Version vom 3. August 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial für ein bestimmtes Problem lautet in Zylinderkoordinaten

$$\vec{A} = A_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_z$$

Wie lautet das zugehörige skalare elektrische Potenzial, so dass die Lorenzeichung erfüllt ist?

Lösung

Lorenzeichung verlangt

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \frac{\mu\varepsilon}{c_0^2}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0$$

Es folgt also

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = -c^2\vec{\nabla} \circ \vec{A} = -ikc^2 A_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}$$

und damit

$$\Phi_{\mathrm{el}} = \frac{-ikc^2}{-i\omega}A_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} = cA_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Ein Elektron (Masse $m_e = 9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As}$) wird in einem elektrischen Feld von $10^5\,\mathrm{V/m}$ beschleunigt. Wie lange dauert es, bis das Elektron die Geschwindigkeit von $100\,\mathrm{m/s}$ erreicht hat?

Lösung

Zur Berechnung des Geschwindigkeitsverlaufs wird die Beschleunigung benötigt. Diese resultiert aus der Lorentzkraft mit

$$\vec{F}_{\mathrm{L}} = e\vec{E} = m_e\vec{a}$$

Die Geschwindigkeit ist

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,\mathrm{d}t = \vec{v}\{t_1\} + \int_{t_1}^{t} \vec{a}\,\mathrm{d}t$$

Bei der hier vorliegenden konstanten Beschleunigung resultiert die Dauer $T = t - t_1$ bis zur gesuchten Geschwindigkeit mit $\vec{v}\{t_1\} = 0$ aus

$$T = \frac{v}{a} = \frac{m_e v}{eE} = \frac{9 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg} \cdot 100\,\mathrm{m/s}}{1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{As} \cdot 10^5\,\mathrm{V/m}} = 9/1{,}6 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s} = 5{,}625 \cdot 10^{-15}\,\mathrm{s} = 5{,}625\,\mathrm{fs}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welche Größe hat das magnetische Vektorpotenzial einer homogen in z-Richtung magnetisierten Kugel mit Radius R innerhalb und außerhalb der Kugel, wenn diese sich im freien Raum befindet?

Lösung

Das magnetische Vektorpotenzial eines magnetisierten Körpers resultiert aus

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\vec{M}\{\vec{r'}\} \times (\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r'$$

und lautet mit der konstanten Magnetisierung in der Kugel wegen

$$\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{\text{Kugel}} \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r' = \vec{e}_r \frac{R}{3} \begin{cases} \frac{r}{R} & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^2}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} M \vec{e}_z \times \iiint\limits_{\text{Kugel}} \frac{(\vec{r} - \vec{r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r' = \mu_0 M (\vec{e}_z \times \vec{e}_r) \frac{R}{3} \begin{cases} \frac{r}{R} & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^2}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

und mit

$$\vec{e}_z \times \vec{e}_r = \sin\{\theta\}(\cos\{\phi\}\vec{e}_y - \sin\{\phi\}\vec{e}_x) = \sin\{\theta\}\vec{e}_\phi$$

$$\vec{A} = \mu_0 M \frac{R}{3} \sin\{\theta\} \vec{e}_\phi \begin{cases} \frac{r}{R} & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^2}{r^2} & \text{für } r > R \end{cases}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Auf der negativen z-Achse fließt ein Strom der Stärke I in positiver z-Richtung. Wie groß ist das Magnetfeld auf der y-Achse?

Lösung

Hier wird das Biot-Savart-Gesetz genutzt. Dafür kann

$$\vec{j} = \begin{cases} I\delta\{x\}\delta\{y\}\vec{e}_z & -\infty < z \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

verwendet werden. Es resultiert mit dem Hilfsintegral (7) und $t = z - z'$

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3} \, \mathrm{d}^3 r' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-\infty}^{0} \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x^2 + y^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \left[\frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2 + y^2} \frac{-t}{x^2 + y^2 + t^2} \right]_{\infty}^{z} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\vec{e}_\phi}{\rho} \left(1 - \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} \right)
\end{aligned}$$

Auf der y-Achse ist $x = z = 0$ und es bleibt

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{1}{y} \vec{e}_x$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Wie lautet die elektrische Feldstärke zum Magnetfeld

$$\vec{H} = H_0 \sin\{2k_0 y\} \exp\{i(1{,}5k_0 z + \omega t)\} \vec{e}_x$$

in einem unmagnetischen Medium?

Lösung

In der obigen Darsellung ist $\vec{H}$ **keine ebene Welle**. Es bietet sich an, die magnetische Feldstärke als Überlagerung von ebenen Wellen zu schreiben:

$$\vec{H} = \frac{1}{2i} H_0 \left(\exp\{i(1{,}5k_0 z + 2k_0 y + \omega t)\} - \exp\{i(1{,}5k_0 z - 2k_0 y + \omega t)\} \right) \vec{e}_x$$

Mit den beiden Wellenzahlvektoren $\vec{k_1} = -1{,}5k_0\vec{e}_z - 2k_0\vec{e}_y$
und $\vec{k_2} = -1{,}5k_0\vec{e}_z + 2k_0\vec{e}_y$
resultiert, dass die relative Permittivität in dem unmagnetischen Medium $\varepsilon = 6{,}25$ ist. Damit resultiert jeweils die Amplitude der elektrischen Feldstärke zu

$$\vec{E_{01}} = \frac{H_0}{i2\omega\varepsilon\varepsilon_0} \vec{e}_x \times \vec{k_1} = \frac{H_0}{i12{,}5\omega\varepsilon_0} (1{,}5k_0\vec{e}_y - 2k_0\vec{e}_z)$$

und

$$\vec{E_{02}} = \frac{-H_0}{i12{,}5\omega\varepsilon_0}(1{,}5k_0\vec{e}_y + 2k_0\vec{e}_z)$$

Das Gesamtfeld entsteht aus der Überlagerung der Einzelfelder und lautet

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{H_0}{i12{,}5\omega\varepsilon_0}\left((1{,}5k_0\vec{e}_y - 2k_0\vec{e}_z)\exp\{i(1{,}5k_0z + 2k_0y + \omega t)\}\right. \\
&\quad \left. -(1{,}5k_0\vec{e}_y + 2k_0\vec{e}_z)\exp\{i(1{,}5k_0z - 2k_0y + \omega t)\}\right) \\
&= \frac{H_0}{i12{,}5\omega\varepsilon_0}\left((1{,}5k_0\vec{e}_y - 2k_0\vec{e}_z)\exp\{i2k_0y\} - (1{,}5k_0\vec{e}_y + 2k_0\vec{e}_z)\exp\{-i2k_0y\}\right) \\
&\quad \exp\{i(1{,}5k_0z + \omega t)\} \\
&= \frac{H_0}{6{,}25\omega\varepsilon_0}\left((1{,}5k_0\vec{e}_y\sin\{2k_0y\} + i2k_0\vec{e}_z\cos\{2k_0y\}\right)\right)\exp\{i(1{,}5k_0z + \omega t)\}
\end{aligned}$$

Alternativ hätte auch die Maxwell-Gleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j}$$

mit $\vec{j} = 0$ verwendet werden können. Hier ist dann die Frage, wie man die Größe von ε bestimmt. Das ergibt sich nur durch weitere Verwendung von

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

und anschließenden Vergleich mit dem ursprünglichen Feld.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Als Modell für ein Stromversorgungskabel sollen zwei parallele gerade Stromfäden unendlicher Länge mit entgegengesetztem Strom I dienen. Sie haben den Abstand d zueinander. Die kreisrunde Isolation aus einem unmagnetischen Dielektrikum mit ε ist so angebracht, das es die Stromfäden symmetrisch umhüllt und hat den Durchmesser D. Wie groß ist die magnetische Feldstärke in den beiden Symmetrieebenen?

Lösung

Da das Dielektrikum unmagnetisch ist, hat es keinen Einfluss auf die magnetische Feldstärke. Diese ergibt sich aus der Überlagerung der einzelnen Feldstärken unter der Annahme, dass Stromfaden 1 bei $x = -d/2$ und der andere bei $x = d/2$ liegt und der Strom in z-Richtung bzw. entgegengesetzt fließt, können die bekannten Ansätze verwendet werden:

$$\begin{aligned}\vec{H}_1 &= \frac{I}{2\pi}\frac{(x+d/2)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x+d/2)^2+y^2}\\ \vec{H}_2 &= \frac{-I}{2\pi}\frac{(x-d/2)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x-d/2)^2+y^2}\end{aligned}$$

Das Gesamtfeld lautet also

$$\vec{H} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{(x+d/2)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x+d/2)^2+y^2} - \frac{(x-d/2)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(x-d/2)^2+y^2}\right)$$

Die Symmetrieebenen der magnetischen Feldstärke sind die $x-z$- und die $y-z$-Ebene. In der $x-z$-Ebene gilt $y=0$ und es resultiert

$$\vec{H}\{y=0\} = \frac{I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+d/2} - \frac{1}{x-d/2}\right)\vec{e}_y = \frac{-I}{2\pi}\frac{d}{x^2-(d/2)^2}\vec{e}_y$$

In der anderen Ebene ergibt sich

$$\begin{aligned}\vec{H}\{x=0\} &= \frac{I}{2\pi}\left(\frac{(d/2)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(d/2)^2+y^2} - \frac{(-d/2)\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{(d/2)^2+y^2}\right)\\ &= \frac{I}{2\pi}\frac{1}{(d/2)^2+y^2}\left(d/2\vec{e}_y - y\vec{e}_x + d/2\vec{e}_y + y\vec{e}_x\right) = \frac{I}{2\pi}\frac{d}{y^2+(d/2)^2}\vec{e}_y\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (10 Punkte)

Im freien Raum befindet sich bei $z=0$ die Ladungsdichte

$$\varrho_S = \varrho_0\cos\{0{,}5k_0x\}\exp\{i\omega t\}$$

und strahlt Wellen zu beiden Seiten ab. Wie lautet deren elektrische Feldstärke?

Lösung

Eine Flächenladungsdichte korrespondiert direkt mit der Normalkomponente eines $\vec{D}$-Feldes und damit der Normalkomponente einer elektrischen Feldstärke bezüglich der Fläche. Damit ist sofort klar, dass die beteiligten Wellen bezüglich der Grenzfläche TM-polarisiert sein müssen. Die Flächenladungsdichte ist noch in einer ungünstigen Schreibweise dargestellt. Für die weitere Berechnung ist die Umformung

$$\varrho_S = \varrho_0\cos\{0{,}5k_0x\}\exp\{i\omega t\} = \frac{\varrho_0}{2}(\exp\{i(0{,}5k_0x+\omega t)\} + \exp\{i(-0{,}5k_0x+\omega t)\})$$

besser geeignet. Die e-Funktionen müssen bei der Betrachtung der Stetigkeitsbedingungen auf der Grenzfläche erhalten bleiben. Damit sind die Tangentialkomponenten der Wellenzahlvektoren mit

$$\vec{k_{\tan}} = \pm k_0/2\vec{e}_x$$

festgelegt.
Offensichtlich müssen zwei verschiedene Tangentialkomponenten von $\vec{k}$ betrachtet werden. Zunächst wird die Komponente mit positiven Vorzeichen betrachtet. Auf beiden Seiten der Grenzfläche laufen Wellen weg, damit resultiert der Ansatz

$$\begin{aligned}\vec{k_{11}} &= k_0/2\vec{e}_x + k_{n1}\vec{e}_z \quad \text{für} z > 0\\ \vec{k_{21}} &= k_0/2\vec{e}_x - k_{n2}\vec{e}_z \quad \text{für} z < 0\end{aligned}$$

Da sich beide Wellen im freien Raum bewegen, sind die Normalkomponenten gleich groß und folgen aus der Dispersionsrelation zu

$$k_{n2} = k_{n1} = k_n = k_0\sqrt{1-(0{,}5)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}k_0$$

Für die magnetischen Feldstärken werden die Ansätze

$$\begin{aligned}\vec{H_{11}} &= H_{11}\exp\{i(\vec{k_{11}}\circ\vec{r}-\omega t)\}\vec{e}_y\\ \vec{H_{21}} &= H_{21}\exp\{i(\vec{k_{21}}\circ\vec{r}-\omega t)\}\vec{e}_y\end{aligned}$$

gewählt. Die zugehörigen elektrischen Felder lauten

$$\begin{aligned}\vec{E_{11}} &= \frac{H_{11}}{\omega\varepsilon_0}\exp\{i(\vec{k_{11}}\circ\vec{r}-\omega t)\}\frac{-k_0}{2}(\vec{e}_z-\sqrt{3}\vec{e}_x)\\ \vec{E_{21}} &= \frac{H_{21}}{\omega\varepsilon_0}\exp\{i(\vec{k_{21}}\circ\vec{r}-\omega t)\}\frac{-k_0}{2}(\vec{e}_z+\sqrt{3}\vec{e}_x)\end{aligned}$$

Die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes müssen gleich groß sein. Daraus resultiert $H_{11} = -H_{21} = H_1$. Mit der Stetigkeitsbedingung für $\vec{D}$ ergibt sich aus

$$\vec{n}\,(\vec{D_{21}}-\vec{D_{11}})\Big|_{z=0} = \frac{H_1 k_0}{\omega} = \frac{\varrho_0}{2}$$

$$H_1 = \frac{\varrho_0\omega}{2k_0}$$

Entsprechend folgt für die negative Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors aus dem Ansatz

$$\begin{aligned} \vec{H_{12}} &= H_{12} \exp\{i(\vec{k_{12}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_y \\ \vec{H_{22}} &= H_{22} \exp\{i(\vec{k_{22}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_y \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \vec{k_{12}} &= \frac{k_0}{2}(-\vec{e}_x + \sqrt{3}\vec{e}_z) \quad \text{für} z > 0 \\ \vec{k_{22}} &= \frac{k_0}{2}(-\vec{e}_x - \sqrt{3}\vec{e}_z) \quad \text{für} z < 0 \end{aligned}$$

die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \vec{E_{12}} &= \frac{H_{12}}{\omega\varepsilon_0} \exp\{i(\vec{k_{12}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\frac{k_0}{2}(\vec{e}_z + \sqrt{3}\vec{e}_x) \\ \vec{E_{22}} &= \frac{H_{22}}{\omega\varepsilon_0} \exp\{i(\vec{k_{22}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\frac{k_0}{2}(\vec{e}_z - \sqrt{3}\vec{e}_x) \end{aligned}$$

Aus den Stetigkeitsbedingungen resultiert wie oben

$$H_{12} = -H_{22} = H_1 = -\frac{\varrho_0\omega}{2k_0}$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Von der Grenzfläche $y = 0$ zwischen zwei unmagnetischen Medien laufen die Wellen

$$\vec{H}_1 = H_0(3\vec{e}_x + \vec{e}_y) \exp\{i(k_0(3y - x) + \omega t)\}$$

und

$$\vec{H}_2 = H_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \exp\{i(\omega t - k_0(y + x))\}$$

weg. Welches magnetische Feld hat diese Wellen erzeugt?

Lösung

Die Wellen laufen in unmagnetischen Medien. Aus den beiden Wellenzahlvektoren $\vec{k_1} = k_0(\vec{e}_x - 3\vec{e}_y)$ und $\vec{k_2} = k_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ resultieren $\varepsilon_1 = 10$ und $\varepsilon_2 = 2$. Die Wellen laufen also in unterschiedlichen Medien. Zu beachten ist, dass das Medium 1 im Bereich $y < 0$ liegt.
Die beiden Felder liegen in der Einfallsebene, es handelt sich also um TE-Wellen.
Die zugehörigen elektrischen Felder sind

$$\begin{aligned}
\vec{E_1} &= -\frac{H_0 k_0}{\omega\varepsilon_1\varepsilon_0} 10\vec{e}_z \exp\{i(\omega t - \vec{k_1} \circ \vec{r})\} = -\frac{H_0 k_0}{\omega\varepsilon_0}\vec{e}_z \exp\{i(\omega t - \vec{k_1} \circ \vec{r})\} \\
\vec{E_2} &= \frac{H_0 k_0}{\omega\varepsilon_0}\vec{e}_z \exp\{i(\omega t - \vec{k_2} \circ \vec{r})\}
\end{aligned}$$

Eine der beiden Wellen ist die reflektierte Welle, die andere die transmittierte. Unter der Annahme, dass die einfallende Welle im Medium 1, also im Bereich $y < 0$ läuft, resultiert der Reflexionsfaktor mit
$\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} = 3k_0$, $\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}} = k_0$ zu

$$r = \frac{3k_0 - k_0}{3k_0 + k_0} = 0{,}5$$

Der zugehörige Transmissionsfaktor ist $t = 1{,}5$. Es muss gelten

$$\left.\frac{E_{\mathrm{tr}}}{E_{\mathrm{ref}}}\right|_{y=0} = \frac{\frac{E_{\mathrm{tr}}}{E_{\mathrm{in}}}}{\frac{E_{\mathrm{ref}}}{E_{\mathrm{in}}}} = \frac{t_{\mathrm{TE}}}{r_{\mathrm{TE}}} = 3 \quad ,$$

was nicht erfüllt ist. Kommt die Welle dagegen aus dem Medium 2, also von $y > 0$, tauschen die Normalkomponenten ihren Wert. Es resultiert $r = -0{,}5$ und entsprechend $t = 0{,}5$. Die transmittierte und reflektierte Welle stehen also im Verhältnis -1, was erfüllt ist.
Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle ist demzufolge

$$\vec{E_{\mathrm{in}}} = -2\frac{H_0 k_0}{\omega\varepsilon_0}\vec{e}_z \exp\{i(\omega t + k_0(y - x))\}$$

und entsprechend

$$\vec{H_{\mathrm{in}}} = 2H_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y) \exp\{i(\omega t + k_0(y - x))\}$$

Dies Ergebnis wäre auch einfacher zu finden gewesen: Die Stetigkeitsbedingungen fordern wegen der Stromfreiheit der Fläche und der unmagnetischen Medien die völlige Stetigkeit der magnetischen Felder auf beiden Seiten. Mit der ersten Annahme, dass die erzeugende Welle im Medium 1 läuft, würde für die Amplitude der einfallenden Welle $H_{0\mathrm{in}} = H_{02} - H_{01} = -2H_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$ gefordert werden. Der zugehörige Wellenzahlvektor $\vec{k_{\mathrm{in}}} = k_0(\vec{e}_x - 3\vec{e}_y)$ steht aber nicht senkrecht dazu. Dreht man das Problem um, ergibt sich einfach $H_{o\mathrm{in}} = H_{01} - H_{02} = 2H_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$, was direkt senkrecht auf $\vec{k_{\mathrm{in}}} = k_0(\vec{e}_x - \vec{e}_y)$ steht, und somit die Lösung darstellt.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Ein ideal leitfähiger runder Stab mit Durchmesser D ist konzentrisch von drei Lagen idealem Dielektrikums mit gleichen Dicken d umhüllt. Die relativen Permittivitäten sind 2, 3 und 4. Auf dem äußeren Dielektrikum liegt eine Elektrode, die gegenüber dem Innenleiter die Spannung U aufweist. Wie ist der Potenzialverlauf innerhalb der Schichten unter der Voraussetzung, dass das Gebilde unendlich lang ist?

Lösung

Zunächst wird ein Koordinatensystem so festgelegt, dass die Drahtachse in z-Richtung liegt. Wegen der Zylindersymmetrie werden im Folgenden Zylinderkoordinaten verwendet. Die Dielektrika definieren drei Bereiche wie folgt:

$$\begin{array}{rlrcl} I: & \varepsilon_1 = 2 & R & < & \rho \leq R + d \\ II: & \varepsilon_2 = 3 & R + d & < & \rho \leq R + 2d \\ III: & \varepsilon_3 = 4 & R + 2d & < & \rho \leq R + 3d \end{array}$$

In den ladungsfreien Medien gilt die Laplacegleichung; unter Berücksichtigung der Zylindersymmetrie lautet sie

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V\right) = 0$$

Formal lauten die Lösungen für die drei Bereiche

$$V_j\{\rho\} = V_{j1}\{\rho_j\} - V_{j2}\ln\left\{\frac{\rho}{\rho_j}\right\}$$

Mit $\rho_1 = R$, $\rho_2 = R + d$ und $\rho_3 = R + d$
ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen für das Potenzial

$$\begin{aligned} V_1\{R + d\} &= V_2\{R + d\} && (1) \\ V_2\{R + 2d\} &= V_2\{R + 2d\} && (2) \\ V_3\{R + 3d\} &= V_1\{R\} + U = V_{11} + U && (3) \end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke

$$\vec{E}_j = V_{j2}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho$$

hat nur eine ρ-Komponente, steht also immer senkrecht auf den Grenzflächen. Es muss also die Stetigkeit der dielektrischen Verschiebung heran gezogen werden:

$$\begin{aligned}\vec{D}_1\{R+d\} &= \vec{D}_2\{R+d\}\\ \vec{D}_2\{R+2d\} &= \vec{D}_3\{R+2d\}\end{aligned}$$

Daraus resultiert

$$\begin{aligned}2V_{12} &= 3V_{22}\\ 3V_{22} &= 4V_{32}\end{aligned}$$

Nach Einsetzen in (1) - (3) ergibt sich

$$\begin{aligned}V_{11} - V_{12}\ln\left\{\frac{R+d}{R}\right\} &= V_{21}\\ V_{21} - V_{22}\ln\left\{\frac{R+2d}{R+d}\right\} &= V_{31}\\ V_{31} - V_{32}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\} &= V_{11}+U\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V_{31} &= V_{11}+U+V_{12}\frac{2}{4}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}\\ V_{21} &= V_{11}+U+V_{12}\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}+V_{12}\frac{2}{3}\ln\left\{\frac{R+2d}{R+d}\right\}\\ V_{11} &= V_{11}+U+V_{12}\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}+V_{12}\frac{2}{3}\ln\left\{\frac{R+2d}{R+d}\right\}+V_{12}\ln\left\{\frac{R+d}{R}\right\} \quad ,\end{aligned}$$

also

$$V_{12} = \frac{-U}{\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}+\frac{2}{3}\ln\left\{\frac{R+2d}{R+d}\right\}+\ln\left\{\frac{R+d}{R}\right\}}$$

$$V = V_{11}+U+V_{12}\cdot\begin{cases}\left(\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}+\frac{2}{3}\ln\left\{\frac{R+2d}{R+d}\right\}+\ln\left\{\frac{R+d}{R}\right\}-\ln\left\{\frac{\rho}{R}\right\}\right) & (I)\\ \left(\frac{1}{2}\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}+\frac{2}{3}\left(\ln\left\{\frac{R+2d}{R+d}\right\}-\ln\left\{\frac{\rho}{R+d}\right\}\right)\right) & (II)\\ \frac{2}{4}\left(\ln\left\{\frac{R+3d}{R+2d}\right\}-\ln\left\{\frac{\rho}{R+2d}\right\}\right) & (III)\end{cases}$$

Bis auf das konstante Potenzial V_{11} ist somit der Potenzialverlauf bekannt.

Hinweise

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{4}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{7}$$