Version vom 5. August 2021

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Wie lautet die Darstellung von

$$\vec{H} = H_0 \cos\{2k_0 y - \omega t\}\vec{e}_z + i2H_0 \sin\{k_0 x - \omega t\}\vec{e}_y$$

als Überlagerung ebener Wellen?

Lösung

Für die Darstellung als ebene Wellen müssen die Winkelfunktionen in der Eulerschen Schreibweise notiert werden. Mit

$$\begin{aligned}\sin\{x\} &= \frac{1}{2i}\left(\exp\{ix\} - \exp\{-ix\}\right)\\ \cos\{x\} &= \frac{1}{2}\left(\exp\{ix\} + \exp\{-ix\}\right)\end{aligned}$$

resultiert

$$\begin{aligned}\vec{H} &= H_0 \cos\{2k_0 y - \omega t\}\vec{e}_z + i2H_0 \sin\{k_0 x - \omega t\}\vec{e}_y\\ &= \frac{H_0}{2}\exp\{i(2k_0 y - \omega t)\}\vec{e}_z + \frac{H_0}{2}\exp\{-i(2k_0 y - \omega t)\}\vec{e}_z\\ &\quad + H_0 \exp\{i(k_0 x - \omega t)\}\vec{e}_y - H_0 \exp\{-i(k_0 x - \omega t)\}\vec{e}_y\end{aligned}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = E_0(4\vec{e}_y - 6\vec{e}_x)\exp\{i(k_0(2x + 3y) - \omega t)\}$$

in einem Medium mit $\varepsilon = 2{,}5$. Wie lautet die zugehörige magnetische Feldstärke $\vec{H}$?

Lösung

Aus der Exponentialfunktion wird der Wellenzahlvektor

$$k_0(2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$$

extrahiert. Aus der Dispersionsrelation ergibt sich

$$\|\vec{k}\|^2 = 13k_0^2 = \mu\varepsilon k_0^2$$

und damit $\mu = 13/2{,}5$.
Die magnetische Feldstärke kann somit zu

$$\begin{aligned}
\omega\mu\mu_0\vec{H} &= \vec{k}\times\vec{E} = k_0E_0(2\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)\times(4\vec{e}_y - 6\vec{e}_x)\exp\{i(k_0(2x+3y)-\omega t)\} \\
&= E_0 26k_0\exp\{i(k_0(2x+3y)-\omega t)\}\vec{e}_z \\
\vec{H} &= E_0\frac{5k_0}{\omega\mu_0}\exp\{i(k_0(2x+3y)-\omega t)\}\vec{e}_z = E_0 5\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}\exp\{i(k_0(2x+3y)-\omega t)\}\vec{e}_z
\end{aligned}$$

bestimmt werden.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine ebene Welle fällt unter dem Winkel von 45° auf die Grenzfläche zwischen zwei Medien. Bezüglich der Grenzfläche ist die Welle TM-polarisiert. Die Welle läuft in einem Medium mit $\varepsilon = 1$, $\mu = 2$, das angrenzende Medium hat $\varepsilon = 2$ und $\mu = 1$. Wie lautet die magnetische Feldstärke der transmittierten Welle, wenn die Amplitude der einfallenden Welle H_0 ist?

Lösung

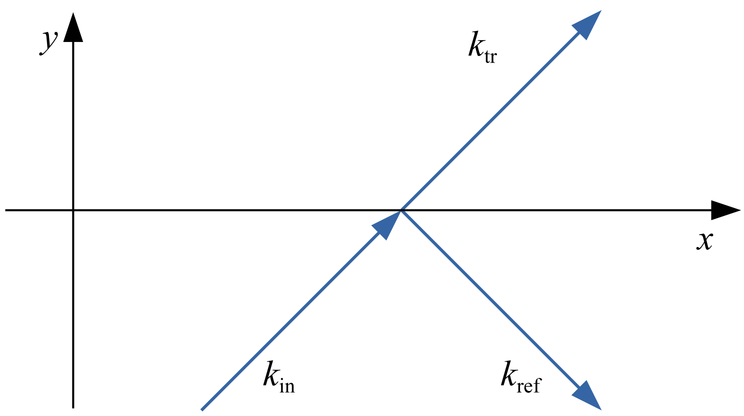

Abbildung 1: Wellen an der Grenzfläche.

Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle lautet mit obiger Festlegung des Koordinatensystems wegen $k = k_0\sqrt{\varepsilon\mu} = \sqrt{2}k_0$

$$\vec{k_{\text{in}}} = k_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

Da der Wellenzahlvektor die selbe Länge hat, hat er die selbe vektorielle Darstellung. Da die einfallende Welle TM-polarisiert ist, kann hier angenommen werden, dass ihre Amplitude $\vec{H_{0\text{in}}} = H_0\vec{e}_z$ lautet. Die Amplitude der magnetischen Feldstärke der transmittierten Welle ist dann $\vec{H_{0\text{tr}}} = t_{\mathsf{TM}} H_0 \vec{e}_z$ wobei der Zusammenhang $t_{\mathsf{TM}} = 1 + r_{\mathsf{TM}}$ verwendet werden kann. Wegen der gleichen Normalkomponenten der Wellenzahlvektoren ergibt sich einfach

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{\frac{1}{\varepsilon_1} - \frac{1}{\varepsilon_2}}{\frac{1}{\varepsilon_1} + \frac{1}{\varepsilon_2}} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3}$$

Insgesamt resultiert damit

$$\vec{H_{0\text{tr}}} = H_0 \frac{4}{3} \exp\{i(k_0(x+y) - \omega t)\}\vec{e}_z$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Die Amplitude des elektrischen Feldes einer monochromatischen ebenen Welle ist $\vec{E} = E_0(-2\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. Die zugehörige magnetische Feldamplitude ist $\vec{H} = H_0(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$. Die Welle läuft in Luft. Wie lautet ihr Wellenzahlvektor?

Lösung

Für die Richtung des Wellenzahlvektors wird der Zusammenhang $\mu\mu_0\omega\vec{H}_0 = \vec{k} \times \vec{E}_0$ herangezogen. Erweiterung mit $\vec{E} = \times$ ergibt wegen der Eigenschaft, dass der Wellenzahlvektor bei den hier vorliegenden ebenen Wellen auf E und H senkrecht steht

$$\mu\mu_0\omega\vec{E} \times \vec{H}_0 = \vec{E}_0 \times \vec{k} \times \vec{E}_0 = \|\vec{E}_0\|^2\vec{k}$$

Damit ergibt sich der einfache Zusammenhang

$$\frac{\vec{E}_0}{\|\vec{E}_0\|} \times \frac{\vec{H}_0}{\|\vec{H}_0\|} = \frac{\vec{k}}{\|\vec{k}\|}$$

und umgestellt

$$\vec{k} = \frac{\|\vec{k}\|}{\|\vec{E}_0\|\|\vec{H}_0\|}\vec{E}_0 \times \vec{H}_0$$

bestimmt werden. Es resultiert mit $\|\vec{E}_0\| = \sqrt{5}E_0$, $\|\vec{H}_0\| = \sqrt{5}H_0$, $\|\vec{k}\| = k_0$ und

$$\vec{E}_0 \times \vec{H}_0 = E_0 H_0(-2\vec{e}_x + \vec{e}_y \times (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) = -E_0 H_0 5\vec{e}_z$$

$$\vec{k} = -k_0\vec{e}_z$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Wie ist die Welle

$$\vec{E} = 3E_0 \sin\{k_0 z - \omega t\}\vec{e}_y - E_0 \cos\{k_0 z - \omega t\}\vec{e}_x$$

polarisiert? Begründung!

Lösung

Es handelt sich hier um den Realteil der Welle

$$\vec{E} = -E_0(\vec{e}_x + i3\vec{e}_y) \exp\{i(k_0 z - \omega t)\}$$

Die Welle breitet sich also in z-Richtung aus.
Mit Hilfe einer Wertetabelle lässt sich der zeitliche Verlauf des Realteils des elektrischen Feldes an einem konstanten Ort bestimmen. Für $z = 0$ ergibt sich zum Beispiel

$$\vec{E} = -E_0(\cos\{\omega t\}\vec{e}_x + 3\sin\{\omega t\}\vec{e}_y) \quad ,$$

siehe Abbildung 2.

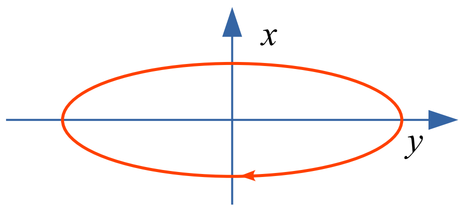

Abbildung 2: zeitlicher Verlauf des elektrischen Feldstärkevektors an einem konstanten Ort. In x-Richtung ist die x-Komponente des Feldes abgetragen, in y- Richtung die y-Komponente.

Das Feld dreht rechts um die z-Achse und somit um die Ausbreitungsrichtung. Es handelt sich also um eine rechts elliptisch polarisiertes Welle.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Eine gerade homogene Linienladung ϱ_L der Länge ℓ befindet sich im freien Raum. Wie lautet die elektrische Feldstärke an einem Punkt im Abstand D senkrecht zur Linie an einem Ende der Ladungsverteilung?

Lösung

Es wird angenommen, dass sich die Ladungsverteilung auf der negativen z-Achse im Bereich $-\ell \leq z \leq 0$ befindet. Der gesuchte Punkt sei bei $x = D$. Für das Coulombfeld sind also

$$\begin{aligned} \vec{r} &= D\vec{e}_x \\ \varrho_V &= \varrho_0 \delta\{x\}\delta\{y\}\mathrm{rect}\left\{\frac{z+\ell/2}{\ell}\right\} \\ \mathrm{d}^3r' &= \mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \end{aligned}$$

zu verwenden. Nach Auswertung der Diracfunktionen bleibt das Integral

$$\vec{E} = \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\ell}^{0} \frac{x\vec{e}_x - z'\vec{e}_z}{(x^2 + z'^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}z'$$

mit $x = D$. Für die Auswertung des Integrals muss bei der x-Richtung das Hilfsintegral (4) und für die z-Richtung (2) verwendet werden. Es resultiert

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{z'}{D\sqrt{D^2+z'^2}}\vec{e}_x - \frac{1}{\sqrt{D^2+z'^2}}\vec{e}_z\right]_{-\ell}^{0} \\ &= \frac{\varrho_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\ell}{D\sqrt{D^2+\ell^2}}\vec{e}_x - \left(\frac{1}{D} - \frac{1}{\sqrt{D^2+\ell^2}}\right)\vec{e}_z\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Drei gleich große Punktladungen Q sind in Form eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge a im freien Raum angeordnet. Welche Kraft wirkt auf eine weitere Punktladung Q , die sich mittig über dem Dreieck in der Höhe $a\sqrt{2/3}$ befindet?
Hinweis: Der Mittelpunkt eines Dreiecks befindet sich bei 1/3 seiner Höhe.

Lösung

Die elektrostatische Kraft auf eine Ladung folgt aus $\vec{F} = Q\vec{E}$. Es muss also die elektrische Feldstärke am Ort der Ladung bestimmt werden. Mit der Festlegung der Orte in kartesischen Koordinaten

$$\begin{aligned} r_1 &= (-a/2, -a/(2\sqrt{3}), 0)^T \\ r_2 &= (a/2, -a/(2\sqrt{3}), 0)^T \\ r_3 &= (0, a/\sqrt{3}, 0)^T \\ r_4 &= (0{,}0, a\sqrt{2/3})^T \end{aligned}$$

resultiert die Kraft auf die Ladung bei $\vec{r_4}$ zu

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{\vec{r_4}-\vec{r_1}}{|\vec{r_4}-\vec{r_1}|^3} + \frac{\vec{r_4}-\vec{r_2}}{|\vec{r_4}-\vec{r_2}|^3} + \frac{\vec{r_4}-\vec{r_3}}{|\vec{r_4}-\vec{r_3}|^3}\right) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{a\sqrt{2/3}\vec{e}_z + a/2\vec{e}_x + a/(2\sqrt{3})\vec{e}_y}{a^3(2/3+1/4+1/12)^{3/2}} + \frac{a\sqrt{2/3}\vec{e}_z - a/2\vec{e}_y + a/(2\sqrt{3})\vec{e}_y}{a^3(2/3+1/4+1/12)^{3/2}}\right. \\ &\quad \left. + \frac{a\sqrt{2/3}\vec{e}_z - a/\sqrt{3}\vec{e}_y}{a^3(2/3+1/3)^{3/2}}\right) \\ &= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sqrt{6}}{a^2}\vec{e}_z \end{aligned}$$

Aufgabe 8 (11 Punkte)

Die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Leitfähigkeiten σ und relativen Dielektrizitätszahlen ε ist zunächst ungeladen. Zum Zeitpunkt $t = 0$ wird an einer Seite der Grenzfläche die Stromdichte $\vec{j}$ unter dem Winkel θ eingeprägt. Wie lautet der zeitliche Verlauf der Grenzflächenladung?

Lösung

An der Grenzfläche gelten die Stetigkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \varrho_S \end{aligned}$$

$$\vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) = -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_S$$

und mit dem mikroskopischen ohmschen Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ sowie $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ resultiert

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2}\vec{j}_2 - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1}\vec{j}_1) &= \varrho_S \\ \vec{n} \circ (\vec{j}_2 - \vec{j}_1) &= -\frac{\partial}{\partial t}\varrho_S \end{aligned}$$

Nach Umstellen reduziert sich das Gleichungssystem auf

$$\left(-\frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1} + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2}\right)\vec{n} \circ \vec{j}_1 = \varrho_S + \frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2}\frac{\partial}{\partial t}\varrho_S$$

Ein typischer Ansatz für Differentialgleichungen 1. Ordnung mit konstanten Koeffizienten ist

$$\varrho_S = \varrho_0(1 - \exp\{-\lambda t\})$$

Nach Einsetzen in die DGL resultiert

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\sigma_2}{\varepsilon_2\varepsilon_0} \\ \varrho_S &= \left(\frac{\varepsilon_2\varepsilon_0}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1\varepsilon_0}{\sigma_1}\right)\vec{n} \circ \vec{j}_1 \end{aligned}$$

mit $\vec{n} \circ \vec{j}_1 = j\cos\{\theta\}$.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Die Welle mit elektrischer Feldstärke

$$\vec{E} = E_0(2\vec{e}_x + \vec{e}_y)\exp\{i(k_0(x - 2y) + \omega t)\}$$

fällt aus einem Medium mit $\varepsilon = 1$ auf die ebene Grenzfläche $x = 0$ zu Luft. Wie lautet die elektrische Feldstärke der transmittierten Welle?

Lösung

Aus dem Vergleich zum Ansatz für ebene Wellen ergibt sich

$$\vec{k}_{\text{in}} = k_0(-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$$

und mit $\|\vec{k}_{\text{in}}\|^2 = 5k_0^2 = k_0^2\mu_{\text{in}}\varepsilon_{\text{in}}$ ist $\mu_{\text{in}} = 5$.
Der Normalenvektor auf die Grenzfläche ist $\pm\vec{e}_x$ und in die selbe Richtung wie die Normalenkomponente des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle zu wählen, also $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} \geq 0$. Somit resultiert $\vec{n} = -\vec{e}_x$.
Die elektrische Feldstärke liegt vollständig in der Einfallsebene, also ist die Welle bezüglich der Grenzfläche TM-polarisiert.
Zur Berechnung der Feldstärken der transmittierten Welle wird der Reflexionsfaktor resp. der Transmissionfaktor benötigt. Hierzu muss die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der transmittierten Welle berechnet werden. Mit der Tangentialkomponente der Wellenzahlvektoren $k_{\text{t}} = 2k_0$ ergibt sich

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_0^2 - k_t^2} = ik_0\sqrt{3}$$

und damit der Reflexions- und Transmissionsfaktor

$$\begin{aligned} r_{\mathsf{TM}} &= \frac{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{in}} - \vec{k}_{\text{tr}})}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{in}} - \vec{k}_{\text{tr}})} = \frac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i\sqrt{3}} = \frac{-1}{2}\left(1 + i\sqrt{3}\right) \\ t_{\mathsf{TM}} &= 1 + r_{\mathsf{TM}} = \frac{1}{2}\left(1 - i\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

Die Amplitude der elektrische Feldstärke der transmittierten Welle ergibt sich aus der Amplitude der magnetischen Feldstärke $\omega\varepsilon_0\vec{E}_{0\text{tr}} = \vec{H}_{0\text{tr}} \times \vec{k}_{\text{tr}}$ mit $\vec{H}_{0\text{tr}} = t_{\mathsf{TM}}\vec{H}_{0\text{in}}$ und $\omega\mu_{\text{in}}\mu_0\vec{H}_{0\text{in}} = \vec{k}_{\text{in}} \times \vec{E}_{0\text{in}}$ zu

$$\begin{aligned} \vec{E}_{0\text{tr}} &= t_{\mathsf{TM}}\frac{1}{k_0^2\mu_{\text{in}}}(\vec{k}_{\text{in}} \times \vec{E}_{0\text{in}}) \times \vec{k}_{\text{tr}} \\ &= t_{\mathsf{TM}}\frac{1}{k_0^2\mu_{\text{in}}}k_0((-\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \times E_0(2\vec{e}_x + \vec{e}_y)) \times k_0(-i\sqrt{3}\vec{e}_x + 2\vec{e}_y) \\ &= t_{\mathsf{TM}}E_0(2\vec{e}_x + i\sqrt{3}\vec{e}_y) \end{aligned}$$

Insgesamt resultiert also

$$\vec{E}_{\text{tr}} = E_0\, t_{\mathsf{TM}}(2\vec{e}_x + i\sqrt{3}\vec{e}_y)\exp\left\{i(-2k_0y + \omega t) + \sqrt{3}k_0x\right\}$$

Hinweise

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2 + t^2} \tag{1}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{3}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{4}$$