sqrt{\frac{10^{-22}}{10^{-27}}} \mathrm{m/s}^2$$
$$= \sqrt{10^{-5}} \mathrm{m/s}^2 \approx 3 \cdot 10^{-3} \mathrm{m/s}^2$$

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Ein gerader Glasstab mit dem in Abbildung 1 dargestellten Querschnitt steht senkrecht zur Zeichenebene. Die einfallende Lichtstrahl 1 läuft in der Zeichenebene.
Wie ist der Winkel β jeweils als Funktion des Winkels α zu wählen, wenn Strahl 2 und 3 bzw Strahl 1 und 3 parallel verlaufen sollen ?

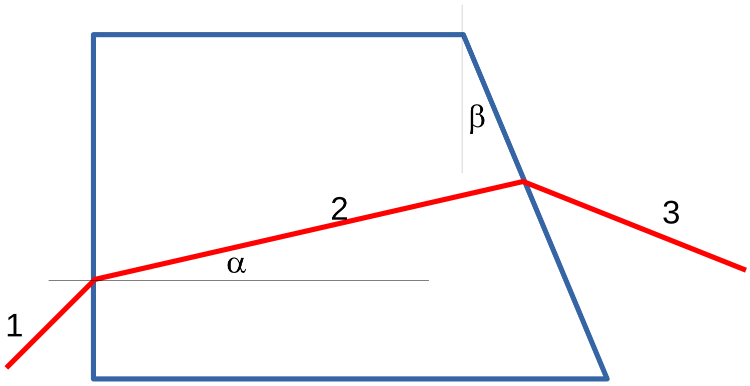

Abbildung 1: Strahlengang durch einen Glasstab.

Lösung

Strahl 2 und 3 sind gerade dann parallel, wenn Strahl 2 gerade senkrecht auf die Grenzfläche trifft. Dies ist dann der Fall, wenn $\alpha = \beta$ gilt . Damit Strahl 1 und 3 parallel sind müssen die beiden Grenzflächen parallel sein. Dies bedeutet, dass $\beta = 0$ sein muss .

Aufgabe 6 (3 Punkte)

Ein rechtwinkliges, gleichschenkliges Prisma der Brechzahl n_1 liegt wie in Abbildung 2 skizziert auf einem Medium mit Brechzahl n_2.

Welche Brechzahl muss das Prisma haben, damit das Licht an der Grenzfläche zum Medium gerade total reflektiert wird?

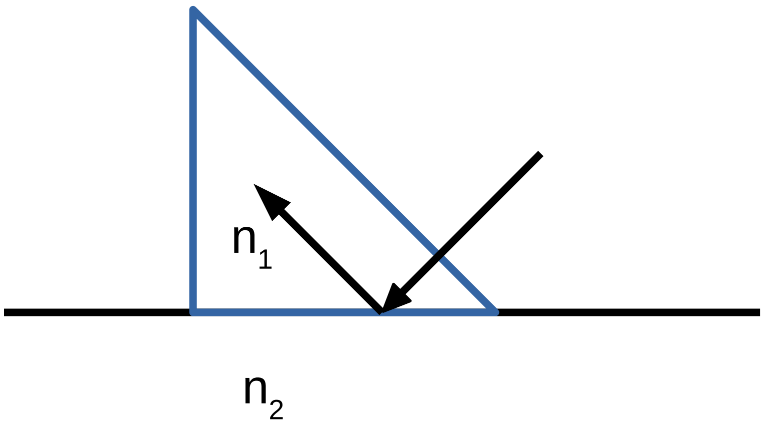

Abbildung 2: Gleichschenkliges, rechtwinkliges Prisma auf ebener Grenzfläche.

Lösung

Der Einfallswinkel ist hier 45°. Damit ist die Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle im Prisma $k_{\mathrm{in,tan}} = n_1 k_0/\sqrt{2}$. Die Wellenzahl in dem angrenzenden Medium darf höchstens genau so groß sein. Somit ergibt sich $n_2 k_0 \leq n_1 k_0/\sqrt{2}$ und damit als Maximalwert fü die Brechzahl des Mediums $n_2 = n_1/\sqrt{2}$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Ein Lichtstrahl fällt unter dem Brewster-Winkel von 60 ° auf eine ebene Grenzfläche.

Unter welchem Winkel breitet sich die Welle im angrenzenden Medium aus?

Lösung

Wenn eine Welle unter dem Brewsterwinkel einfällt, ist die Ausbreitungsrichtung des reflektierten und des transmittierten Strahls 90° zueinander. Somit muss die Ausbreitungsrichtung der transmittierten Welle $90° - \theta_{\mathrm{in}} = 30°$ sein.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Bei einem Blitzschlag bildet sich ein Kanal von bewegten Ladungsträgern. Hier wird angenommen, dass der Kanal gerade ist und einen kreisförmigen Querschnitt mit Durchmesser $2R$ besitzt. Von der Mitte nach außen sinkt die Ladungsträgerdichte parabelförmig von ϱ_0 auf Null. Die mittlere Geschwindigkeit der Ladungsträger ist v.

Welche Verteilung hat das erzeugte Magnetfeld im gesamten Raum?

Lösung

Gemäß Aufgabenstellung existiert eine gerade stabförmige Stromdichte im Raum. Die Achse wird hier zu $\vec{e}_z$ gewählt. Der parabelförmige Abfall der bewegten Ladungsdichte lässt sich durch $\varrho = \varrho_0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right)$ beschreiben. Damit kann die Stromdichte zu

$$\vec{j} = v\varrho_0 \left(1 - \left(\frac{\rho}{R}\right)^2\right) \vec{e}_z$$

beschrieben werden. Auf Grund der Zylindersymmetrie ist nur ein Magnetfeld mit $\vec{H} = H\vec{e}_\varphi$ zu erwarten. Die Stärke lässt sich einfach mit dem Durchflutungsgesetz bestimmen: Es wird eine Kreisfläche mit Zentrum auf der z- Achse, Normale in z- Richtung und Radius r gewählt.

$$\begin{aligned} \oint \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{r} &= \iint \vec{j} \circ \mathrm{d}\vec{r}^2 \\ 2\pi r H &= \iint (\vec{j} \circ \vec{e}_z)\rho \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}\rho \\ &= v\varrho_0 \begin{cases} \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} & \text{für} \quad \rho < R \\ \frac{R^2}{4} & \phantom{\text{für}} \quad \rho \geq R \end{cases} \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (3 Punkte)

Eine ideal leitfähige Kugel mit Radius R befindet sich im freien Raum. Außerhalb der Kugel sind zwei Punktladungen Q so angeordnet, dass die Verbindungslinien zum Mittelpunkt der Kugel im Winkel von 90° zueinander stehen. Der Abstand beider Ladungen zum Kugelmittelpunkt ist $2R$.

Welche elektrische Feldstärke $\vec{E}$ herrscht außerhalb der Kugel?

Lösung

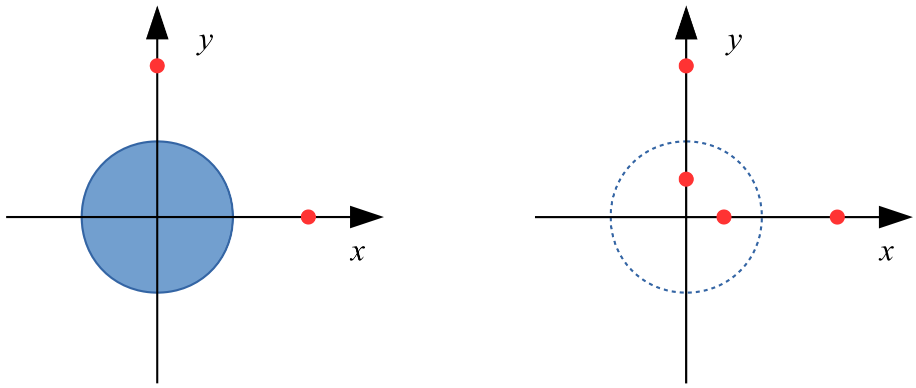

Abbildung 3: Ladungsanordnung und äquivalente Ladungsanordnung zur Berechnung der elektrischen Feldstärke.

Die Anordnung ist in Abbildung 3 links skizziert. Dabei wurde angenommen, das sich die Ladungen und der Mittelpunkt der Kugel in der x-y- Ebene befinden. Mit Hilfe der Spiegelungsmethode lässt sich der Einfluss der Kugel durch zwei neue Ladungen ersetzen. Deren Position liegt auf der Verbindungslinie zwischen Kugelmittelpunkt und Originalladung bei R^2/d, wobei R den Kugelradius und d den Abstand der Originalladung vom Kugelmittelpunkt bezeichnet. Hier ist $d = 2R$ und damit der Abstand der Spiegelladung vom Kugelmittelpunkt $R/2$. Die Stärke der Spiegelladung ist $-QR/d = -Q/2$. Damit ergibt sich mit einfacher Superposition

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{\vec{r}-2R\vec{e}_x}{|\vec{r}-2R\vec{e}_x|^3} + \frac{\vec{r}-2R\vec{e}_y}{|\vec{r}-2R\vec{e}_y|^3} - \frac{\vec{r}-R/2\vec{e}_x}{2|\vec{r}-R/2\vec{e}_x|^3} - \frac{\vec{r}-R/2\vec{e}_y}{2|\vec{r}-R/2\vec{e}_y|^3}\right) \quad .$$

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Ein unendlich langer, gerader Stromfaden mit Stromdichte I wird konzentrisch von zwei Medien mit μ_1 und μ_2 umgeben. Die Radien der beiden isolierenden Medien sind R_1 und R_2. Die Grenzfläche zwischen den beiden Medien ist stromlos. Die Oberfläche des äußeren Zylinders ist leitfähig beschichtet. Außerhalb der Struktur verschwindet das Magnetfeld.

Welche Größe hat die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ im gesamten Raum?

Lösung

Auf Grund der Zylindersymmetrie kann das Durchflutungsgesetz in integraler Form

$$\oint \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \iint \vec{j}\, \mathrm{d}^2\vec{r}$$

angewendet werden: Wenn $\vec{j} = I\delta\{x\}\delta\{y\}\vec{e}_z$ gilt, resultiert im Bereich zwischen dem Stromfaden und der äußeren Beschichtung mit $\vec{H} = H\vec{e}_\varphi$

$$2\pi r H = I \quad .$$

Auf der äußeren Beschichtung muss ein Flächenstrom fließen, der den Stromfaden kompensiert. Fließt der Strom im Faden in z-Richtung, dann fließt der Flächenstrom entgegengesetzt. Insgesamt muss der Strom $J = I$ sein. Damit resultiert die Stromdichte

$$\vec{j} = -I\delta\{\rho - R_2\}\vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 11 (7 Punkte)

Die Unterseite einer ebenen, unendlich ausgedehnten, isolierenden Platte der Dicke d_1 ist leitfähig beschichtet und trägt die Stromdichte j_0. Die relative Permeabilitätszahl der Platte ist μ_1. Auf der Oberseite der Platte liegt eine weitere unendlich große isolierende Platte der Dicke d_2 mit μ_2 mit leitfähiger Beschichtung auf der Oberseite. Außerhalb der Struktur verschwindet das Magnetfeld, die Grenzfläche zwischen den Platten ist stromlos.

Wie lautet der Verlauf der magnetischen Feldstärke $\vec{H}$ innerhalb der Struktur?

Lösung

Der Plattenstapel sei für die Berechnung so orientiert, dass die Oberflächennormalen parallel zur z-Richtung liegen. Die erste Platte liege auf der x-y-Ebene. Der eingeprägte Flächenstrom fließe in x-Richtung:

$$\vec{j}_1 = j_0\delta\{z\}\vec{e}_x \quad .$$

Es gibt zwei mögliche Lösungen mit dem selben Ergebnis:

Lösungsweg 1

Auf Grund der unendlichen Ausdehnung der Platten in x- und y-Richtung müssen sämtliche Ableitungen nach x und y verschwinden. Die Struktur ist im Inneren stromlos, also folgt aus $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} H_\mathrm{x} = 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} H_\mathrm{y} = 0$. Aus $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ resultiert $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} B_\mathrm{z} = 0$. An der unteren Grenzfläche resultiert $(\vec{n} \times \vec{H}_1) \times \vec{n} = \vec{j}_\mathrm{s} \times \vec{n} = -j_0 \vec{e}_y$. Die Normalkomponente von $\vec{B}$ verschwindet. Wegen der oben gezeigten z-Unabhängigkeit ändern sich diese Werte in der gesamten Struktur nicht. Erst an der oberen Grenzfläche muss ein weiterer Flächenstrom entgegengesetzt zum unteren angenommen werden, damit das Feld wieder auf Null abgebaut wird.

Lösungsweg 2

Die konstante Flächenstromdichte erzeugt wie in den Übungen gezeigt auf jeder Seite der Fläche das Magnetfeld

$$\vec{H} = -\frac{j_0}{2} \frac{z}{|z|} \vec{e}_y$$

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned}
\vec{H} &= \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\vec{j}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r' = \frac{j_0}{4\pi} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')\vec{e}_z - z\vec{e}_y}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}^3} \, \mathrm{d}x' \, \mathrm{d}y' \\
&= \frac{-j_0 z \vec{e}_y}{4\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - x')^2 + z^2} \left. \frac{y - y'}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}} \right|_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}x' \\
&= \frac{j_0 z \vec{e}_y}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x - x')^2 + z^2} \, \mathrm{d}x' = \frac{j_0 z \vec{e}_y}{2\pi} \frac{-1}{|z|} \arctan\left\{\frac{x - x'}{z}\right\} \Big|_{-\infty}^{\infty} = -\frac{j_0}{2} \frac{z}{|z|} \vec{e}_y
\end{aligned}$$

Wenn das Magnetfeld außerhalb der Struktur verschwinden soll, muss auf der gegenüberliegenden Fläche ein entgegengesetzt gleich großer Flächenstrom fließen. Es handelt sich also zum Pendant eines Plattenkondensators. Da die magnetische Feldstärke parallel zu den inneren Grenzflächen liegt und dort keine Ströme fließen, kann es sich nicht ändern. Es ist im Innern überall gleich groß und ergibt sich aus der Überlagerung der Felder beider Platten:

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = -\frac{j_0}{2} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z - d - d2}{|z - d_1 - d_2|} \right) \vec{e}_z \quad .$$

Außerhalb der Struktur ergibt sich eine destruktive Überlagerung, so dass das Feld verschwindet, zwischen den Platten überlagern sich die Felder konstruktiv zu $-j_0 \vec{e}_z$.

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Eine ebene, unendlich ausgedehnte Flächenantenne aus idealem Metall mit Flächennormale $\vec{e}_z$ trägt die Stromdichte $j_0 \cos\{k_0 x/2\} \exp\{-i\omega t\}\vec{e}_x = \frac{j_0}{2}\Big(\exp\{i(k_0 x/2 - \omega t)\} + \exp\{-i(k_0 x/2 + \omega t)\}\Big)\vec{e}_x$. Sie strahlt zwei ebene Wellen in den angrenzenden freien Raum ab.
Wie lautet die magnetische Feldstärke der beiden Wellen?

Lösung

Hier wird die Abstrahlung in die Raumhälfte betrachtet, in der auch die Flächenladung liegt. Die Normale soll mit der z-Richtung übereinstimmen. Die Situation ist in Abbildung 4 dargestellt Die Überlagerung der beiden magnetischen Feldstärken muss die Stetigkeitsbedingung an der Antenne erfüllen. Das bedeutet, dass das magnetische Feld für $z < 0$ verschwindet und somit der Tangentialanteil des Magnetfeldes im oberen Halbraum

$$\begin{aligned}(\vec{n} \times \vec{H}) \times \vec{n}\Big|_{z=0} &= \vec{j} \times \vec{n} = -j_0 \cos\{k_0 x/2\} \exp\{-i\omega t\}\vec{e}_y \\ &= -\frac{j_0}{2}\Big(\exp\{i(k_0 x/2 - \omega t)\} + \exp\{-i(k_0 x/2 + \omega t)\}\Big)\vec{e}_y\end{aligned}$$

sein muss.

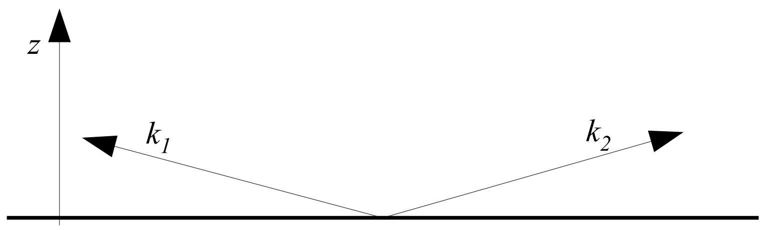

Abbildung 4: Abstrahlung von ebenen Wellen von einer Flächenantenne

Mit den üblichen Ansätzen für ebene Wellen $\vec{H} = \vec{H}_{12} \exp\{i(\vec{k}_{12} \circ \vec{r} - \omega t)\}$ resultiert aus obiger Bedingung, dass $\vec{H}_{12}$ nur eine y- und eine z-Komponente haben darf.
Aus dem Koeffizientenvergleich mit der e-Funktion ergibt sich, dass $\vec{k}_{12}$ nur x- und z-Komponenten aufweisen darf.
Aus $\vec{H} \circ \vec{k} = 0$ resultiert, dass die z-Komponente in $\vec{H}$ nicht existiert. Es handelt sich somit um zwei TM-Wellen mit $k_1 = k_0/2\vec{e}_x + k_{z1}\vec{e}_z$ und $k_2 = -k_0/2\vec{e}_x + k_{z2}\vec{e}_z$.
Aus der Dispersionsrelation lässt sich $k_{z12} = k_0\sqrt{1 - (1/)^2} = \frac{k_0}{2}\sqrt{3}$ entnehmen. Damit ergibt sich

$$\vec{H}_{12} = \frac{j_0}{4} \exp\left\{i\left(k_0/2\left(\sqrt{3}z \pm x\right) - \omega t\right)\right\} \quad .$$