Aufgabe 1 (8 Punkte)

Sind die unten genannten Aussagen wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Entscheidung kurz.

1. Für eine elliptisch polarisierte Welle existiert an einer Grenzfläche ein Einfallswinkel, so dass die reflektierte Welle linear polarisiert ist.

2. Für eine Welle existiert am Übergang von einem optisch dichteren zu einem optisch dünneren und jeweils verlustlosen Medium ein Einfallswinkel, ab dem die Welle total reflektiert wird.

3. Aus einem zeitlich veränderlichen $\vec{E}$-Feld resultiert immer ein zeitlich veränderliches $\vec{B}$-Feld.

4. Am Übergang zu einem optisch dichteren Medium ist der Brewster-Winkel immer größer als 45°.

5. Die Dispersionsrelation für das Feld $\vec{E} = E_0(x/x_0 + \omega t)^5 \vec{e}_z$ lautet $\omega x_0 = c$.

6. In einem isotropen Medium breitet sich eine Welle in unterschiedliche Raumrichtungen unterschiedlich schnell aus.

7. Die Coulomb-Eichung ermöglicht eine Entkopplung der Wellengleichungen der elektrodynamischen Potentiale ϕ_{el} und $\vec{A}$.

8. Die Maxwell-Gleichungen schließen die Existenz von magnetischen Monopolen grundsätzlich aus.

Lösung

1. Wahr.
   Begründung: Eine elliptisch polarisierte Welle lässt sich immer als Superposition einer TE- und einer TM-Welle darstellen. Beim Brewster-Winkel verschwindet der Reflexionsfaktor für den TM-Anteil ($r_{\mathrm{TM}} = 0$), die reflektierte Welle ist somit rein TE und damit linear polarisiert.

2. Wahr.
   Aus dem Snellius'schen Brechungsgesetz $\sin\{\theta_{\mathrm{tr}}\} = \frac{n_{\mathrm{in}}}{n_{\mathrm{tr}}} \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}$ folgt, dass beim Übergang zu einem optisch dünneren Medium (also $n_{\mathrm{in}} > n_{\mathrm{tr}}$) der Quotient $\frac{n_{\mathrm{in}}}{n_{\mathrm{tr}}}$ größer als 1 ist. Ist nun der einfallende Winkel θ_{in} so groß, dass $\frac{n_{\mathrm{in}}}{n_{\mathrm{tr}}} \sin\{\theta_{\mathrm{in}}\} > 1$ ist, existiert kein (reeller) Ausfallswinkel θ_{tr} mehr, für den das Snelliussche Brechungsgesetz erfüllt werden kann. Es tritt dann Totalreflexion auf.

3. Falsch.
   Aus einem mit der Zeit linear zunehmenden E-Feld resultiert ein zeitlich konstantes B-Feld, da, die Abwesenheit von Strömen vorausgesetzt, $\vec{\nabla} \times \vec{B} \propto \frac{\partial}{\partial t}\vec{E}$ ist.

4. Wahr.
   Der Brewster-Winkel ist bei nichtmagnetischen Materialien $\tan\{\theta_{\mathrm{i,\,B}}\} = \frac{n_{\mathrm{tr}}}{n_{\mathrm{in}}}$. Beim Übergang zu einem optisch dichteren Medium ist $\frac{n_{\mathrm{tr}}}{n_{\mathrm{in}}} > 1$, damit dies erfüllt ist muss $\theta_{\mathrm{i,\,B}} > 45°$ sein.

5. Wahr.
   Eine ebene Welle hat immer die Form $f\{\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\}$ und diese immer die Dispersionsrelation $c = \frac{\omega}{k}$. Bei dem gegebenen elektrischen Feld $\vec{E} = E_0(x/x_0 + \omega t)^5 \vec{e}_z$ ist offensichtlich $k = \frac{1}{x_0}$, daraus folgt direkt die Dispersionsrelation $\omega x_0 = c$.

6. Falsch.
   Der Ausdruck 'isotrop' bezeichnet die Unabhängigkeit einer beliebigen Eigenschaft von der Richtung. Somit breitet sich eine Welle in einem isotropen Material in alle Raumrichtungen gleich schnell aus.

7. Falsch.
   Die Wellengleichungen für die elektrodynamischen Potenziale entkoppeln bei der Lorentz-Eichung, nicht bei der Coulomb-Eichung.

8. Wahr.
   $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ besagt, dass die magnetische Flussdichte quellenfrei ist, somit dürfen keine

magnetischen Monopole existieren.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie die Eichinvarianz des elektrischen Feldes $\vec{E}\{\vec{r},t\}$ und der magnetischen Flussdichte $\vec{B}\{\vec{r},t\}$ unter der Eichtransformation

$$\phi'\{\vec{r},t\} = \phi\{\vec{r},t\} - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda\{\vec{r},t\}$$

$$\vec{A}'\{\vec{r},t\} = \vec{A}\{\vec{r},t\} + \nabla\Lambda\{\vec{r},t\}$$

mit einer beliebigen, analytischen Funktion $\Lambda\{\vec{r},t\}$.

Lösung

Aus Gründen der Übersichtlichkeit werden im Folgenden die Abhängigkeiten der verschiedenen Größen weg gelassen.
Zunächst der Beweis für das B-Feld:

$$\vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{A}' = \vec{\nabla} \times (\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \ ,$$

da $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla}\Lambda) = \mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,\Lambda) = 0$ ist.
Für das elektrische Feld gilt in der Elektrodynamik

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A},$$

Einsetzen liefert dann

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi'_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}' = -\vec{\nabla}\left(\phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda\right) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A} \ + \vec{\nabla}\Lambda\right) = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda \ .$$

Unter der Annahme, dass Λ so gewählt wurde, dass Λ mindestens zwei mal partiell differenzierbar ist und alle zweiten Ableitungen zumindest noch stetig sind, gilt der Satz von Schwarz und die Reihenfolge der Differentiation ist unerheblich. In diesem Fall gilt dann

$$\vec{E}' = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\Lambda = -\vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Lambda = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = \vec{E} \ .$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Gegeben ist folgendes Potential:

$$\Phi_{\text{el}}\{\vec{r},t\} = a(x^3 + y^3 + z^3), \qquad \vec{A} = bt(x^2\vec{e}_{\text{x}} + y^2\vec{e}_{\text{y}} + z^2\vec{e}_{\text{z}}), \tag{1}$$

wobei $a = -1\,\text{V/m}^3$ und $b = 3\,\text{T/ms}$ sind.
Berechnen Sie das elektrische und das magnetische Feld, sowie die Ladungs- und Stromverteilung im gesamten Raum.

Lösung

B-Feld:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0\ .$$

da bei der Rotation nie eine Komponente in ihre eigen Richtung abgeleitet wird.
E-Feld:

$$\begin{aligned}\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} &= -\vec{\nabla}a(x^3 + y^3 + z^3) - \frac{\partial}{\partial t}bt(x^2\vec{e}_{\text{x}} + y^2\vec{e}_{\text{y}} + z^2\vec{e}_{\text{z}}) \\ &= -3a(x^2\vec{e}_{\text{x}} + y^2\vec{e}_{\text{y}} + z^2\vec{e}_{\text{z}}) - b(x^2\vec{e}_{\text{x}} + y^2\vec{e}_{\text{y}} + z^2\vec{e}_{\text{z}}) = 0\ .\end{aligned}$$

Da sowohl das magnetische, als auch das elektrische Feld null sind, ist auch die Strom- und Ladungsverteilung im gesamten Raum Null .

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Ein unendlich langer, leitfähiger Vollzylinder mit Radius a liegt konzentrisch zur z-Achse. Durch ihn fließt der Gesamtstrom I in z-Richtung, wobei die Stromdichte als homogen angenommen werden darf. Ein unendlich langer, infinitesimal dünner, leitfähiger Hohlzylinder mit Radius $b > 2a$ liegt parallel zur z-Achse bei $(x, y) = (a, 0)$. Auf diesem fließt der Gesamtstrom I in die zum ersten Zylinder entgegengesetzte Richtung.
Berechnen Sie die magnetische Induktion im gesamten Raum.

Lösung

Zur Berechnung der magnetischen Flussdichte nutzen wir das Ampèresche Gesetz in Integralform

$$\oint_C \vec{B}\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \mu_0 J_{\text{C}}\ .$$

Die linke Seite des Integrals reduziert sich, sofern die Zylindersymmetrie ausgenutzt werden kann, zu $2\pi\rho B_\phi$, somit gilt

$$B_\phi = \frac{\mu_0 J_\mathrm{C}}{2\pi\rho},$$

beziehungsweise

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 J_\mathrm{C}}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi \quad .$$

Zunächst berechnen wir die magnetische Flussdichte des konzentrischen Vollzylinders. Innerhalb dieses Zylinders gilt

$$J_\mathrm{C}\{\rho\} = J\frac{\rho^2}{a^2}$$

und somit

$$\vec{B} = J\frac{\mu_0 \rho}{2\pi a^2}\vec{e}_\phi.$$

Außerhalb dieses Zylinders gilt dann (da $J_\mathrm{C} = \mathrm{J}$ ist)

$$\vec{B} = J\frac{\mu_0}{2\pi\rho}\vec{e}_\phi.$$

Für die magnetische Flussdichte des Hohlzylinders gilt innerhalb dieses

$$\vec{B} = 0,$$

außerhalb des Zylinders folgt dann

$$\vec{B} = -J\frac{\mu_0}{2\pi\rho'}\vec{e}_\phi{}',$$

wobei zu beachten ist, dass sich die gestrichenen Größen auf die Achse $\{(a, 0, z)|z \in \mathbb{R}\}$ beziehen.

Die magnetische Flussdichte außerhalb des Hohlzylinders erhält man nun aus der Superposition der beiden magnetischen Flussdichten des Voll- und des Hohlzylinders, wobei man auf die unterschiedlichen Bezugssystem achten muss.

Am einfachsten ist es, die Superposition in kartesischen Koordinaten durchzuführen. Es gilt

$$\vec{e}_\phi = -\sin\{\phi_0\}\vec{e}_x + \cos\{\phi_0\}\vec{e}_y \ ,$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} \ , \qquad \cos\{\phi_0\} = \frac{x}{\rho} \ , \qquad \sin\{\phi_0\} = \frac{y}{\rho}$$

und damit

$$\vec{e}_\phi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_y = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \ .$$

Die magnetische Flussdichte des Vollzylinders außerhalb dieses ergibt sich damit zu

$$\vec{B} = \frac{J\mu_0}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \ .$$

Die magnetische Flussdichte des Hohlzylinders außerhalb dieses ergibt sich zu

$$\vec{B} = -\frac{J\mu_0}{2\pi((x-a)^2+y^2)}(-y\vec{e}_x + (x-a)\vec{e}_y) \ .$$

Wir erhalten damit für die magnetische Flussdichte im gesamten Raum
Bereich 1: Innerhalb des Vollzylinders:

$$\vec{B} = \frac{J\mu_0}{2\pi a^2}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \ .$$

Bereich 2: Außerhalb des Vollzylinders aber innerhalb des Hohlzylinders:

$$\vec{B} = \frac{J\mu_0}{2\pi(x^2+y^2)}(-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y) \ .$$

Bereich 3: Außerhalb des Hohlzylinders:

$$\vec{B} = \frac{J\mu_0}{2\pi}\left(\frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{(x^2+y^2)} + \frac{y\vec{e}_x - (x-a)\vec{e}_y}{(x-a)^2+y^2}\right) \ .$$

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Eine dielektrische Kugel mit der ortsfesten Oberflächenladung ϱ_0 rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse, die ihren Mittelpunkt schneidet. Berechnen Sie die magnetische Flussdichte auf dieser Achse.
Hinweis: Es reicht, einen möglichst einfachen Ausdruck zu finden, dieser darf gegebenenfalls ein Oberflächen- oder Kurvenintegral beinhalten. Die Integration als letzten Schritt müssen Sie nicht ausführen!

Lösung

Die Schwierigkeit dieser Aufgabe liegt darin, dass es sich um die Auswertung eines kugelsymmetrischen Problems in einem zylindersymmetrischen Koordinatensystem Handelt. Somit gibt es zwei Wege zur Lösung: Man Parametrisiert sich die Achse zur Auswertung in Kugelkoordinaten oder die Kugel, welche das Feld erzeugt, in Zylinderkoordinaten. In dieser Lösung wird die zweite der beiden Möglichkeiten behandelt.

Die magnetische Flussdichte einer Leiterschleife mit Radius auf der den Mittelpunkt schneidenden Achse senkrecht zur Schleife ist

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{\rho_0^2}{(z^2 + \rho_0^2)^{3/2}} \vec{e}_z \ .$$

Zur Herleitung dieses Ausdrucks sei auf das in der Fachschaft erhältliche Skript verwiesen (Seite 44).

Wir nehmen im Folgenden den Mittelpunkt der Kugel bei $z = 0$ und eine Rotation um die z-Achse an. Für den Zusammenhang zwischen Strom und Ladung gilt allgemein

$$\vec{j}_\mathrm{V}\{\vec{r}\} = \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\} \cdot \vec{v}\{\vec{r}\} \ .$$

Ein Punkt auf der Kugeloberfläche mit Abstand b zur z-Achse hat eine Geschwindigkeit von $\vec{v} = \omega \cdot b\vec{e}_\phi$, wobei die Rotation in mathematisch positive Richtung gewählt wurde. Wir benötigen nun einen Ausdruck, welcher den Abstand vom Mittelpunkt der Kugel auf der z-Achse mit der Geschwindigkeit der Kugelhülle bei diesem Abschnitt verknüpft. Mit der Annahme, dass die Kugel den Radius a habe, folgt für den Abstand zur z-Achse in Abhängigkeit vom z-Achsenabschnitt aus dem Satz von Pythagoras $b = \sqrt{a^2 - z^2}$, wobei z natürlich nur zwischen $\pm a$ liegen darf. Hier folgt somit für die Stromdichte in Abhängigkeit von z

$$\vec{j}_\mathrm{V}\{z\} = \varrho_0 \cdot \omega\sqrt{a^2 - z^2}\vec{e}_\phi, \quad z \in [-a, a] \ .$$

Wir verallgemeinern nun die Flussdichte einer Leiterschleife auf der z-Achse in unserem Fall zu

$$d\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0 \,\mathrm{d}I}{2} \frac{\rho_0^2}{(z^2 + \rho_0^2)^{3/2}} \vec{e}_z \ ,$$

wobei $\mathrm{d}I$ gerade der Beitrag eines infinitesimalen Stromfadens zum gesamten B-Feld ist und unsere Kugel aus unendlich vielen dieser infinitesimalen Stromfäden besteht. Wir erhalten das gesamte B-Feld daher als Integral über die Stromfäden zwischen $-a$ und a. Es gilt somit

$$\begin{aligned}\vec{B}\{z\} &= \frac{\mu_0\varrho_0\omega}{2} \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - z'^2} \frac{a^2 - z'^2}{((z - z')^2 + a^2 - z'^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}z' \\ &= \frac{\mu_0\varrho_0\omega}{2} \int_{-a}^{a} \frac{(a^2 - z'^2)^{3/2}}{((z - z')^2 + a^2 - z'^2)^{3/2}} \,\mathrm{d}z',\end{aligned}$$

wobei sich dieses Integral nicht mehr einfach lösen lässt.

Hinweis zu den Einheiten: Die Lösung hat die Einheit 'Tesla pro Meter' und nicht 'Tesla'. Der Fehler ist uns an der Stelle unterlaufen, als wir den differentiellen Strom (welcher in unserer Verallgemeinerung die Einheit 'Ampére pro Meter' hat) durch die Stromdichte (Einheit 'Ampére pro Quadratmeter') ersetzt haben. Das Ergebnis ist also noch mit 'einem Meter' zu multiplizieren, um nicht nur den richtigen Zahlenwert, sondern auch die korrekte Einheit zu erhalten.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Die Platten eines Kondensators befinden sich auf den Potenzialen V_1 und $V_2 = V_1 + U$. Sie wurden gegeneinander um den Winkel Φ_0 verkippt, wie in Abbildung 1 skizziert ist. Welche Größe hat ie elektrische Feldstärke $E\{\vec{r}\}$ zwischen den Platten unter der Annahme, dass das elektrische Feld als $\vec{E} = E\{\vec{r}\}\vec{e}_\Phi$ dargestellt werden kann?

Welche Ladungsdichte stellt sich zwischen den Platten ein?

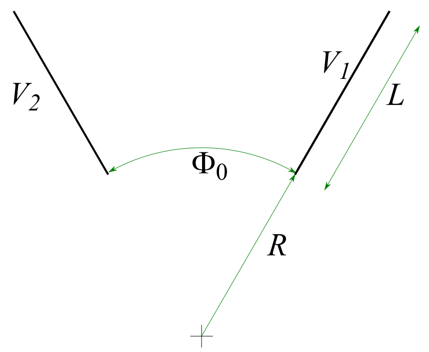

Abbildung 1: Kondensator mit verkippten Platten.

Lösung

Die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten ergibt sich aus

$$V\{\vec{r}\} = V\{\vec{r_0}\} - \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad .$$

Hier wird einfach der Weg von einer Platte zur anderen bei konstantem Abstand ρ zum Drehpunkt der Platten gewählt: $\mathrm{d}\vec{r} = \rho\vec{e}_\Phi\,\mathrm{d}\Phi$ im Bereich $\Phi \in (\Phi_1, \Phi_1 + \Phi_0)$:

$$U = V\{\Phi_1 + \Phi_0\} - V\{\Phi_1\} = -\int_{\Phi_1}^{\Phi_1+\Phi_0} E\{\vec{r}\}\rho\,\mathrm{d}\Phi \quad .$$

Da die Spannung nicht von ρ abhängen darf, muss $E\{\vec{r}\} = E_0\rho_0/\rho$ sein. Nach einsetzen ergibt sich $U = E_0\rho_0\Phi_0$ und somit $E\{\vec{r}\} = U/(\Phi_0\rho)$.
Die Ladungsdichte ergibt sich aus $\vec{\nabla} \circ \vec{E}$. Da E nicht von Φ abhängt, resultiert $\varrho_\mathrm{V} = 0$.

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Eine ebene Drahtschleife in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a trägt den Strom I. Welche Größe hat die magnetische Induktion $\vec{B}$ auf der Achse, die senkrecht durch den Schwerpunkt der Schleife verläuft, wie in Abbildung 2 skizziert ist?

Integrale:

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2}\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}$$

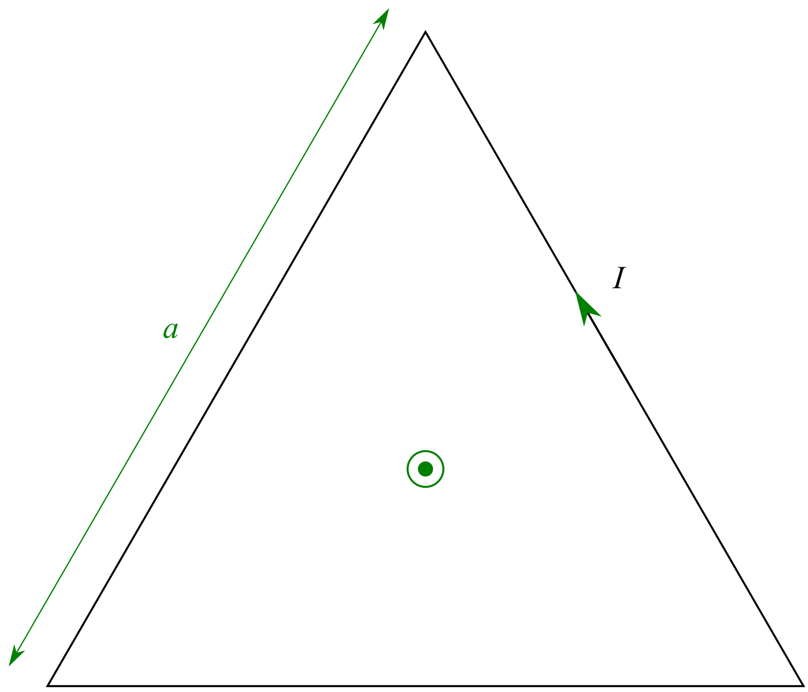

Abbildung 2: Dreieckige Drahtschleife mit Strom I. Die Achse durch den Schwerpunkt steht senkrecht zur Ebene des Dreiecks und hat den Abstand $a\sqrt{3}/6$ zur Basis.

Lösung

Für die folgende Rechnung wird der Ursprung in der Schwerpunkt des Dreiecks gelegt, die z-Achse steht senkrecht auf der Dreiecksfläche und die x-Achse liegt parallel zum unteren Schenkel. Auf Grund der Symmetrie darf das Feld auf der z-Achse nur eine z-Komponente haben. Diese ist dreimal so groß, wie die z-Komponente, die von einem Schenkel erzeugt wird. Das Feld des unteren Schenkels wird betrachtet. Im Gesetz von Biot-Savart

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{j}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r'$$

muss $\vec{j}\{\vec{r'}\} = I\theta\{x'/a\}\delta\{y' + a\sqrt{3}/6\}\delta\{z'\}\vec{e}_x, \quad \vec{r} = z\vec{e}_z, \quad \vec{r'} = x'\vec{e}_x + y'\vec{e}_y + z'\vec{e}_z$ und $\mathrm{d}^3 r' = \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z'$ eingesetzt werden. Die gesuchte z Komponente berechnet sich dann aus

$$\begin{aligned}
B_1 = \vec{e}_z \circ \vec{B}\{\vec{r}\} &= \vec{e}_z \circ \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x'=-a/2}^{a/2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{(\delta\{y' + a\sqrt{3}/6\}\delta\{z'\}\vec{e}_x) \times ((z - z')\vec{e}_z - x'\vec{e}_x - y'\vec{e}_y)}{\sqrt{(z - z')^2 + x'^2 + y'^2}^3} \\
&\quad \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{e}_z \circ \int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{-z\vec{e}_y + a\sqrt{3}/6\vec{e}_z}{\sqrt{z^2 + x'^2 + (a\sqrt{3}/6)^2}^3} \, \mathrm{d}x' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{x'=-a/2}^{a/2} \frac{a\sqrt{3}/6}{\sqrt{z^2 + x'^2 + a^2/12}^3} \, \mathrm{d}x' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\sqrt{3}/6}{z^2 + a^2/12} \left. \frac{x'}{\sqrt{z^2 + x'^2 + a^2/12}} \right|_{x'=-a/2}^{a/2} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\sqrt{3}/6}{z^2 + a^2/12} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2/4 + a^2/12}} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{a\sqrt{3}/6}{z^2 + a^2/12} \frac{a}{\sqrt{z^2 + a^2/3}}
\end{aligned}$$

Das gesuchte Feld ist $\vec{B} = 3B_1\vec{e}_\{z\}$.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Eine ebene Welle breitet sich im freien Raum sich mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k} = k_0(\cos\{\alpha\}\vec{e}_x + \sin\{\alpha\}\vec{e}_y)$ aus. Die Amplitude der magnetischen Feldstärke ist $\vec{H} = \hat{H}_0(\sin\{\alpha\}\vec{e}_x - \cos\{\alpha\}\vec{e}_y)$. Bei $x = 0$ trifft die Welle auf eine ideal leitfähige Grenzfläche. Wie lautet das magnetische Feld $\vec{H}_{\mathrm{ref}}$ der reflektierten Welle?

Lösung

Bei der angegebenen Welle handelt es sich bezüglich der Grenzfläche mit $\vec{n} = \vec{e}_x$ um eine TE-Welle. Das ist einfach dadurch nachzuprüfen, dass die elektrische Feldamplitude bestimmt wird:

$$\omega\varepsilon\varepsilon_0\hat{\vec{E}}_{\text{in}} = \hat{\vec{H}}_{\text{in}} \times \vec{k}_{\text{in}} = H_0 k_0 \vec{e}_z \quad .$$

Die Bedingung für TE-Wellen $\vec{n} \circ \vec{E} = 0$ ist erfüllt.
An der Grenzfläche muss das tangentiale elektrische Feld, hier also $\vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{ref}}$ verschwinden. Damit resultiert die Amplitude des magnetischen Feldes der reflektierten Welle mit $\vec{k}_{\text{ref}} = k_0(-\cos\{\alpha\}\vec{e}_x + \sin\{\alpha\}\vec{e}_y)$ aus

$$\begin{aligned}
\omega\mu\mu_0\hat{\vec{H}}_{\text{ref}} &= \vec{k}_{\text{ref}} \times \hat{\vec{E}}_{\text{ref}} \\
\omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\hat{\vec{H}}_{\text{ref}} &= k_0(-\cos\{\alpha\}\vec{e}_x + \sin\{\alpha\}\vec{e}_y) \times (-H_0 k_0 \vec{e}_z) = k_0^2 H_0(-\cos\{\alpha\}\vec{e}_y - \sin\{\alpha\}\vec{e}_x) \\
\hat{\vec{H}}_{\text{ref}} &= -H_0(\cos\{\alpha\}\vec{e}_y + \sin\{\alpha\}\vec{e}_x)
\end{aligned}$$

Das magnetische Feld der reflektierten Welle lautet somit

$$\vec{H}_{\text{ref}} = \hat{\vec{H}}_{\text{ref}} \exp\{i(\vec{k}_{\text{ref}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \quad .$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Die ebene Welle mit elektrischer Feldstärke $\vec{E} = E_0 \exp\{i(4\pi(y+z)/\lambda - \omega t)\}\vec{e}_x$ trifft bei $y = 0$ auf die Grenzfläche zum freien Raum. Wie lautet die elektrische Feldstärke der transmittierten Welle, wenn sich die einfallende Welle in einem Medium mit $\varepsilon = 8$ bewegt?

Lösung

Bei der angegebenen Welle handelt es sich um eine TE-Welle, da das elektrische Feld senkrecht auf der aus $\vec{k} = 4\pi/\lambda(\vec{e}_y + \vec{e}_z)$ und $\vec{n} = \vec{e}_y$ aufgespannten Einfallsebene steht. Mit $||\vec{k}|| = nk_0 = n2\pi/\lambda$ resultiert $n = 2\sqrt{2} = \sqrt{8}$. Mit dem Zusammenhang $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ resultiert $\mu = 1$, also ein unmagnetisches Medium. Zur Berechnung der elektrischen Feldstärke wird der Transmissionsfaktor für unmagnetische Medien

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{2\vec{n}\vec{k}_{\text{in}}}{\vec{n}\vec{k}_{\text{in}} + \vec{n}\vec{k}_{\text{tr}}}$$

benötigt. Hier ist $\vec{n}\vec{k}_{\mathrm{in}} = 4\pi/\lambda = 2k_0$ und $\vec{n}\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_0\sqrt{1-2^2} = i\sqrt{3}k_0$. Somit ist

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{4}{2+i\sqrt{3}} = \frac{4(2-i\sqrt{3})}{7}$$

und die transmittierte Welle hat mit $\vec{k}_{\mathrm{tr}} = k_0(2\vec{e}_z + i\sqrt{3}\vec{e}_y)$ das elektrische Feld

$$\vec{E}_{\mathrm{tr}} = t_{\mathsf{TE}} E_0 \exp\{i(k_0(2z + i\sqrt{3}y) - \omega t)\} \quad .$$

Aufgabe 10 (2 Punkte)

Der magnetische Fluss durch eine Fläche S wird durch

$$\Phi_{\mathrm{S}} = \iint_S \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}$$

definiert. Welcher Zusammenhang besteht zwischen dem magnetischen Vektorpotenzial $\vec{A}$ und dem magnetischen Fluss? Formen Sie so weit wie möglich um.

Lösung

Es gilt $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$. Eingesetzt ergibt sich

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathrm{S}} &= \iint_S (\vec{\nabla} \times \vec{A}) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\ &= \oint_{C_S} \vec{A} \circ \mathrm{d}\vec{r} \quad . \end{aligned}$$