Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sind die unten genannten Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz.

1. Die Gleichungen für das elektrische und das magnetische Feld in der Elektro- und Magnetostatik sind entkoppelt.

2. Die Gültigkeit der Gleichung $\vec{\nabla} \circ \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0$ ist äquivalent zur Ladungserhaltung.

3. Die Normalkomponente des elektrischen Feldes an einer Grenzfläche ist immer stetig.

4. Das magnetische Feld eines zeitlich veränderlichen Stroms lässt sich mit dem Gesetz von Biot-Savart berechnen.

5. Bei der Coulomb Eichung wird das magnetische Vektorpotential so gewählt, dass dessen Rotation verschwindet.

6. Das Potential einer Punktladung im Vakuum lässt sich mit der Laplace-Gleichung $\Delta V\{\vec{r}\} = 0$ bestimmen.

7. Die dielektrische Verschiebung $\vec{D}$ beinhaltet neben dem elektrischen Feld die Magnetisierung der Materie.

8. Der Winkel der reflektierten Welle zur Normalen einer Grenzfläche zwischen zwei Medien nimmt mit größer werdendem Brechungsindex des Mediums, in dem die Welle auf die Grenzfläche trifft, zu.

Lösung

1. Wahr.
   Begründung: In den statischen Maxwell-Gleichungen stehen nie $\vec{E}$, bzw. $\vec{D}$ und $\vec{B}$, bzw. $\vec{H}$ in einer Gleichung.

2. Wahr.
   Begründung: Die Gesamtladung eines Volumenbereichs nimmt nur durch den Ladungsfluss aus dem Volumen ab, bzw. in das Volumen zu.

3. Falsch.
   Begründung: Die Normalkomponente der dielektrischen Verschiebung, und somit auch die des elektrischen Feldes, springt an der Oberfläche um die Oberflächenladung. Selbst ohne eine Oberflächenladung würde die elektrische Feldstärke bei zwei Medien mit unterschiedlicher Dielektrizitätszahl um das Verhältnis dieser springen, da die normale Komponente der dielektrischen Verschiebung in diesem Fall stetig wäre.

4. Falsch.
   Begründung: Bei der Herleitung des Gesetzes von Biot-Savart uas den Maxwell-Gleichungen werden Retardierungseffekte vernachlässigt und der zeitlich konstante Fall in Form der Magnetostatik betrachtet.

5. Falsch.
   Begründung: Bei der Coulomb-Eichung wird das magnetische Vektorpotential so gewählt, dass dessen Divergenz verschwindet.

6. Falsch.
   Begründung: Die Laplace-Gleichung gilt nur im Ladungsfreien Raum.

7. Falsch.
   Begründung: Die Dielektrische Verschiebung setzt sich aus dem elektrischen Feld und der Polarisierung zusammen und ist somit unabhängig von der Magnetisierung.

8. Falsch.
   Begründung: Der Winkel der reflektierten Welle ist vollkommen unabhängig von den Brechungsindices der beiden Medien.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Leiten Sie die Dispersionsrelation für ebene Wellen direkt aus dem Ansatz einer ebenen Welle und der Wellengleichung her.

Lösung

Die Wellengleichung lautet:

$$\Delta\vec{E}\{\vec{r},t\} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}\{\vec{r},t\} = 0\ . \tag{1}$$

Mit dem Ansatz einer ebenen Welle

$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r} - \omega t)\}\ .$$

erhält man aus Gleichung (1)

$$\Delta\vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r} - \omega t)\} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r} - \omega t)\} = 0$$

Das Ausführen der Ableitungen liefert

$$-(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r} - \omega t)\} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\omega^2\vec{E}_0 \cdot \exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r} - \omega t)\} = 0\ ,$$

woraus sich nach dem Kürzen die Dispersionsrelation

$$k^2 = \vec{k}\circ\vec{k} = \qquad k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\omega^2 \qquad = \frac{\omega^2}{c^2}$$

ergibt.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Im Modell wird ein Wasserstoffatom im Grundzustand als ruhender Kern mit Ladung q im Ursprung betrachtet, wobei dieser von einer kugelförmigen Schale umgeben ist. Die Ladung in der Schale beträgt (im zeitlichen Mittel)

$$-q\left(1-\left(1+\frac{2r}{a}+\frac{2r^2}{a^2}\right)\exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\}\right),$$

wobei a der bohrsche Radius ist.
Berechnen Sie das elektrische Feld und die Ladungsdichte im gesamten Raum.
Hinweis:

$$\vec{\nabla}\circ\vec{C}=\frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sin\{\theta\}C_{\mathrm{r}})+\frac{\partial}{\partial\varphi}(rC_\varphi)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\{\theta\}C_\theta)\right]$$

Lösung

Das elektrische Feld einer kugelsymmetrischen Ladungsverteilung lässt sich dadurch bestimmen, dass man die eingeschlossene Ladung als konzentriert im Ursprung betrachtet. Es gilt demnach

$$\vec{E}\{r\}=\frac{Q_{\text{innen}}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_r$$

Die eingeschlossene Ladung, welche vom Radius r abhängt, ist direkt gegeben. Der Kern wird als konzentrierte Ladung $+q$ im Ursprung angenommen. Somit ergibt sich für das elektrische Feld

$$\vec{E}\{r\}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\left(-q\left(1-\left(1+\frac{2r}{a}+\frac{2r^2}{a^2}\right)\exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\}\right)+q\right)\vec{e}_r\ ,$$

woraus man nach einfachen Umformungen und Kürzen

$$\vec{E}\{r\}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r^2}+\frac{2}{ar}+\frac{2}{a^2}\right)\exp\left\{-\frac{2r}{a}\right\}\vec{e}_r$$

erhält. Die Ladungsdichte im gesamten Raum lässt sich nun mit der Differentialform des gaußschen Gesetzes

$$\rho\{r\}=\varepsilon_0\vec{\nabla}\circ\vec{E}\{r\}$$

berechnen. Aufgrund der Kugelsymmetrie gilt

$$\frac{\partial}{\partial\phi}=\frac{\partial}{\partial\theta}=0\ .$$

Es ergibt sich somit

$$
\begin{aligned}
\rho\{r\} &= \varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{E}\{r\} \\
&= \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin\{\theta\} \vec{E}\{r\}) \\
&= \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \sin\{\theta\} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{2}{ar} + \frac{2}{a^2} \right) \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} \right) \\
&= \frac{q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} \right) \ .
\end{aligned}
$$

Das Ausführen der Ableitung liefert

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r} \left(\left(1 + \frac{2r}{a} + \frac{2r^2}{a^2} \right) \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} \right) = &- \frac{2}{a} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} \\
&+ \frac{2}{a} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} - \frac{4r}{a^2} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} \\
&+ \frac{4r}{a^2} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} - \frac{4r^2}{a^3} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\}
\end{aligned}
$$

wobei sich daraus nach dem Kürzen

$$
\rho\{r\} = \frac{-q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{4r^2}{a^3} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\} = \frac{-q}{\pi a^3} \exp\left\{ -\frac{2r}{a} \right\}
$$

ergibt.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Welche Bedingung gilt für den Winkel zwischen der reflektierten und der transmittierten Welle, wenn eine ebene Welle im Brewsterwinkel auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex trifft. Leiten Sie aus dieser Bedingung das brewstersche Gesetz

$$\tan\{\theta_{\mathrm{i,Brewster}}\} = \frac{n_{\mathrm{tr}}}{n_{\mathrm{in}}}$$

her.

Lösung

Der Brewster-Winkel ist gerade der Einfalsswinkel, für den der Winkel zwischen der reflektierten und der transmittierten Welle $90\,^\circ$ beträgt. Somit gilt:

$$\theta_{\mathrm{ref}} = \theta_{\mathrm{in,\,Brewster}}$$

und

$$\theta_{\mathrm{tr}} = 90\,^\circ - \theta_{\mathrm{in,\,Brewster}} \quad .$$

Mit dem Snelliusschen Brechungsgesetz

$$n_{\mathrm{in}} \sin \theta_{\mathrm{in}} = n_{\mathrm{tr}} \sin \theta_{\mathrm{tr}}$$

folgt daraus

$$n_{\mathrm{in}} \sin \theta_{\mathrm{in}} = n_{\mathrm{tr}} \sin\{90\,^\circ - \theta_{\mathrm{in,\,Brewster}}\} = n_{\mathrm{tr}} \cos \theta_{\mathrm{in,\,Brewster}} \quad .$$

Das Umstellen der Gleichung führt dann auf die herzuleitenden Bedingung

$$\tan\{\theta_{\mathrm{i,\,Brewster}}\} = \frac{n_{\mathrm{tr}}}{n_{\mathrm{in}}}$$

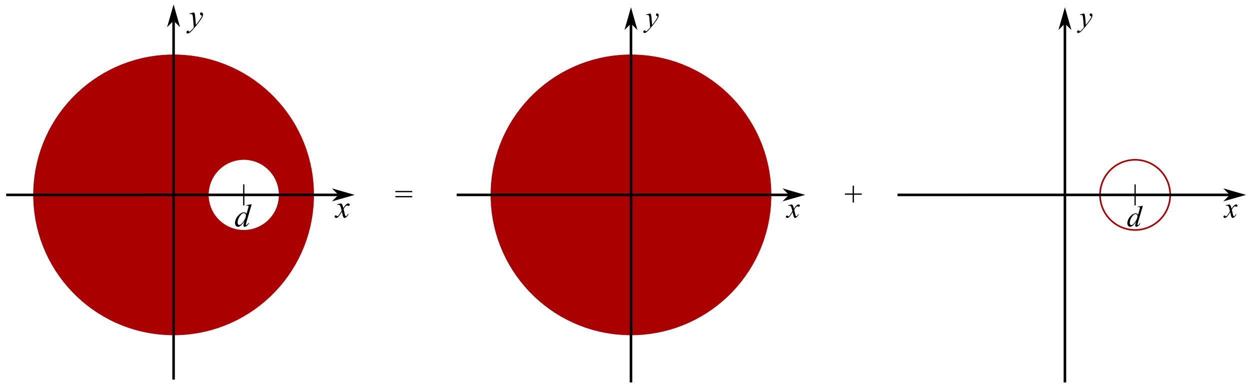

Abbildung 1: Überlagerung der Magnetfelder des Zylinders und der Bohrung in der Bohrung.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

In einem unendlich langen Zylinder vom Radius a fließt der Strom J homogen verteilt. Der Zylinder hat eine exzentrische achsparallele Bohrung vom Radius b, deren Achse um den Abstand $d < a - b$ zur Achse des Zylinders versetzt ist.
Berechnen Sie die magnetische Feldstärke $\vec{H}$ in der Bohrung.

Lösung

Die Anordnung kann als Überlagerung zweier Zylinder mit gleicher Stromdichte in entgegengesetzten Richtungen betrachtet werden.
Für die weitere Berechnung soll die Zylinderachse mit der z-Achse zusammenfallen. Die Achse der Bohrung liegt bei $x = d, y = 0$ wie in Abbildung 1 dargestellt
Die Stromdichte ist hier

$$j = \frac{J}{\pi(a^2 - b^2)} \quad .$$

Das Magnetfeld eines unendlich langen, homogen vom Strom durchflossenen Kreiszylinders lautet bei Stromrichtung in z-Richtung innerhalb des Zylinders

$$\vec{H} = j\frac{\rho}{2}\vec{e}_\phi \quad .$$

Die Verhältnisse sind in Abbildung 2 dargestellt. Die Überlagerung der beiden Felder lautet demnach

$$\vec{H} = j_1\frac{\rho_1}{2}\vec{e}_{\phi_1} + j_2\frac{\rho_2}{2}\vec{e}_{\phi_2} \quad ,$$

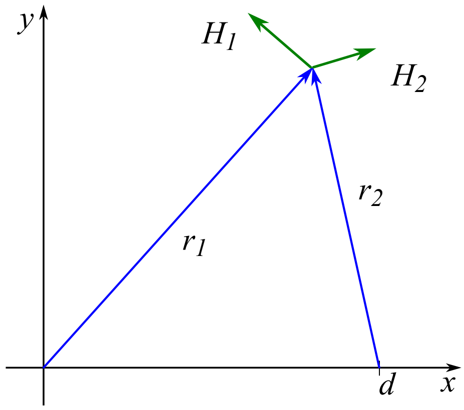

Abbildung 2: Überlagerung der Magnetfelder des Zylinders und der Bohrung in der Bohrung.

wobei

$$\begin{aligned}\rho_1 \vec{e}_{\phi_1} &= -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y \\ \rho_2 \vec{e}_{\phi_2} &= -y\vec{e}_x + (x-d)\vec{e}_y\end{aligned}$$

und $j_1 = -j_2 = j$ zu nehmen ist. Es resultiert in der Bohrung

$$\vec{H} = j\frac{d}{2}\vec{e}_y \quad .$$

Aufgabe 6 (14 Punkte)

In der Ebene $z = 0$ ist die in Abbildung 3 dargestellte Drahtschleife angeordnet. Auf der z-Achse fließt ein Linienstrom I_1 in z- Richtung, die Drahtschleife trägt den Strom I_2, der rechts um die z-Achse fließt. Die Drahtschleife ist um die y-Achse drehbar gelagert. Berechnen Sie das die Kraft und das Drehmoment $\vec{r} \times \vec{F}$ auf die Schleife unter der Voraussetzung, das der Radius des Kreisbogens R ist und die direkt anschließenden geraden Stücke R lang sind.

Hinweise:

Das Drehmoment um eine Achse a errechnet sich mit dem Einheitsvektor $\vec{e}_a$ in Richtung der Achse und $\vec{\rho_\text{a}} = (\vec{e}_a \times \vec{r}) \times \vec{e}_a$ aus

$$\mathrm{d}\vec{M} = \vec{\rho_\text{a}} \times \mathrm{d}\vec{F}\{\vec{r}\}$$

$$\begin{aligned}
\int \frac{a}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= \arctan\{\frac{t}{a}\} \\
\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}\ln\{a^2+t^2\} \\
\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= t - a\arctan\{\frac{t}{a}\}
\end{aligned}$$

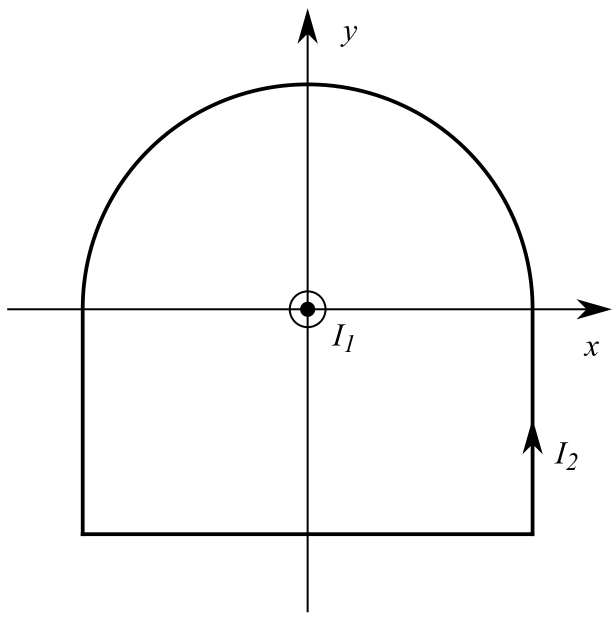

Abbildung 3: Drahtschleife in der x-y-Ebene

Lösung

Die Kraft auf ein kurzes Stück $\mathrm{d}\vec{\ell}$ eines Stromfadens lautet

$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2 \,\mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\} \times \vec{B}\{\vec{r}\} \quad .$$

Für das Drehmoment muss die Kraft vektoriell mit dem Abstand zur y-Achse $\rho_y = x\vec{e}_x + z\vec{e}_z$ multipliziert werden, wobei hier immer $z = 0$ gilt, da sich die Leiterschleife in der Ebene $z = 0$ befindet. Insgesamt resultiert somit der Beitrag des kurzen Stücks zum Drehmoment aus

$$\mathrm{d}\vec{M} = x\vec{e}_x \times (I_2 \,\mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\} \times \vec{B}\{\vec{r}\})$$

mit

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi}\frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2+y^2} \quad .$$

Zur Angabe des Leiterstücks $\mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\}$ werden vier Teilstücke herangezogen:
Im Bereich des Bogens gilt $\mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\} = R\vec{e}_\phi \,\mathrm{d}\phi$, $\phi \in (0, \pi)$
auf den drei in ϕ-Richtung anschließenden geraden Leiterstücken gilt

$$\mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\} = \begin{cases} \vec{e}_y \,\mathrm{d}y & y \in (0, -R), x = -R \\ \vec{e}_x \,\mathrm{d}x & x \in (-R, R), y = -R \\ \vec{e}_y \,\mathrm{d}y & y \in (-R, 0), x = R \quad . \end{cases}$$

Im Bereich des Bogens fließt der Strom parallel zum Magnetfeld und es gibt keine Kraftwirkung und somit keinen Beitrag zum Drehmoment.
Die Kraftwirkung auf den anderen Stücken hebt sich zwar gegenseitig auf, allerdings addieren sich die Kräfte über den Hebel auf die y-Achse zu einem Drehmoment.
Die Kräfte auf die geraden Leiterstücke sind

$$\begin{aligned}
\vec{F}_1 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{-R} \left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{x=-R} \vec{e}_z \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln\left\{y^2 + R^2\right\}\Big|_0^{-R} \vec{e}_z = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln\{2\} \\
\vec{F}_2 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-R}^{R} \left.\frac{x}{x^2+y^2}\right|_{y=-R} \vec{e}_z \,\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \ln\left\{x^2 + R^2\right\}\Big|_{-R}^{R} \vec{e}_z = 0 \\
\vec{F}_3 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-R}^{0} \left.\frac{y}{x^2+y^2}\right|_{x=R} \vec{e}_z \,\mathrm{d}y = -F_1
\end{aligned}$$

und die Beiträge zum Drehmoment

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_1 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_0^{-R} \frac{yR}{R^2+y^2} \vec{e}_y \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[\frac{R}{2} \ln\{y^2+R^2\} \right]_0^{-R} \vec{e}_y = \frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{4\pi} \ln\{2\} \vec{e}_y \\
\vec{M}_2 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-R}^{R} \frac{-x^2}{x^2+R^2} \vec{e}_y \,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left[x - R \arctan\left\{ \frac{x}{R} \right\} \vec{e}_y \right]_{-R}^{R} = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} (2R - \pi R/2) \vec{e}_y = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 R}{4\pi} (4-\pi) \vec{e}_y \\
\vec{M}_3 &= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \int_{-R}^{0} \frac{-yR}{R^2+y^2} \vec{e}_y \,\mathrm{d}y = \vec{M}_1 \quad .
\end{aligned}
$$

Das gesamte Drehmoment ist dann $\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3$.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Eine TM-polarisierte Welle fällt unter dem Winkel θ_{in} auf eine ideal leitfähige ebene Grenzfläche. Wie lautet das magnetische Feld $\vec{H}$ der reflektierten Welle?

Lösung

Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle lautet mit den angegebenen Werten

$$\vec{k_{\text{in}}} = k_{\text{n}}\vec{n} + k_{\text{t}}\vec{e}_t$$

mit $k_{\text{n}} = k_{\text{in}} \cos\{\theta_{\text{in}}\}$ und $k_{\text{t}} = k_{\text{in}} \sin\{\theta_{\text{in}}\}$. Die magnetische Feldstärke lautet

$$\vec{H_{\text{in}}} = H_{\text{in}} \exp\{i(\vec{k_{\text{in}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\ell \quad .$$

Das zugehörige elektrische Feld lautet

$$\omega\mu_{\text{in}}\mu_0\vec{E_{\text{in}}} = H_{\text{in}} \exp\{i(\vec{k_{\text{in}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}(k_{\text{n}}\vec{e}_t - k_{\text{t}}\vec{n}) \quad .$$

Für die reflektierte Welle gilt

$$\vec{k_{\text{ref}}} = -k_{\text{n}}\vec{n} + k_{\text{t}}\vec{e}_t$$

und entsprechend

$$\vec{H_{\text{ref}}} = H_{\text{ref}} \exp\{i(\vec{k_{\text{ref}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\ell$$

und

$$\omega\mu_{\text{in}}\mu_0\vec{E_{\text{ref}}} = H_{\text{ref}} \exp\{i(\vec{k_{\text{ref}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}(-k_{\text{n}}\vec{e}_t - k_{\text{t}}\vec{n}) \quad .$$

Die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes $\vec{E_{\text{in}}}+\vec{E_{\text{ref}}}$ muss an der Grenzfläche verschwinden, also

$$H_{\text{in}} - H_{\text{ref}} = 0 \quad .$$

Der Reflexionsfaktor ist also $r_{\mathsf{TM}} = 1$ und es resultiert

$$\vec{H_{\text{ref}}} = H_{\text{in}} \exp\{i(\vec{k_{\text{ref}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_\ell \quad .$$

Aufgabe 8 (7 Punkte)

Die magnetische Feldstärke außerhalb eines unendlich langen dielektrischen Zylinders (Radius a, relative Dielektrizitätsszahl ε) lautet

$$\vec{H} = H_0 \frac{a}{\rho} \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \vec{e}_\phi$$

Welche elektrische Feldstärke herrscht an der Innenseite der Zylinderoberfläche?

Hinweis

$$\vec{\nabla} \times \vec{C} = \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \phi} C_z - \frac{\partial}{\partial z} C_\phi\right] \vec{e_\rho} + \left[\frac{\partial}{\partial z} C_\rho - \frac{\partial}{\partial \rho} C_z\right] \vec{e_\phi} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho C_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} C_\rho\right] \vec{e}_z$$

Lösung

Für die Antwort muss zunächst das elektrische Feld der Welle außerhalb des Zylinders bestimmt werden. Da es sich hier nicht um eine ebene Welle handelt, wird die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

in Zylinderkoordinaten herangezogen. Es resultiert

$$-i\beta H_0 \frac{a}{\rho} \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \vec{e}_\rho = -i\omega \vec{D} \quad .$$

Es existiert nur eine Normalkomponente in $\vec{D}$, die an der Grenzfläche höchstens um eine Grenzflächenladung springen kann. Da diese nicht vorhanden ist, gilt an der Innenseite direkt

$$\vec{E} = \frac{\beta}{\omega \varepsilon \varepsilon_0} H_0 \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \vec{e}_\rho \quad .$$

Aufgabe 9 (9 Punkte)

Die ebene Welle mit elektrischem Feld

$$\vec{E_{\text{in}}} = E_0(\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_y)\exp\{i(1.5k_0x - 0.5\sqrt{3}k_0y - \omega t)\}$$

läuft in einem unmagnetischen Material und stößt auf die Grenzfläche $x = 0$ zum Vakuum. Wie lautet die elektrische Feldstärke $\vec{E_{\text{tr}}}$ der transmittierten Welle?

Lösung

Bei der einfallenden Welle handelt es sich um eine TM-Welle, da das elektrische Feld völlig in der Einfallsebene liegt.
Aus dem Wellenzahlvektor der einfallenden Welle

$$\vec{k_{\text{in}}} = (1.5\vec{e}_x - 0.5\sqrt{3}\vec{e}_y)k_0$$

resultiert für das unmagnetische Medium $\varepsilon_{\text{in}} = 3$. Die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle ist

$$\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}} = k_0\sqrt{1 - (0.5\sqrt{3})^2} = \frac{1}{2}k_0 \quad .$$

Damit ergibt sich der Relexionsfaktor

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \dfrac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}}}{\varepsilon_{\text{tr}}}}{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \dfrac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}}}{\varepsilon_{\text{tr}}}} = 0 \quad .$$

Es handelt sich also um dem Einfall unter dem Brewsterwinkel und das gesamte Feld wird transmittiert. Somit ergibt sich direkt aus

$$\vec{H_{\text{in}}} = E_0\frac{k_0}{\omega\mu_0}2\sqrt{3}\vec{e}_z\exp\{i(1.5k_0x - 0.5\sqrt{3}k_0y - \omega t)\}$$

$$\vec{E_{\text{tr}}} = E_0(\sqrt{3}\vec{e}_x + \vec{e}_y)\exp\{i(0.5k_0x - 0.5\sqrt{3}k_0y - \omega t)\} \quad .$$