Version vom 3. August 2021

Aufgabe 1 (12 Punkte)

In einem ideal leitfähigen Metallrohr mit rechteckigem Querschnitt lautet der Ansatz für das magnetische Vektorpotenzial

$$\begin{aligned}\vec{A} &= A_1 \exp\{i(k_x x + k_y y - \omega t)\}\vec{e}_z + A_2 \exp\{i(-k_x x + k_y y - \omega t)\}\vec{e}_z + \\ &\quad A_3 \exp\{i(k_x x - k_y y - \omega t)\}\vec{e}_z + A_4 \exp\{i(-k_x x - k_y y - \omega t)\}\vec{e}_z \quad .\end{aligned}$$

Dabei wurde das Koordinatensystem so orientiert, dass die z-Achse auf der Rohrachse und die beiden anderen Achsen parallel zu den Wänden des Rohres liegen. Die Querschnittsabmessungen sind a und b in x- und y-Richtung.

- Welche Größe müssen die Werte von k_x und k_y aufweisen, damit alle Randbedingungen auf den Wänden des Rohres erfüllt werden?
- Wie lauten die Verhältnisse A_2/A_1, A_3/A_1, A_4/A_1?

Lösung

Auf den Wänden des Rohres muss die tangentiale Feldstärke verschwinden. Die Wände sind jeweils bei $x = \pm a/2$ und $y = \pm b/2$. Die elektrische Feldstärke ergibt sich aus

$$\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}$$

mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad .$$

In dem hier vorliegenden stromfreien Innenraum des Rohres ist $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$. Es resultiert

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} = -\frac{1}{\mu_0}(k_x^2 + k_y^2)\vec{A}$$

und somit

$$\vec{E} = -i\frac{k_x^2 + k_y^2}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\vec{A} = -i\omega\vec{A} \quad .$$

Da $\vec{A}$ in z-Richtung weist, ist das elektrische Feld immer parallel zu den Wänden gerichtet.

Aus den Stetigkeitsbedingungen resultiert für
$x = \pm a/2$

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 \exp\{+ik_x a/2\} \exp\{+ik_y y\} + A_2 \exp\{-ik_x a/2\} \exp\{+ik_y y\} + \\
&\quad A_3 \exp\{+ik_x a/2\} \exp\{-ik_y y\} + A_4 \exp\{-ik_x a/2\} \exp\{-ik_y y\} \\
0 &= A_1 \exp\{-ik_x a/2\} \exp\{+ik_y y\} + A_2 \exp\{+ik_x a/2\} \exp\{+ik_y y\} + \\
&\quad A_3 \exp\{-ik_x a/2\} \exp\{-ik_y y\} + A_4 \exp\{+ik_x a/2\} \exp\{-ik_y y\}
\end{aligned}$$

und für $y = \pm b/2$

$$\begin{aligned}
0 &= A_1 \exp\{+ik_x x\} \exp\{+ik_y b/2\} + A_2 \exp\{-ik_x x\} \exp\{+ik_y b/2\} + \\
&\quad A_3 \exp\{+ik_x x\} \exp\{-ik_y b/2\} + A_4 \exp\{-ik_x x\} \exp\{-ik_y b/2\} \\
0 &= A_1 \exp\{+ik_x x\} \exp\{-ik_y b/2\} + A_2 \exp\{-ik_x x\} \exp\{-ik_y b/2\} + \\
&\quad A_3 \exp\{+ik_x x\} \exp\{+ik_y b/2\} + A_4 \exp\{-ik_x x\} \exp\{+ik_y b/2\} \quad .
\end{aligned}$$

Die Gleichungen für $x = \pm a/2$ müssen für beliebige Werte von $y \in [-b/2, b/2]$ erfüllt sein. Entsprechend gilt für die Gleichungen bei $y = \pm b/2$ dass diese unabhängig von x erfüllt sein müssen.
Die Gleichungen für $x = \pm a/2$ reduzieren sich damit auf

$$\begin{aligned}
A_1 \exp\{+ik_x a/2\} + A_2 \exp\{-ik_x a/2\} &= 0 \\
A_3 \exp\{-ik_x a/2\} + A_4 \exp\{+ik_x a/2\} &= 0 \\
A_1 \exp\{-ik_x a/2\} + A_2 \exp\{+ik_x a/2\} &= 0 \\
A_3 \exp\{+ik_x a/2\} + A_4 \exp\{-ik_x a/2\} &= 0 \quad .
\end{aligned}$$

Die erste und dritte Gleichung werden weiter betrachtet. Mit Umstellen und Ersetzen resultiert

$$\begin{aligned}
A_2 \exp\{-ik_x a/2\} &= -A_1 \exp\{+ik_x a/2\} \\
A_2 &= -A_1 \exp\{+ik_x a\} \\
A_1 \exp\{-ik_x a/2\} &= -A_2 \exp\{ik_x a/2\} = A_1 \exp\{+i3k_x a/2\} \\
\exp\{+i2k_x a\} &= 1 \quad .
\end{aligned}$$

Das lässt sich nur erfüllen, wenn $2k_x a$ ein ganzzahliges Vielfaches von 2π ist:

$$k_x = m\pi/a \quad .$$

Damit resultiert sofort $A_2 = (-1)^{m+1} A_1$ und $A_4 = (-1)^{m+1} A_3$.
Mit der selben Argumentation ergibt sich aus den Stetigkeitsbedingungen für $y = \pm b/2$
$A_3 = (-1)^{n+1} A_1$ und $A_4 = (-1)^{n+1} A_2$, sowie $k_y = n\pi/b$.
Zusammen mit den Gleichungen für die Amplituden aus der Bedingung in x-Richtung resultiert
$A_1 = (-1)^{m+1} A_2 = (-1)^{n+1} A_3 = (-1)^{m+n} A_4$.
Nicht gefragt:
Zusammengefasst lautet das magnetische Vektorpotenzial

$$\vec{A_{m,n}} = 4A \cos\{m\pi x/a\} \cos\{n\pi y/b\} \exp\{-i\omega t)\} \vec{e}_z$$

Mit beliebig wählbaren $m \neq 0$ und $n \neq 0$. Die Null muss ausgeschlossen werden, da sonst kein Feld existiert.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Welche Kraft wirkt im ansonsten freien Raum auf einen quadratischen Stromfaden mit Strom J, der parallel vor einer Fläche mit konstanter Flächenstromdichte j_S steht? Die Kantenlänge des Quadrats ist a, der Abstand zur Fläche ist b. Der Flächenstrom fließt parallel zur Diagonalen des Stromfadens.

Lösung

Hier greift das Konzept des Stromfadens. Die Kraftwirkung auf ein kurzes Stück eines Stromfadens ℓ an der Stelle $\vec{r}$, der in Richtung von $\vec{\ell}$ vom Strom I durchflossen wird, lautet

$$\mathrm{d}F\{\vec{r}\} = I \,\mathrm{d}\vec{\ell} \times B\{\vec{r\{\vec{\ell}\}}\} \quad .$$

Das Magnetfeld einer Platte mit homogenem Flächenstrom ist

$$\vec{H} = \vec{j_\mathrm{S}}/2 \times \vec{n}$$

auf der „rechten" Seite. Somit ist das Magnetfeld parallel zur Stromschleife über die zweite Diagonale gerichtet und überall gleich groß.
Zur Vereinfachung wird das Koordinatensystem so festgelegt, dass es parallel zu den Kanten des Quadrats liegt, wie in 1 skizziert ist. Das Magnetfeld hat dann die Darstellung

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 j_\mathrm{S}}{\sqrt{8}} (\vec{e}_x - \vec{e}_y) \quad .$$

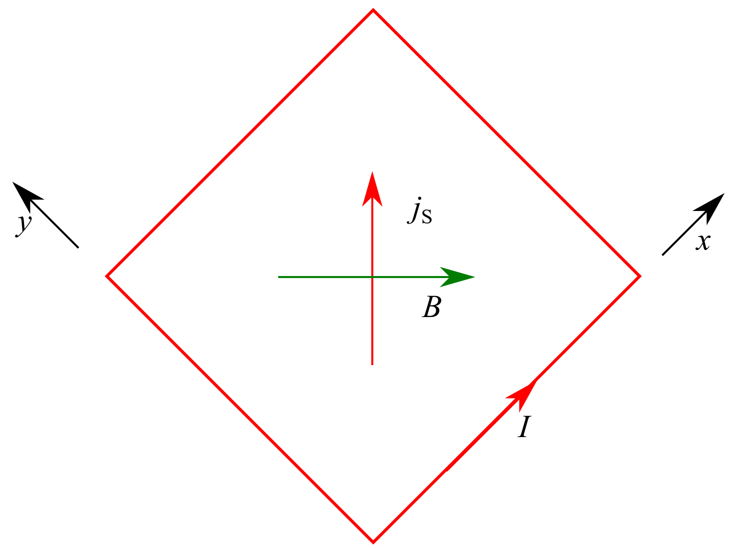

Abbildung 1: Stromfaden vor einer Platte mit homogenem Flächenstrom.

und die Stromschleife kann in vier gerade Stromfäden mit jeweils Länge a und Richtungen parallel zur x- bzw. y-Achse aufgeteilt werden.
Die Kräfte auf die jeweils gegenüberliegenden Stromfäden sind wegen entgegengesetzten Stromrichtungen entgegengesetzt gleich groß $I\frac{\mu_0 j_S}{\sqrt{8}}$ und heben sich auf. Somit ist die Gesamtkraft auf das Quadrat Null.

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Im freien Raum befindet sich eine kugelförmige Raumladungsverteilung vom Radius R, deren Dichte durch $\varrho_{\mathrm{V}} = \left(\frac{R}{r}\right)\varrho_0$ angegeben werden kann (r gemessen vom Kugelmittelpunkt).
Welche Größe hat die elektrische Feldstärke im gesamten Raum?

Lösung

Zur Lösung wird

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\varrho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0}$$

zusammen mit dem Gaußschen Integralsatz

$$\iiint\limits_V \vec{\nabla} \cdot \vec{G}\, \mathrm{d}^3 r = \oiint\limits_{S_V} \vec{G} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}$$

angewendet:

$$\oiint_{S_V} \vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3 r \quad .$$

Auf Grund der vollständigen Kugelsymmetrie darf $\vec{E} = E\{r\}\vec{e}_r$ angenommen werden.
Für die Anwendung des Gaußschen Integralsatzes wird das Volumen als Kugelvolumen um den Ursprung und Radius u gewählt.
Die Volumenintegration erstreckt sich dann über $r \in [0, u]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ mit $\mathrm{d}^3 r = r^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta$. Für das zugehörige Oberflächenintegral gilt $r = u$, $\varphi \in [0, 2\pi]$ und $\theta \in [0, \pi]$ mit $\mathrm{d}^2\vec{r} = u^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\vec{e}_r$.
Auf der linken Seite resultiert

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} E\{r\} r^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\vec{e}_r\Big|_{r=u} = 4\pi u^2 E\{u\} \quad .$$

Je nachdem, ob $u \leq R$ (innerhalb der Kugel) oder $u > R$ (außerhalb der Kugel) gewählt wird, ergeben sich unterschiedliche Ausdrücke für die rechte Seite:

$$\iiint_V \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3 r = \varrho_0 2\pi R \begin{cases} u^2 & u \leq R \\ R^2 & u > R \end{cases}$$

und mit $u = r$

$$E\{r\} = \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} \begin{cases} R & r \leq R \\ \frac{R^3}{r^2} & r > R \end{cases} \quad .$$

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Ein Zylinder mit kreisförmigen Querschnitt und Radius R ist mit seiner Achse auf der z-Achse und hat die relative Dielektrizitätszahl ε. Der Zylinder trägt die konstante Raumladung ϱ. Parallel zur Achse befindet sich eine exzentrische Bohrung mit Radius r. Der Mittelpunkt der Bohrung hat den Abstand $a < R - r$ von der z-Achse.
Wie groß ist die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ in der Bohrung? Es darf angenommen werden, dass der Zylinder und die Bohrung unendlich lang sind.

Lösung

Grundsätzlich kann von dem Gaußschen Gesetz in Integralform

$$\oiint \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint \varrho\,\mathrm{d}^3 r$$

ausgegangen werden. Das Problem ist die fehlende Symmetrie. Diese lässt sich einfach dadurch herstellen, dass die vorliegende Ladungsverteilung als Überlagerung einer zylinderförmigen Ladungsdichte ϱ ohne Bohrung und einer zweiten zylinderförmigen Ladungsdichte $-\varrho$ im Bereich der Bohrung angenommen wird.
In beiden Fällen herrscht jetzt vollständige Zylindersymmetrie. Damit kann jeweils von einem rein radialen Feld $\vec{D} = D\vec{e}_\rho$ ausgehend von der jeweiligen Zylinderachse ausgegangen werden. Im Folgenden wird für beide Zylinder mit einem temporären kartesischen Koordinatensystem x', y, z und Zylinderachse parallel zu z gerechnet. Dabei wird angenommen, dass die Achse der Bohrung in x-Richtung versetzt ist.
Zur Berechnung der Integrale muss ein Volumen bzw. dessen Oberfläche festgelegt werden. Die Auswahl fällt auf einen achsparallelen Zylinder mit Radius u und Höhe h beginnend bei einem beliebigen aber festen Wert z_0. Die zugehörige Oberfläche besteht dann aus dem Zylindermantel, Boden und Deckel. Damit besteht das Integral über die geschlossene Oberfläche aus drei Teilen. Auf Boden und Deckel ist das differentielle Flächenelement durch

$$\mathrm{d}^2\vec{r} = \pm\rho'\,\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}\rho'\vec{e}_z$$

mit $z \in \{z_0, z_0 + h\}$, $\phi' \in [0, 2\pi]$ und $\rho' \in [0, u]$ gegeben. Das Skalarprodukt ergibt Null, weil die Flächenelemente jeweils senkrecht zum Feld stehen. Es bleibt also noch die Integration über den Zylindermantel:

$$\int_{z_0}^{z_0+h}\int_0^{2\pi} \vec{D} \circ (u\,\mathrm{d}\phi'\,\mathrm{d}z\vec{e}_{\rho'}) = 2\pi uhD \quad .$$

Für das zugehörige Volumenintegral resultiert wegen der homogenen Ladungsdichte je nachdem, ob u größer oder kleiner als der jeweilige Zylinderradius R' ist

$$\iiint \varrho\,\mathrm{d}^3r = \pm\varrho\pi h \begin{cases} u^2 & u \le R' \\ R'^2 & u > R' \end{cases} \quad .$$

Für jeden der beiden Zylinder resultiert demnach

$$\vec{D} = \pm\frac{\varrho}{2}\vec{e}_{\rho'} \begin{cases} u & u \le R' \\ \frac{R'^2}{u} & u > R \end{cases} \quad .$$

Wegen der Exzentrizität müssen die Felder auf das gemeinsame Koordinatensystem transformiert werden. Für den ursprünglichen Zylinder resultiert nach Transformation ins kartesische Koordinatensystem

$$\vec{D}_1 = \frac{\varrho}{2}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \begin{cases} 1 & u_1 \le R \\ \frac{R^2}{u_1^2} & u_1 > R \end{cases}$$

mit $u_1^2 = x^2 + y^2$. Für die Bohrung resultiert mit $u_2^2 = (x-a)^2 + y^2$

$$\vec{D}_2 = \frac{-\varrho}{2}((x-a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y) \begin{cases} 1 & u_2 \leq r \\ \frac{r^2}{u_2^2} & u_2 > r \end{cases}$$

Gesucht ist das Feld innerhalb der Bohrung, also für $u_2 < r$ und $u_1 < R$ da die Bohrung innerhalb des Zylinders liegt. Die Überlagerung der beiden Felder resultiert in

$$\vec{D} = \frac{\varrho}{2}(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y)\frac{-\varrho}{2}((x-a)\vec{e}_x + y\vec{e}_y) = \frac{\varrho}{2}a\vec{e}_x \quad .$$

Damit ist die elektrische Feldstärke in der Bohrung durch

$$\vec{E} = \frac{\varrho}{2\varepsilon_0}a\vec{e}_x$$

gegeben.

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Im freien Raum befindet sich ein unendlich langer gerade Stromfaden. Senkrecht zum Stromfaden ist ein kurzer Stromfaden der Länge ℓ so angeordnet, dass er im Abstand $a > \ell$ beginnt und dort aufgehängt ist. Beide Stromfäden tragen den Strom I.
Wie groß ist das Drehmoment, das sich im kurzen Draht um seine Aufhängung ausbildet?

Lösung

Die Lorentzkraft für einen dünnen Stromfaden lautet

$$\vec{F} = (\vec{\ell}I) \times \vec{B} \quad .$$

Das Drehmoment um einen Punkt $\vec{r_0}$ resultiert aus

$$\vec{M}\{\vec{r}\} = (\vec{r} - \vec{r_0}) \times F\vec{\{r\}} \quad .$$

Entlang des kurzen Stromfadens ist die Kraft nicht konstant, sondern vom Ort abhängig, da das Magnetfeld ortsabhängig ist. Es müssen also differentielle Beiträge zur Kraft und zum Drehmoment verwendet werden. Wegen des konstanten Stroms resultieren die Ausdrücke

$$\mathrm{d}\vec{F}\{\vec{r}\} = I\,\mathrm{d}\vec{r} \times B\vec{\{r\}}$$

und

$$\mathrm{d}\vec{M}\{\vec{r}\} = (\vec{r} - \vec{r_0}) \times \mathrm{d}F\{\vec{r}\}$$

mit

$$\mathrm{d}\vec{r} = \vec{e}_\ell \, \mathrm{d}r \quad .$$

Die magnetische Feldstärke des unendlich langen geraden Stromfadens ist

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi$$

wenn man das Koordinatensystem so positioniert, das die z-Achse mit dem langen Stromfaden zusammenfällt und in Richtung des Stromes weist. Unter diesen Voraussetzungen ist dann $\vec{e}_\ell$ durch $\pm\vec{e}_\rho$ bei $\phi = \phi_0$ und $z = z_0$ gegeben, je nachdem ob der Strom in dem kurzen Faden von der z-Achse weg weist oder darauf zu läuft. Für die Kraftbeiträge zum Drehmoment muss dann $\vec{r} = r\vec{e}_\rho$ und $\vec{r_0} = a\vec{e}_\rho$ verwendet werden.
Zusammen genommen resultiert für das Drehmoment

$$\begin{aligned}
\vec{M} &= \int_a^{a+\ell} (r-a)\vec{e}_\rho \times \left(I(\vec{e}_\rho \, \mathrm{d}r) \times \frac{I}{2\pi r}\vec{e}_\phi \right) \\
&= -\vec{e}_\phi \frac{I^2}{2\pi} \int_a^\ell \frac{r-a}{r} \, \mathrm{d}r \\
&= -\vec{e}_\phi \frac{I^2}{2\pi} [r - a\ln\{r\}]_a^{a+\ell} \\
&= -\vec{e}_\phi \frac{I^2}{2\pi} \left(\ell - a\ln\left\{ \frac{a+\ell}{a} \right\} \right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Eine ebene Welle mit magnetischer Feldstärke

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(0,6k_0x + 0,8k_0y - \omega t)\}\vec{e}_z$$

fällt aus Luft auf die ideal leitfähige Grenzfläche bei $x = 10$.
Wie lautet die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle?

Lösung

Aus dem Vergleich mit dem Ansatz für die magnetische Feldstärke einer ebenen Welle

$$\vec{H} = \vec{H_0} \exp\{\pm i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

resultiert $\vec{H_0} = H_0 \vec{e}_z$ und

$$\vec{k} = k_0(0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y) \quad .$$

Die Grenzfläche hat die Flächennormale $\vec{n} = \vec{e}_x$. Die Einfallsebene ist die x-y-Ebene auf der das Magnetfeld senkrecht steht. Es handelt sich hier also um eine TM-Welle.
Die Grenzfläche ist ideal leitfähig, also muss die tangentiale elektrische Feldstärke an der Grenzfläche Null ergeben. Diese ergibt sich aus der Überlagerung der elektrischen Felder der einfallenden und der reflektieren Welle. Für die reflektierte Welle gilt

$$\vec{H_{\text{ref}}} = \vec{H_{0,\text{ref}}} \exp\{i(\vec{k_{\text{ref}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

mit

$$\vec{k_{\text{ref}}} = k_0(-0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y) \quad .$$

Entsprechend gilt für die elektrische Feldstärke jeweils

$$\begin{aligned}
\omega\varepsilon_0 \vec{E_{\text{in}}} &= H_0 k_0 (0,6\vec{e}_y - 0,8\vec{e}_x) \exp\{i(\vec{k_{\text{in}}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \\
\omega\varepsilon_0 \vec{E_{\text{ref}}} &= H_{0,\text{ref}} k_0 (-0,6\vec{e}_y - 0,8\vec{e}_x) \exp\{i(\vec{k_{\text{ref}}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \quad .
\end{aligned}$$

Die Tangentialkomponenten sind die y-Anteile. An der Grenzfläche bei $x = 10$ lautet die Bedingung also

$$H_0 k_0 0,6 \exp\{i(k_0(6 + 0,8y) - \omega t)\} - H_{0,\text{ref}} k_0 0,6 \exp\{i(-k_0(6 + 0,8y) - \omega t)\} = 0 \quad .$$

Das lässt sich für beliebe Punkte $(10, y, z)$ auf der Grenzfläche nur erfüllen, wenn

$$H_0 k_0 0,6 \exp\{i6k_0\} = H_{0,\text{ref}} k_0 0,6 \exp\{-i6k_0\}$$

bzw.

$$H_{0,\text{ref}} = H_0 \exp\{i12k_0\}$$

gilt. Somit lautet die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle

$$\omega\varepsilon_0 \vec{E_{\text{ref}}} = -H_0 \frac{k_0}{\omega\varepsilon_0} \exp\{i(k_0(12 - 0,6x + 0,8y - \omega t)\}(0,8\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y) \quad .$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Eine ebene Welle breitet sich unter 45° in der x-y-Ebene aus. Die x-Komponente der elektrischen Feldstärke ist $1\,\mathrm{V/m}$, es gibt keine z-Komponente.
Wie lautet die zugehörige magnetische Feldstärke?

Lösung

In dem Ansatz

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

ist gemäß Aufgabe $\vec{E}_0 \circ \vec{e}_x = 1\,\mathrm{V/m}$ und $\vec{E}_0 \circ \vec{e}_z = 0$. Für den Wellenzahlvektor kann $\vec{k} = \frac{k}{\sqrt{2}}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ angenommen werden. Mit der Bedingung, dass $\vec{E} \circ \vec{k} = 0$ gelten muss, resultiert $\vec{E}_0 \circ \vec{e}_y = -\vec{E}_0 \circ \vec{e}_x = -1\,\mathrm{V/m}$. Damit resultiert für die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = -\frac{\sqrt{2}\,\mathrm{V/m}}{\omega\mu\mu_0} \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_z \quad .$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Ein Lichtstrahl mit elektrischer Feldstärke

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(1,44k_0x - 0,6k_0y + \omega t)\}\vec{e}_z$$

bewegt sich im Wasser. Bei $x = 0$ ist die Grenzfläche zur angrenzenden Luft.
Wie lautet die elektrische Feldstärke der zugehörigen aus Luft einfallenden Welle?

Lösung

Aus dem Vergleich mit dem Ansatz für die elektrische Feldstärke einer ebenen Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

resultiert

$$\vec{k} = k_0(-1,44\vec{e}_x + 0,6\vec{e}_y) \quad .$$

Die Welle bewegt sich von der Grenzfläche $x = 0$ weg, somit ist sie im Bereich $x < 0$. Der Normalenvektor auf die Grenzfläche ist $\vec{n} = \vec{e}_x$. Gesucht ist die erzeugende ebene Welle im Bereich

$x > 0$. Dafür wäre der Transmissionsfaktor zu verwenden. Da das elektrische Feld senkrecht auf der Einfallsebene x-y steht, handelt es sich um eine TE-Welle und der Transmissionsfaktor lautet

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{2\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}}}{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} + \dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}}} \quad .$$

Zu berechnen sind die Normalkomponenten der beteiligten Wellenzahlvektoren $\vec{n}\circ\vec{k}_{\text{in}}$ und $\vec{n}\circ\vec{k}_{\text{tr}}$, wobei letzterer durch die Aufgabenstellung mit $-1,44k_0$ bekannt ist. Für den Normalanteil des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle resultiert mit Hilfe des Snellius-Gesetzes

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = -\sqrt{k_{\text{in}}^2 - \|(\vec{n} \times \vec{k}_{\text{tr}}) \times \vec{n}\|^2} = -k_0\sqrt{1 - 0,6^2} = -0,8k_0 \quad .$$

Das Minuszeichen resultiert aus der Voraussetzung, dass die einfallende und die transmittierte Welle bezüglich der Grenzflächennormale in die selbe Richtung laufen müssen. Damit resultiert $t_{\mathsf{TE}} = \frac{1,6}{2,24} = \frac{1}{1,4}$ und die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle lautet mit $E_{0,\text{tr}} = t_{\mathsf{TE}} E_{0,\text{in}}$

$$\vec{E}_{\text{in}} = 1,4E_0 \exp\{i(-0,8k_0 + 0,6k_0 - \omega t)\}\vec{e}_z \quad .$$