Version vom 4. August 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Eine ideal leitfähige Stange mit kreisförmigem Querschnitt liegt so auf einer leitfähigen Flüssigkeit, dass sie bis zur Achse eingesunken ist. Die Stange hat den Durchmesser D, Länge L und wird mit dem Strom J gespeist. Welche Größe hat die Stromdichte (vektoriell) an der Oberfläche der Stange in der leitfähigen Flüsigkeit unter der vereinfachenden Voraussetzung, dass der Strom nur über den Mantel des Stabes abfließt?

Lösung

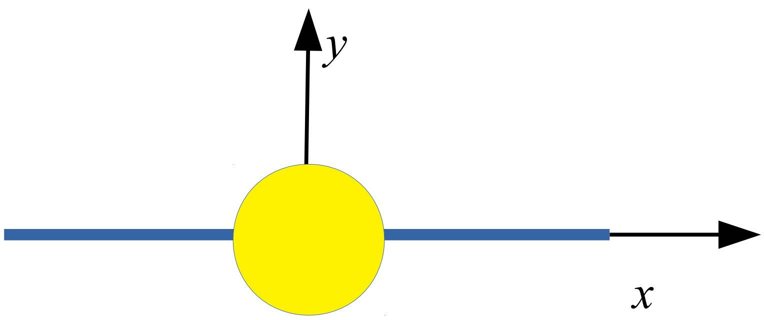

Abbildung 1: Wahl des Koordinatensystems

Für die Lösung wird das Koordinatensystem so gelegt, dass die Stabachse mit der z-Achse zusammenfällt. Dirkt an der Staboberfläche darf es in der Flüssigkeit keine tangentiale elektrische Feldstärke geben (Stetigkeit der tangentialkomponenten: $\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0$). Somit gibt es in Zylinderkordinaten nur ein radiales Feld und somit auch nur eine radiale Stromdichte $\vec{j} = j\vec{e}_\rho$. Die Stromdichte j resultiert aus dem Gesamtstrom mit

$$J = \iint\limits_{\text{Mantel in Flüssigkeit}} \vec{j}\,\mathrm{d}^2\vec{r} = \int_0^\pi \int_{z_1}^{z_1+L} j\rho\,\mathrm{d}\phi\,\mathrm{d}z = \frac{D}{2}\pi L j$$

also

$$\vec{j} = \frac{2J}{\pi D L}\vec{e}_\rho \quad .$$

Aufgabe 2 (2 Punkte)

In einem verlustlosen Medium der Brechzahl n breite sich eine ebene Welle mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k} = a\frac{\pi}{2}\vec{e}_x - b\vec{e}_y$ aus. Welche Größe hat b als Funktion von a und n?

Lösung

Der gesuchte Zusammenhang ergibt sich aus der Dipersionsrelation

$$\begin{aligned} \|\vec{k}\|^2 &= (nk_0)^2 \\ \left(a\frac{\pi}{2}\right)^2 + b^2 &= \end{aligned}$$

Somit resultiert einfach

$$b = \sqrt{(nk_0)^2 - \left(\frac{a\pi}{2}\right)^2}$$

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Im freien Raum lautet das Potenzial in Zylinderkoordinaten

$$V\{\vec{r}\} = V_0 \frac{R}{\rho} \exp\{-\frac{\rho^2}{R^2}\} \quad .$$

Welche Raumladungsdichte hat das Potenzial verursacht?

Lösung

Die erzeugende Raumladungsdichte resultiert direkt aus der Poissongleichung

$$\Delta V = -\frac{\varrho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0}$$

wobei im freien Raum $\varrho_{\mathrm{V}} = \varrho_{\mathrm{frei}} = \varrho$ gilt. Der Laplaceoperator muss hier in Zylinderkoordinaten genommen werden und wird wegen der fehlenden ϕ- und z-Abhängigkeit zu

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} V\right)\right)$$

vereinfacht. Es resultiert

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V_0 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\left(-\frac{R}{\rho^2} - \frac{2\rho}{R^2}\frac{R}{\rho}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\}\right) \\
&= V_0 \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\left(-\frac{R}{\rho} - \frac{2\rho}{R}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\}\right) \\
&= V_0 \frac{1}{\rho}\left(\frac{R}{\rho^2} - \frac{2}{R} + \frac{2\rho}{R^2}\left(\frac{R}{\rho} + \frac{2\rho}{R}\right)\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\} \\
&= V_0 \frac{1}{\rho}\left(\frac{R}{\rho^2} + \frac{4\rho^2}{R^3}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\} \\
&= V_0 \left(\frac{R}{\rho^3} + \frac{4\rho}{R^3}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\}
\end{aligned}$$

und damit

$$\varrho_{\mathrm{V}} = -\varepsilon_0 V_0 \left(\frac{R}{\rho^3} + \frac{4\rho}{R^3}\right)\exp\left\{-\frac{\rho^2}{R^2}\right\} \quad .$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

In einem geraden Stromfaden der Länge ℓ wird die Stromdichte

$$I\cos\{\pi\frac{p}{\ell}\}$$

erzeugt. Hier ist p die Strecke vom Anfang zu einem Punkt auf dem Faden. Der Faden befindet sich in einem konstanten Magnetfeld B, das senkrecht zur Fadenachse steht. Welche Kraft wirkt auf den Faden?

Lösung

Das Koordinatensystem wird so gelegt, dass sich der Faden auf der x-Achse im Bereich $[0,\ell]$ befindet und das Magnetfeld in y-Richtung zeigt. Dann gilt also $\vec{B} = B\vec{e}_y$ und

$$\vec{j} = I\cos\left\{\pi\frac{x}{\ell}\right\}\delta\{y\}\delta\{z\}\mathrm{rect}\left\{\frac{x-\ell/2}{\ell}\right\}\vec{e}_x \quad .$$

Für die Anwendung des Konzepts des Stromfadens zur Berechnung der Lorentzkraft $\mathrm{d}F = \mathrm{d}\vec{\ell}I\times\vec{B}$ müssen die beiden Diracs und die Richtung weg gelassen werden. Die Richtung kommt in das differentielle Element, hier $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$. Der Strom I wird ersetzt durch den hier vorliegenden Fall $I\cos\left\{\pi\frac{x}{\ell}\right\}\mathrm{rect}\left\{\frac{x-\ell/2}{\ell}\right\}$. Es resultiert einfach

$$\vec{F} = \int_0^\ell I\cos\left\{\pi\frac{x}{\ell}\right\}B\vec{e}_z\,\mathrm{d}x = IB\left[\frac{\ell}{\pi}\sin\left\{\pi\frac{x}{\ell}\right\}\right]_0^\ell\vec{e}_z = 0 \quad .$$

Alternative Lösung

$$\vec{F} = \iiint\vec{j}\times\vec{B}\,\mathrm{d}^3r = \iint\limits_{-\infty}^{\infty}\int_0^\ell BI\cos\left\{\pi\frac{x}{\ell}\right\}\delta\{y\}\delta\{z\}\vec{e}_z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 0$$

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Eine Welle fällt unter dem Winkel θ auf die Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika. Beide Medien haben $\varepsilon = 1$ aber unterschiedliche μ. Wie muss die Polarisation und der Winkel gewählt werden, damit nichts reflektiert wird?

Lösung

Die Forderung nach verschwindender Reflexion bedeutet, dass der Reflexionsfaktor zu Null wird. Bei schrägem Einfall muss nach TE- und TM-Polarisation bezüglich der Grenzfläche unterschieden werden. In dem hier vorliegenden Fall kann nur der der Reflexionsfaktor für die TE-Polarisation verschwinden. Dafür muss die Bedingung

$$\frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}}}{\mu_{\text{in}}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}}}{\mu_{\text{tr}}}$$

erfüllt werden. Hier gilt $\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}} = \sqrt{\mu_{\text{in}}} k_0 \cos\{\theta_{\text{in}}\}$. Für die Normalkomponente der Wellenzahl der transmittierten Welle ergibt sich $\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}} = k_0 \sqrt{\mu_{\text{tr}} - \mu_{\text{in}} \sin^2\{\theta_{\text{in}}\}}$. Einsetzen und beide Seiten quadrieren:

$$\begin{aligned}
\frac{\cos^2\{\theta_{\text{in}}\}}{\mu_{\text{in}}} &= \frac{\mu_{\text{tr}} - \mu_{\text{in}} \sin^2\{\theta_{\text{in}}\}}{\mu_{\text{tr}}^2} \\
\cos^2\{\theta_{\text{in}}\} &= \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}} - \frac{\mu_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{tr}}^2} \sin^2\{\theta_{\text{in}}\} = \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}} - \frac{\mu_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{tr}}^2} + \frac{\mu_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{tr}}^2} \cos^2\{\theta_{\text{in}}\} \\
\frac{\mu_{\text{tr}}^2 - \mu_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{tr}}^2} \cos^2\{\theta_{\text{in}}\} = \left(1 - \frac{\mu_{\text{in}}^2}{\mu_{\text{tr}}^2}\right) \cos^2\{\theta_{\text{in}}\} &= \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}} \left(1 - \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}}\right) = \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}} \frac{\mu_{\text{tr}} - \mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}} \\
\cos^2\{\theta_{\text{in}}\} &= \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}} + \mu_{\text{in}}} \\
\sin^2\{\theta_{\text{in}}\} = 1 - \cos^2\{\theta_{\text{in}}\} &= 1 - \frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}} + \mu_{\text{in}}} = \frac{\mu_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}} + \mu_{\text{in}}} \\
\tan^2\{\theta_{\text{in}}\} &= \frac{\mu_{\text{tr}}}{\mu_{\text{in}}} \quad .
\end{aligned}$$

Es muss also eine bezüglich der Grenzfläche TE polarisierte Welle mit Einfallswinkel $\theta_{\text{in}} = \arctan\{\sqrt{\frac{\mu_{\text{tr}}}{\mu_{\text{in}}}}\}$ gewählt werden.

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Wie groß ist die magnetische Induktion eines geraden Stromfadens der Länge ℓ mit Strom I oberhalb eines Endes im Abstand h senkrecht zum Faden?

Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe wird das Biot-Savart-Gesetz heran gezogen. Das Koordinatensystem wird so festgelegt, dss der Faden auf der x-Achse im Bereich $x \in [0, \ell]$ liegt und die Stromrichtung in x-Richtung ist. Das Magnetfeld wird am Punkt $z = h$ bestimmt. Somit gilt

$$\vec{j}\{\vec{r}\} = I\delta\{y\}\delta\{z\}\mathrm{rect}\left\{\frac{x - \ell/2}{\ell}\right\}\vec{e}_x$$

und

$$\vec{r} - \vec{r'} = -x'\vec{e}_x - y'\vec{e}_y + (h - z')\vec{e}_z \quad .$$

Es resultiert

$$\begin{aligned}
\vec{B}\{0,0,h\} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{j\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\,\mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\{y'\}\delta\{z'\}\mathrm{rect}\left\{\frac{x' - \ell/2}{\ell}\right\}\frac{\vec{e}_x \times (-x'\vec{e}_x - y'\vec{e}_y + (h - z')\vec{e}_z)}{(x'^2 + y'^2 + (h - z')^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int\limits_0^\ell \frac{-h\vec{e}_y}{(x'^2 + h^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}x' \\
&\quad \text{Siehe Hinweise, Gleichung 5} \\
&= -\frac{\mu_0 I h}{4\pi}\left[\frac{1}{h^2}\frac{x'}{(x'^2 + h^2)^{1/2}}\right]_0^\ell \vec{e}_y = -\frac{\mu_0 I}{4\pi h}\frac{\ell}{\sqrt{\ell^2 + h^2}}\vec{e}_y \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (16 Punkte)

Die geladene Grenzfläche zwischen zwei Medien liegt bei $x = 0$. Der Bereich $x > 0$ ist feldfrei. Im Bereich $x < 0$ befindet sich Vakuum und die Grenzfläche ist mit $\varrho_\mathrm{S} = \varrho_0 \exp\{-i(0,5k_0 z + \omega t)\}$ geladen. Wie lauten die elektrischen Feldstärken der beiden ebenen Wellen, die die Ladung erzeugt haben?

Lösung

Von der Grenzfläche werden Wellen in den freien Raum abgestrahlt. Der angrenzende Raum ist feldfrei. Daraus resultiert, dass sich die tangentialen elektrischen Felder der abgestrahlten Wellen auf der Grenzfläche kompensieren müssen. Die Normalkomponenten müssen in der Summe vom Betrag her gerade die Oberflächenladung ergeben. Aus der Tatsache, dass es Normalkomponenten des elektrischen Feldes gibt resultiert, dass hier TM-Wellen betrachtet werden müssen. Die Wellen müssen sich in der selben Ebene bewegen und den selben Winkel zur Flächennormalen aufweisen, sonst kompensieren sich die elektrischen Felder nicht. Die Grenzfläche ist bei $x = 0$, somit kann die Flächennormale mit $\vec{n} = \vec{e}_x$ angesetzt werden.
Es werden zwei Wellen mit Wellenzahlvektoren

$$\begin{aligned}\vec{k_1} &= k_{x1}\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z \\ \vec{k_2} &= k_{x2}\vec{e}_x + k_y\vec{e}_y + k_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

und zugehörige magnetische Feldstärken

$$\begin{aligned}\vec{H_{01}} &= H_1\frac{k_z\vec{e}_y - k_y\vec{e}_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} \\ \vec{H_{02}} &= H_2\frac{k_z\vec{e}_y - k_y\vec{e}_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}}\end{aligned}$$

gewählt. Die entsprechenden elektrischen Feldstärken lauten dann

$$\begin{aligned}\omega\varepsilon_0\vec{E_{01}} &= H_1\frac{-k_{x1}k_z\vec{e}_z + k_z^2\vec{e}_x - k_{x1}k_y\vec{e}_y + k_y^2\vec{e}_x}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} = H_1\frac{(k_y^2 + k_z^2)\vec{e}_x - k_{x1}k_y\vec{e}_y - k_{x1}k_z\vec{e}_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} \\ \omega\varepsilon_0\vec{E_{02}} &= H_2\frac{(k_y^2 + k_z^2)\vec{e}_x - k_{x2}k_y\vec{e}_y - k_{x2}k_z\vec{e}_z}{\sqrt{k_y^2 + k_z^2}} \quad .\end{aligned}$$

In der Ebene $x = 0$ gilt

$$\varepsilon_0 \vec{e}_x \circ (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) = \varrho_\mathrm{S} \quad .$$

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\varrho_0 \omega \exp\{-i(0,5k_0 z + \omega t)\} &= \sqrt{k_y^2 + k_z^2} H_1 \exp\{i(k_y y + k_z z - \omega t)\} \\
&\quad + \sqrt{k_y^2 + k_z^2} H_2 \exp\{i(k_y y + k_z z - \omega t)\} \\
&= \sqrt{k_y^2 + k_z^2} (H_1 + H_2) \exp\{i(k_y y + k_z z - \omega t)\} \quad .
\end{aligned}$$

Auf der linken Seite steht nur eine Funktion von z. Das bedeutet, dass auf der rechten Seite $k_y = 0$ gelten muss. Aus dem Vergleich ergibt sich $k_z = -0,5k_0$.
Die Tangentialkomponente von E muss an der Grenzfläche verschwinden. Daraus resultiert die Bedingung

$$H_1 k_{x1} + H_2 k_{x2} = 0 \quad .$$

Wegen der Dispersionsrelation sind die Beträge von k_{x1} und k_{x2} gleich groß. Es resultiert also $H_2 = \pm H_1$ und da die Flächenladungsdichte nicht Null ist muss $H_2 = H_1$ und somit $k_{x2} = -k_{x1} = k_x$ gelten und damit

$$H_1 = \frac{\varrho_0 \omega}{2k_z} = -\frac{\varrho_0 \omega}{k_0} \quad .$$

Aus der Dispersionsrelation ergibt sich für die x-Komponente der Wellenzahlvektoren

$$k_x = \frac{1}{2}\sqrt{3} k_0 \quad .$$

Zusammen genommen ergibt sich also

$$\begin{aligned}
\vec{E}_1 &= -H_1 \frac{k_0}{2\omega\varepsilon_0} (\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_z) \exp\{i(k_z z - k_x x - \omega t)\} \\
&= \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} (\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_z) \exp\{i(k_z z - k_x x - \omega t)\} \\
\vec{E}_2 &= \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0} (\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z) \exp\{i(k_z z + k_x x - \omega t)\} \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (19 Punkte)

Eine Welle mit magnetischer Feldstärke

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(kx - \omega t)\}\vec{e}_y$$

fällt aus Luft auf die Grenzfläche $3x + 4y = 7$ zu einem unmagnetischen Medium mit $\varepsilon = 2$. Wie lautet die magnetische Feldstärke der reflektierten Welle?

Lösung

Aus dem Vergleich der Angabe der Ebene mit der Hesseschen Normalenform

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r_0}) = 0$$

resultiert der skalierte Normalenvektor zu

$$a\vec{n} = 3\vec{e}_x + 4\vec{e}_y$$

und somit

$$\vec{n} = 0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y \quad .$$

Ein Punkt auf der Grenzfläche ergibt sich zum Beispiel für $x = 1$ zu $y = 1$, also $\vec{r_0} = (1, 1, 0)^T$. Damit ist die Darstellung in umgestellter Hessescher Normalenform

$$\vec{n} \circ \vec{r} = \vec{n} \circ \vec{r_0} = 1,4 \quad . \tag{1}$$

Bemerkung: Zu beachten ist, dass hier keine Einheiten verwendet wurden. Spätestens beim Produkt aus k und r macht sich das bemerkbar. Ideal wäre in diesem Zusammenhang eine Darstellung als Vielfaches der Wellenlänge, z.B. $\vec{n} \circ \vec{r} = 1,4\lambda$. Dann kürzen sich in $\vec{k} \circ \vec{r}$ die Einheiten. Es wird aber weiter ohne Einheiten gerechnet.
Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle hat nur eine x-Komponente. Somit ist die x-y-Ebene die Einfallsebene und das Magnetfeld liegt parallel dazu. Es handelt sich also um eine TE-Welle. Für die beteiligten Wellenzahlvektoren gilt:

$$\begin{aligned}
\vec{k_{\text{in,n}}} = (\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}})\vec{n} &= 0,6k_0(0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y) = (0,36\vec{e}_x + 0,48\vec{e}_y)k_0 \\
\vec{k_{\text{in,t}}} = (\vec{n} \times \vec{k_{\text{in}}}) \times \vec{n} &= k_0(0,64\vec{e}_x - 0,48\vec{e}_y)k_0 = 0,8k_0(0,8\vec{e}_x - 0,6\vec{e}_y)k_0 \\
\|\vec{n} \times \vec{k_{\text{in}}}\| &= 0,8k_0 \\
\vec{k_{\text{ref,n}}} = (\vec{n} \circ \vec{k_{\text{ref}}})\vec{n} &= -0,6k_0(0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y) \\
\vec{k_{\text{ref}}} &= k_0(0,28\vec{e}_x - 0,96\vec{e}_y) = 0,04k_0(7\vec{e}_x - 24\vec{e}_y) \\
\vec{k_{\text{tr,n}}} = (\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}})\vec{n} &= \sqrt{2 - 0,64}k_0(0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y) = \sqrt{1,36}k_0(0,6\vec{e}_x + 0,8\vec{e}_y)
\end{aligned}$$

Damit resultiert der Reflexionsfaktor zu

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{0,6 - \sqrt{1,36}}{0,6 + \sqrt{1,36}} \quad .$$

Die Amplitude der elektrischen Feldstärke der einfallenden Welle resultiert aus der Amplitude der magnetischen Feldstärke $\vec{H_{0\mathrm{in}}} = H_0 \vec{e}_y$ zu

$$\vec{E_{0\mathrm{in}}} = -\frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega} H_0 \vec{e}_z \quad .$$

und die Darstellung der einfallenden und reflektierten Welle lautet damit

$$\begin{aligned} \vec{E_{\mathrm{in}}} &= -\frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega} H_0 \vec{e}_z \exp\{i(\vec{k_{\mathrm{in}}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \\ \vec{E_{\mathrm{ref}}} &= \vec{E_{0\mathrm{ref}}} \exp\{i(\vec{k_{\mathrm{ref}}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \quad . \end{aligned}$$

Die Grenzfläche wird durch $\vec{n} \circ \vec{r} = \vec{n} \circ \vec{r_0} = 1,4$ (Gleichung 1) gekennzeichnet.
Somit gilt $\vec{k} \circ \vec{r} = (\vec{n} \circ \vec{k})(\vec{n} \circ \vec{r}) + \vec{k_{\mathrm{in,t}}} \circ \vec{r} = (\vec{n} \circ \vec{k}) 1,4 + \vec{k_{\mathrm{in,t}}} \circ \vec{r}$.
Auf der Grenzfläche lautet das elektrische Feld entsprechend mit $\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} = 0,6 k_0$

$$\vec{E_{\mathrm{in}}}\{\mathrm{Grenze}\} = -\frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega} H_0 \vec{e}_z \exp\{i(0,84 k_0 + \vec{k_{\mathrm{in,t}}} \circ \vec{r} - \omega t)\} \quad .$$

Für die reflektierte elektrische Feldstärke berechnet sich die Amplitude aus dem Vergleich der Felder an der Grenzfläche $\vec{E_{\mathrm{ref}}}\{\mathrm{Grenze}\} = r_{\mathrm{TE}} \vec{E_{\mathrm{in}}}\{\mathrm{Grenze}\}$

$$\vec{E_{\mathrm{ref}}}\{\mathrm{Grenze}\} = \vec{E_{0\mathrm{ref}}} \exp\{i(-0,84 k_0 + \vec{k_{\mathrm{in,t}}} \circ \vec{r} - \omega t)\} = -r_{\mathrm{TE}} H_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega} \vec{e}_z \exp\{i(0,84 k_0 + \vec{k_{\mathrm{in,t}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

zu

$$\vec{E_{0\mathrm{ref}}} = -r_{\mathrm{TE}} \exp\{i 1,68 k_0\} H_0 \frac{k_0}{\varepsilon_0 \omega} \vec{e}_z \quad .$$

Damit resultiert für die Amplitude der reflektierten magnetischen Feldstärke aus der Amplitude der elektrischen Feldstärke zu

$$\vec{H_{0\mathrm{ref}}} = r_{\mathrm{TE}} H_0 \exp\{i 1,68 k_0\} (0,96 \vec{e}_x + 0,28 \vec{e}_y) \quad .$$

Hinweise

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{2}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{5}$$