Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2020-1

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$

Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Leiten Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung in Materie eine Differentialgleichung für die Ladungsträgerdichte unter der Voraussetzung homogener, isotroper, leitfähiger Materie mit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ her.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Welche Leistung $P = \frac{\partial}{\partial t} W$ nimmt ein Teilchen mit Ladung q und Masse m im statischen elektromagnetischen Feld auf?

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie unter der Annahme homogener, linearer Materie, dass der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potenzial ϕ_{el} und der Raumladungsdichte in Coulomb-Eichung gerade dem statischen Fall entspricht.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Eine Punktladung mit Ladung q befinde sich im Ursprung. Eine dünne, geerdete, leitfähige Platte schneide die x-Achse bei $x = a$ und habe den Normalenvektor $\vec{n} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{3}$. Berechnen Sie die Verteilung der elektrischen Feldstärke im gesamten Raum.

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Eine dünne Kreisscheibe mit Radius a befindet sich im freien Raum und trägt im Bereich $a/10 \leq \rho \leq a$ die Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0(a/\rho)^2$, wobei ρ der Abstand zur Scheibenachse ist. Die Scheibe rotiert um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega\vec{e}_\mathrm{n}$ mit $\vec{e}_\mathrm{n}$ als Normalenvektor der Kreisscheibe. Berechnen Sie die magnetische Induktion auf der Achse.

Hinweise:

- Die Achse verläuft senkrecht zur Kreisscheibe durch deren Mittelpunkt.
- $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Ein ideal leitfähiger Stab (Innenelektrode) mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius a ist unendlich lang und konzentrisch von einer geerdeten Außenelektrode mit Radius b umgeben. Auf der Innenelektrode befindet sich die homogene Flächenladungsdichte ϱ_0. Welche Spannung stellt sich zwischen den Elektroden ein?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

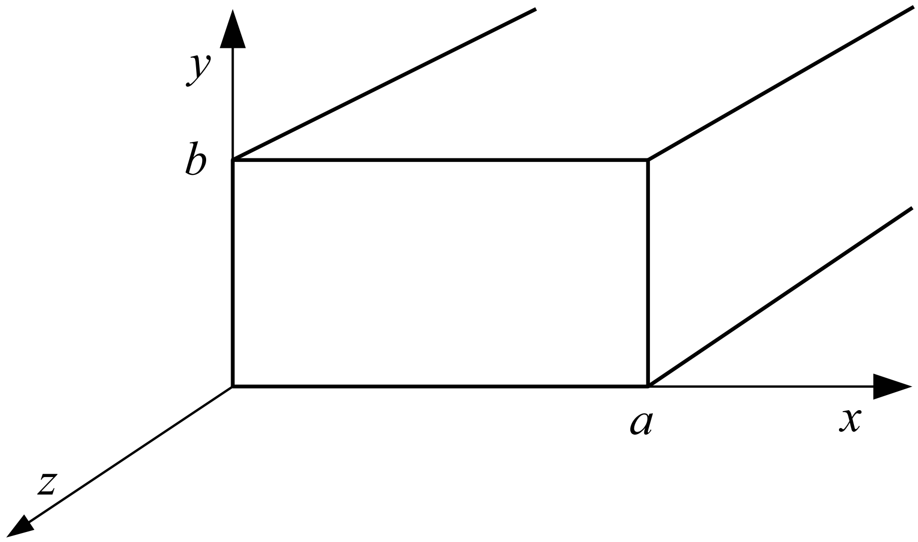

Abbildung 1: Anordung des Rechteckhohlleiters mit metallischer Berandung im Koordinatensystem. Es gilt $b < a$.

Die elektrische Feldstärke in einem Rechteckhohlleiter mit Anordnung gemäß Abbildung 1 wird durch Überlagerung von unendlich vielen Wellen entsprechend

$$\vec{E} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{m,n} \sin\{m\pi \frac{x}{a}\} \sin\{n\pi \frac{y}{b}\} \exp\{i(\beta_{m,n} z - \omega t)\} \vec{e}_x$$

beschrieben. Wie groß muss ω mindestens sein, damit sich mindestens eine der beteiligten Wellen verlustfrei im Hohlleiter ausbreitet? Wie groß darf sie höchstens sein, damit sich nur eine Welle verlustfrei ausbreitet?

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Ein infinitesimal dünnes, gerades, unendlich langes Leiterband der Breite $2a$ trägt quer zu seiner Längsachse die homogene Flächenstromdichte j_0. Wie lautet die magnetische Induktion im umgebenden freien Raum?
Tipp: Führen Sie die Integration in Achsenrichtung als erstes aus.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Die ebene Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien liegt bei $x = 20\lambda$. Die Brechzahlen sind 2,5 im Bereich $x < 20\lambda$ und 3 im anderen Medium. Aus dem Bereich $x > 20\lambda$ fällt eine TE-Welle mit elektrischer Feldstärke E_0 und der Vakuumwellenlänge λ unter dem Winkel $\pi/6$ auf die Grenzfläche. Wie lautet die magnetische Feldstärke in der Ebene $x = 0$?

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{1}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{2}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{5}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{6}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{9}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{10}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{11}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{12}$$