Version vom 3. August 2021

# Aufgabe 1 ( 3 Punkte)

Welche elektrische Feldstärke benötigt man, um ein Elektron (Masse $m_e$, Ladung $q = -e$) im Schwerefeld der Erde schweben zu lassen? Schätzen Sie mit den unten gegebenen Größen die elektrische Feldstärke ab.
Welche Aussage lässt sich aus dem Ergebnis über den Einfluss der Erdanziehung bei typischen elektrischen Feldstärken von einigen Volt/Meter machen?

Ladung eines Elektrons: $q = -e = -1,602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}$,
Masse eines Elektrons: $m_\mathrm{e} = 9,1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$
Fallbeschleunigung auf der Erde: $g = 9,81\,\mathrm{m/s^2}$,

## Lösung

Damit das Elektron schwebt, muss die Kraft, die durch das elektrische Feld auf die Ladung ausgeübt wird, die Erdanziehung ausgleichen (Kräftegleichgewicht). Somit gilt:

$$qE + mg = 0 \ .$$

Daraus folgt:

$$E = -\frac{mg}{q} = \frac{mg}{e} \ .$$

Das Einsetzen der Zahlenwerte liefert

$$E = \frac{9,1 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 9,81\,\mathrm{m/s^2}}{1,602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}} \approx \frac{1 \cdot 10^{-29}}{1,6 \cdot 10^{-19}}\,\mathrm{V/m} = 6,25 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{V/m} \ .$$

Diese elektrische Feldstärke ist, verglichen mit typischen Feldstärken, sehr klein. Somit lässt sich die Erdanziehung in der Regel vernachlässigen.

# Aufgabe 2 ( 3 Punkte)

Leiten Sie die Wellengleichung direkt aus den Maxwell-Gleichungen im quellenfreien Vakuum her.

### Lösung

Hier ist nicht nach einer expliziten Wellengleichung gefragt, die Herleitung funktioniert aber immer ähnlich. Aus diesem Grund wird an dieser Stelle exemplarisch die Wellengleichung für das elektrische Feld hergeleitet.
Im quellenfreien Vakuum reduzieren sich die Maxwell-Gleichungen zu:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}$$

$$\nabla \circ \vec{E} = 0$$

$$\nabla \circ \vec{B} = 0 \ .$$

Wir benötigen außerdem die folgende Rechenregel aus der Mathematik:

$$\nabla \times \left( \nabla \times \vec{A} \right) = \nabla \left( \nabla \circ \vec{A} \right) - \Delta \vec{A}$$

Wir wenden nun Gleichung () auf Gleichung () an. Wir erhalten

$$\nabla \times \left( \nabla \times \vec{E} \right) = \nabla \times \left( -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \right) = \nabla \left( \nabla \circ \vec{E} \right) - \Delta \vec{E}$$

Der erste Term auf der rechten Seite ist nach Gleichung () Null, aufgrund der Stetigkeit lassen sich das Kreuzprodukt und die zeitliche Ableitung vertauschen. Daraus ergibt sich mit Hilfe von Gleichung ():

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla \times \vec{B} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left( \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) = \Delta \vec{E}$$

Mit einfachen Umformungen erhält man daraus die Wellengleichung für das elektrische Feld

$$\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E} - \Delta \vec{E} = 0 \ .$$

## Aufgabe 3 ( 3 Punkte)

Skizzieren Sie (2D) ein quell- aber nicht wirbelfreies und ein wirbel- aber nicht quellfreies Feld. Nennen Sie je ein Beispiel, wo diese im Zusammenhang mit elektromagnetischen Feldern auftreten.

### Lösung

Feldlinien von Quellenfeldern gehen von einem Punkt aus oder enden in einem Punkt. Ein mögliches Beispiel wäre hier eine Punktladung.
Feldlinien von Wirbelfeldern haben keinen Anfang und kein Ende. Bleiben sie im Endlichen, sind die Feldlinien geschlossen. Ein mögliches Beispiel wäre hier das magnetische Feld um einen Stromdurchflossenen Draht.

## Aufgabe 4 ( 5 Punkte)

Gegeben ist folgendes Potential:

$$\Phi_{\mathrm{el}}\{\vec{r}, t\} = -at(x+y)^2, \qquad \vec{A} = \vec{0}$$

Berechnen Sie das elektrische und das magnetische Feld, sowie die Ladungs- und Stromverteilung im gesamten Raum.

### Lösung

Für die magnetische Induktion gilt allgemein:

$$\vec{B}\{\vec{r}, t\} = \nabla \times \vec{A}\{\vec{r}, t\} \ .$$

Da $\vec{A} = \vec{0}$ gilt, ist somit auch $\vec{B}$ im gesamten Raum Null.
Das elektrische Feld berechnet sich nach

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = -\nabla \circ \Phi_{\mathrm{el}}\{\vec{r}, t\}$$

zu

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = at(2x + 2y)(\vec{e}_{\mathrm{x}} + \vec{e}_{\mathrm{y}}) \ .$$

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \circ \vec{E}\{\vec{r}, t\} = \frac{\varrho_{\mathrm{V}}\{\vec{r}, t\}}{\varepsilon_0}$$

erhält man für die Ladungsverteilung im gesamten Raum

$$\varrho_{\mathrm{V}}\{\vec{r}, t\} = 4\varepsilon_0 at \qquad .$$

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left( \vec{j}_{\mathrm{V}} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

erhält man mit $\vec{B} = 0$, dass

$$\vec{j}_{\mathrm{V}} = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \ .$$

gelten muss. Daraus folgt schließlich für die Stromverteilung im gesamten Raum

$$\vec{j}_{\mathrm{V}} = -a(2x + 2y)(\vec{e}_{\mathrm{x}} + \vec{e}_{\mathrm{y}}) \ .$$

## Aufgabe 5 ( 4 Punkte)

Zwei leitende, unendlich lange Hohlzylinder mit den Radien $a$ und $b = 2a$ sind konzentrisch entlang der z-Achse angeordnet. Auf dem inneren Zylinder fließt ein Strom $I_1$ in z-Richtung, auf dem Außenzylinder ein Strom $I_2 = 3I_1$ in die Gegenrichtung. Wie groß darf der Strom $I_1$ maximal sein, so dass der Betrag des Magnetfeld einen kritischen Wert $H_{\mathrm{krit}}$ im gesamten Raum nicht überschreitet?

### Lösung

Nach dem Durchflutungsgesetz gilt in Zylinderkoordinaten unter Annahme einer rotationssymetrischen Stromverteilung allgemein:

$$H_\varphi\{\rho\} = \frac{I_{\mathrm{eingeschlossen}}}{2\pi\rho} \ .$$

Daraus ist offensichtlich, dass das Magnetfeld direkt außerhalb vom Leiter maximal wird. In der Aufgabe sind zwei konzentrische Hohlzylinder vorhanden, wobei der Strom im Betrag verschieden groß ist und zusätzlich in die entgegengesetzte Richtung fließt. Aus diesem Grund überprüfen wir das Magnetfeld sowohl direkt außerhalb des inneren, als auch des äußeren Zylinders.

Direkt außerhalb des inneren Zylinders gilt für das Magnetfeld:

$$H_\varphi\{\rho\} = \frac{I_1}{2\pi a} \ .$$

Direkt außerhalb des äußeren Zylinders gilt:

$$H_\varphi\{\rho\} = \frac{I_1 - I_2}{2\pi b} = -\frac{I_1}{2\pi a} \ .$$

Betragsmäßig ist das Magnetfeld also direkt außerhalb des inneren und des äußeren Zylinders gleich groß. Für den Betrag des Stroms folgt somit:

$$|I_1| = 2\pi a H_{\mathrm{krit}} \ .$$

# Aufgabe 6 ( 4 Punkte)

Ein kapazitiver Beschleunigungssensor wird, wie in Abbildung 1 dargestellt, mit einer Metallplatte mit Masse $m$ realisiert, die mit zwei (idealen und nicht leitenden) Federn zwischen zwei fixierten Metallplatten gehalten wird. Die beiden Federn haben die Federkonstante $D$ und im entspannten Zustand die Länge $l$. Sowohl der Abstand, als auch die Dicke der Platten sei im Vergleich zur Ausdehnung in der $x$-$y$-Ebene klein und die elektrischen Anschlüsse haben keinen mechanischen Einfluss auf den Aufbau. Berechnen Sie die Änderung der Kapazität $\Delta C_{12}$, wenn auf den Sensor die Beschleunigung $a\vec{e}_z$ wirkt.

**Hinweis:** Hookesches Gesetz: $F = D \cdot \Delta l$

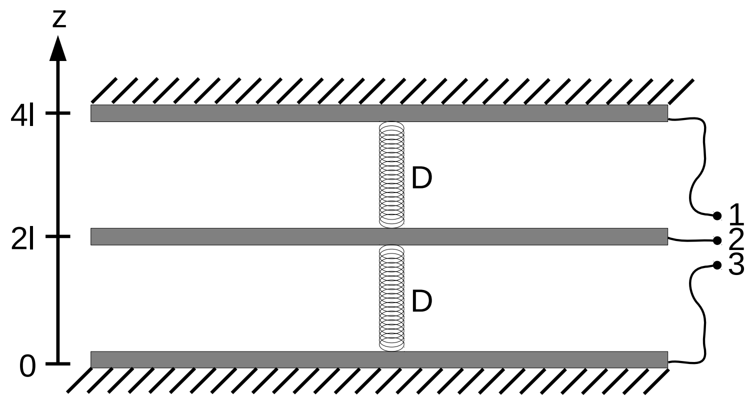


Abbildung 1: Kapazitiver Beschleunigungssensor.

## Lösung

Auf den Sensor wirkt die Beschleunigung $a\vec{e}_z$, somit wirkt auf die Metallplatte zusätzlich zu den Federn die Kraft $\vec{F} = -ma\vec{e}_z$ . Das Kräftegleichgewicht lautet nun also

$$D\Delta l = -D\Delta l + ma \ ,$$

woraus direkt

$$\Delta l = \frac{ma}{2D}$$

folgt. Die Änderung der Kapazität erhält man direkt mit Hilfe der Kapazität eines Plattenkondensators (im Vakuum):

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} \ .$$

Es gilt:

$$\Delta C_{12} = \varepsilon_0 A \left( \frac{1}{2l + \Delta l} - \frac{1}{2l} \right) = -\varepsilon_0 A \frac{\Delta l}{2l\,(2l + \Delta l))} = -\varepsilon_0 A \frac{ma}{8Dl^2 + 2lma}$$

## Aufgabe 7 ( 3 Punkte)

Gegeben ist der in Abbildung 2 dargestellte Verlauf der relativen Permittivität in einem nicht magnetischen Medium. Mit welcher Geschwindigkeit breitet sich eine ebene Welle aus, deren Frequenz 10 MHz ist?


Abbildung 2: Relative Permittivität als Funktion der Frequenz.

## Lösung

Ablesen aus dem Diagramm bei 10 MHz liefert eine relative Permittivität von $\varepsilon_\mathrm{r} = 4$ . Das Medium ist unmagnetisch, das bedeutet, dass $\mu_\mathrm{r} = 1$ gilt. Für den Brechungsindex folgt daraus $n = \sqrt{\varepsilon_\mathrm{r}\mu_\mathrm{r}} = 2$ ist. Die Welle hat somit eine Ausbreitungsgeschwindigkeit von

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{c_0}{2} \approx 1{,}5 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}\ .$$

# Aufgabe 8 ( 3 Punkte)

Eine Punktladung befindet sich im Abstand a zu einer unendlich ausgedehnten, infinitesimal dicken, geerdeten Metallplatte. Berechnen Sie das Potential im gesamten Raum und zeigen Sie, dass das Potential die Randbedingung an der Platte erfüllt.

## Lösung

Wir legen das Koordinatensystem so, dass die Metallplatte die $y$-$z$-Ebene ist und sich die Punktladung, welche die Ladung $Q$ besitzt, bei $a\vec{e}_\mathrm{x}$ befindet. Mit Hilfe der Spiegelungsmethode erhält man, um die Randbedingung zu erfüllen, eine Spiegelladung bei $-a\vec{e}_\mathrm{x}$ mit Ladung $-Q$. Das Potential einer Punktladung am Ort $\vec{r}\,'$ lautet:

$$\Phi_\mathrm{el}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \ .$$

Da für das Potential, wie in der gesamten, linearen Elektrodynamik, das Superpositionsprinzip gilt, erhalten wir für das Potential im gesamten Raum:

$$\Phi_\mathrm{el}\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-a\vec{e}_\mathrm{x}|} - \frac{1}{|\vec{r}+a\vec{e}_\mathrm{x}|}\right) \ .$$

Nun soll noch gezeigt werden, dass dieses Potential auch die Randbedingung an der Platte erfüllt. Es gilt hier

$$\Phi_\mathrm{el}\{x=0,y,z\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\sqrt{(-a)^2+y^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2+z^2}}\right) \ .$$

Offensichtlich sind die beiden Nenner identisch, somit folgt die Behauptung.

# Aufgabe 9 ( 4 Punkte)

Im freien Raum ist eine unendlich große, ebene Platte der Dicke $d$ angeordnet. Sie hat die relative Dielektrizitätszahl $\varepsilon$ und trägt auf einer Seite die homogene Flächenladungsdichte $\varrho_\mathrm{S}$. An einem Punkt auf der Gegenseite ist das Potenzial $V_0$.

Welche Größe hat das Potenzial im gesamten Raum?

### Lösung

Eine homogene ebene Flächenladungsdichte erzeugt die dielektrische Verschiebung $D = \varrho_S/2$, die senkrecht zur Ebene steht und auf beiden Seiten senkrecht davon weg weist. Zur weiteren Rechnung wird hier angenommen, dass sich die Platte in der $x$-$y$-Ebene im Bereich $0 \leq z \leq d$ befindet und die Flächenladung bei $z = 0$ ist.

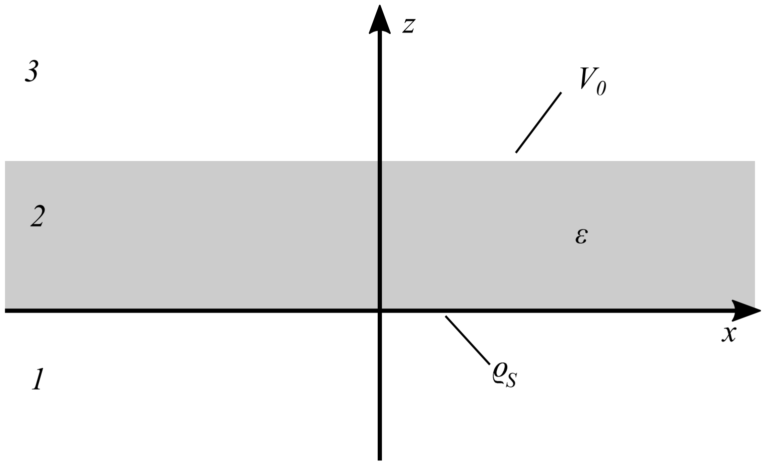


Abbildung 3: Anordnung der Platte im Raum

Damit ergibt sich $\vec{D} = \varrho_S/2\frac{z}{|z|}\vec{e}_z$ und entsprechend

$$\vec{E} = \varrho_S/2\vec{e}_z \begin{cases} -\frac{1}{\varepsilon_0}\text{für} & z < 0 \\ \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon} & 0 < z < d \\ \frac{1}{\varepsilon_0} & d < z \end{cases} .$$

Das Potenzial ergibt sich aus der Integration über $\vec{E}$ und ist an beiden Grenzflächen stetig:

$$V\{z\} = \begin{cases} V\{0\} + \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0}z\text{für} & z < 0 \\ V\{0\} - \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0\varepsilon}z & 0 < z < d \\ V\{d\} - \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0}(z-d) & d < z \end{cases} .$$

Gemäß Aufgabenstellung ist $V\{d\} = V_0$. Mit Einsetzen resultiert dann $V\{0\} = V_0 + \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0\varepsilon}d$.

## Aufgabe 10 ( 6 Punkte)

Ein unendlich langer, gerader Stab mit kreisförmigem Querschnitt vom Durchmesser $2R$ und relativer Dielektrizitätszahl $\varepsilon$ ist homogen mit $\varrho_0$ geladen und befindet sich im ansonsten freien

Raum. Auf einem Punkt der Oberfläche des Stabs herrscht das Potenzial $V_0$.

Welche Größe hat das elektrische Potenzial im gesamten Raum?

### Lösung

Auf Grund der vollständigen Zylindersymmetrie darf es nur ein elektrisches Feld in radialer Richtung geben und das Potenzial hängt in Folge dessen auch nur vom Radius ab.
Die Maxwellgleichung

$$\nabla \circ \vec{D} = \varrho\{\vec{r}\}$$

reduziert sich hier unter Anwendung von Zylinderkoordinaten auf

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\vec{D} \circ \vec{e}_\rho) = \varrho\{\vec{r}\}$$

mit der Lösung

$$\vec{D} \circ \vec{e}_\rho = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{2}\rho & \rho < R \\ & \text{für} \\ \varrho_0 \frac{R^2}{2\rho} & R < \rho \end{cases} \quad .$$

Es resultiert

$$\vec{E} \circ \vec{e}_\rho = \begin{cases} \frac{\varrho_0}{2\varepsilon\varepsilon_0}\rho & \rho < R \\ & \text{für} \\ \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0}\frac{R^2}{\rho} & R < \rho \end{cases}$$

und somit aus $V = -\int \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r}$

$$V = \begin{cases} V_0 - \frac{\varrho_0}{4\varepsilon\varepsilon_0}(\rho^2 - R^2) & \rho < R \\ & \text{für} \\ V_0 - \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0}R^2 \ln\frac{\rho}{R} & R < \rho \end{cases} \quad .$$

## Aufgabe 11 ( 12 Punkte)

Zwei unmagnetische homogene Medien grenzen bei $y = b$ aneinander. Im Bereich $y < b$ lautet die magnetische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{H} \;=\; H_0 \Big[ &\Big(\exp\{ik_0(y-b)\} + 0,5\exp\{ik_0(b-y)\}\Big)\vec{e}_y \\ &-\Big(\exp\{ik_0(y-b)\} - 0,5\exp\{ik_0(b-y)\}\Big)\vec{e}_x\Big] \exp\{i(k_0x - \omega t)\} \quad . \end{aligned}$$

Welche Brechzahl hat das Medium im Bereich $y > b$?

## Lösung

Bei dem angegebenen Feld handelt es sich um die Überlagerung zweier ebener Wellen

$$\vec{H}_1 = H_0(-\vec{e}_x + \vec{e}_y)\exp\{i(k_0(y-b) + k_0 x - \omega t)\}$$

und

$$\vec{H}_1 = 0.5 H_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\exp\{i(-k_0(y-b) + k_0 x - \omega t)\}$$

die jeweils als einfallende und reflektierte Welle interpretiert werden können. Ihr korrespondierenden Wellenzahlvektoren sind

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = k_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \quad \text{und} \quad \vec{k}_{\mathrm{ref}} = k_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \quad .$$

Das magnetische Feld liegt in der Einfallsebene, also handelt es sich hier um TE-Wellen. Die Amplituden der beiden Wellen unterscheidet sich um den Faktor $r_{\mathrm{TE}} = 0.5$. Daraus resultiert

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} &= \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}} \frac{1 - r_{\mathrm{TE}}}{1 + r_{\mathrm{TE}}} \\ &= 1/3 \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}} = k_0/3 \vec{e}_y \quad . \end{aligned}$$

Somit ergibt sich

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_0(3\vec{e}_x + \vec{e}_y)/3$$

und daraus die Brechzahl $n_{\mathrm{tr}} = \sqrt{10}/3$.

# Aufgabe 12 ( 9 Punkte)

Die Welle $\vec{H} = H_0(\vec{e}_x + i3\vec{e}_y)\exp\{i(\sqrt{3}k_0 z - \omega t)\}$ fällt von $z < 0$ auf die Grenzfläche $z = 0$ zwischen zwei homogenen Medien mit $\mu\{z < 0\} = 1,5$, $\mu\{z > 0\} = 2$, $\varepsilon\{z < 0\} = 2$, $\varepsilon\{z > 0\} = 1,5$.

Wie ist die reflektierte Welle polarisiert?

## Lösung

Die Welle $\vec{H} = H_0(\vec{e}_x + i3\vec{e}_y)\exp\{i(\sqrt{3}k_0 z - \omega t)\}$ breitet sich in $z$-Richtung aus und ist bezogen auf die Ausbreitungsrichtung rechts elliptisch polarisiert. Das folgt aus der Phasenverschiebung von $\pi/2$ zwischen den beiden Komponenten in $x$- und $y$-Richtung und deren unterschiedlicher

Amplitude. Hilfreich ist eine Skizze wie in Abbildung 4, in der der Realteil des Feldes an einem festen Ort, z.B. $kz = -2\pi$ dargestellt wird, wobei es egal ist, welches Feld man darstellt. Hier wird

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left\{\vec{H}\right\} &= H_0(\cos\{\sqrt{3}k_0 z - \omega t\}\vec{e}_x - 3\sin\{\sqrt{3}k_0 z - \omega t\}\vec{e}_y)\Big|_{\sqrt{3}k_0 z = -2\pi} \\ &= H_0(\cos\{\omega t\}\vec{e}_x + 3\sin\{\omega t\}\vec{e}_y)\end{aligned}$$

betrachtet.

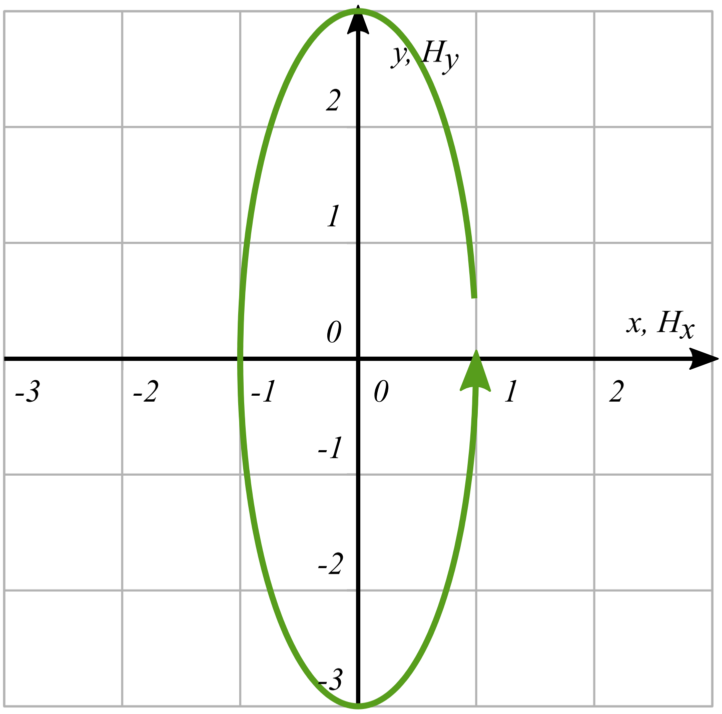


Abbildung 4: Realteil des magnetischen Feldes der einfallenden und reflektieren Welle

Wegen des senkrechten Einfalls auf die Grenzfläche kann die Welle bezüglich der Grenzfläche entweder als TE oder TM polarisiert betrachtet werden. Hier wird der Fall TM herangezogen. Der Reflexionsfaktor ist hier

$$\begin{aligned} r_{\mathrm{TM}} &= \frac{\frac{k_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{k_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\frac{k_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{k_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}} - \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}}{\sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}} + \sqrt{\frac{\mu_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}} \\ &= \frac{\sqrt{\frac{1{,}5}{2}} - \sqrt{\frac{2}{1{,}5}}}{\sqrt{\frac{1{,}5}{2}} + \sqrt{\frac{2}{1{,}5}}}\Bigg|_{\text{erweitern mit}\sqrt{3}} = \frac{1,5-2}{1,5+2} = -\frac{1}{7} \quad . \end{aligned}$$

Der Reflexionsfaktor verändert beide Komponenten der Vektoramplitude gleichermaßen. Die Ausbreitungsrichtung dreht sich um und ist nun in $-z$-Richtung. Somit ist die reflektierte Welle ebenfalls elliptisch polarisiert, allerdings links drehend bezüglich der Ausbreitungsrichtung, wie aus Abbildung 4 abgelesen werden kann.