

Version vom 24. September 2021

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Leiten Sie ausgehend von der Kontinuitätsgleichung in Materie eine Differentialgleichung für die Ladungsträgerdichte unter der Voraussetzung homogener, isotroper, leitfähiger Materie mit $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ her.

Lösung

Zunächst wird die Kontinuitätsgleichung hergeleitet:

$$\begin{aligned}\nabla \circ (\nabla \times \vec{H}) &= 0 \\ &= \nabla \circ \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \circ \vec{D}) + \nabla \circ \vec{j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \nabla \circ \vec{j} .\end{aligned}$$

In dieser Gleichung wird \vec{j} nun mit Hilfe des ohmschen Gesetzes ersetzt:

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \nabla \circ \vec{j} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \sigma \nabla \circ \vec{E} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \nabla \circ \vec{D} \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \varrho + \frac{\sigma}{\varepsilon \varepsilon_0} \varrho .\end{aligned}$$

Dabei handelt es sich um die gesuchte Differentialgleichung für die Ladungsdichte ϱ .

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Welche Leistung $P = \frac{\partial}{\partial t} W$ nimmt ein Teilchen mit Ladung q und Masse m im statischen elektromagnetischen Feld auf?

Lösung

Es gilt

$$dW = \vec{F} \circ d\vec{r} = (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) \circ d\vec{r} ,$$

woraus unmittelbar

$$\frac{\partial W}{\partial t} = (q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}) \circ \vec{v} = q\vec{v} \circ \vec{E}$$

folgt, da $\vec{v} \times \vec{B}$ senkrecht auf \vec{v} steht.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie unter der Annahme homogener, linearer Materie, dass der Zusammenhang zwischen dem elektrischen Potenzial ϕ_{el} und der Raumladungsdichte in Coulomb-Eichung gerade dem statischen Fall entspricht.

Lösung

Einsetzen von $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ in die Maxwell-Gleichung

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1)$$

führt zu

$$\nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 . \quad (2)$$

Damit existiert ein elektrisches Potential

$$\nabla \phi_{\text{el}} = - \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) , \quad (3)$$

denn dann ist $\nabla \times \nabla \phi = 0$, wobei ϕ ein beliebiges, skalares Feld sei, auf jeden Fall erfüllt.

Umstellen nach dem elektrischen Feld führt nun zu

$$\vec{E} = -\nabla \phi_{\text{el}} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} . \quad (4)$$

Einsetzen in die Maxwell-Gleichung $\nabla \circ \vec{D} = \rho$ führt nun zu

$$\Delta \phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \circ \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon \epsilon_0} . \quad (5)$$

Wenn der zweite Term auf der linken Seite Null wird, geht die Gleichung in die aus der Statik bekannte Gleichung für das elektrische Potential über. Dies ist die Coulomb-Eichung.

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Eine Punktladung mit Ladung q befinde sich im Ursprung. Eine dünne, geerdete, leitfähige Platte schneide die x -Achse bei $x = a$ und habe den Normalenvektor $\vec{n} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{3}$. Berechnen Sie die Verteilung der elektrischen Feldstärke im gesamten Raum.

Lösung

Die Hessesche Normalform einer Ebene lautet

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 ,$$

wobei \vec{n} der Normalenvektor der Ebene und \vec{r}_0 ein beliebiger Aufpunkt ist.

Der Normalenvektor sowie ein Aufpunkt sind direkt in der Aufgabenstellung gegeben:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)/\sqrt{3} & \text{sowie} \\ \vec{r}_0 &= a\vec{e}_x . \end{aligned} \tag{6}$$

Der Abstand des Ursprungs $\vec{p} = \vec{0}$ von der Ebene in Richtung der Normalen lässt sich nun einfach mit

$$d = |(\vec{p} - \vec{r}_0)\vec{n}| = \frac{a}{\sqrt{3}} \tag{7}$$

berechnen.

Die Spiegelladung muss daher beim doppelten Abstand vom Ursprung in Normalenrichtung und somit bei $(x, y, z) = \frac{2a}{3}(1,1,1)$ liegen und hat die Ladung $-q$. Es folgt für das elektrische Feld im gesamten Raum:

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 & \text{für } \vec{r} \circ \vec{n} - d \geq 0 \\ \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} - \frac{\vec{r} - \frac{2a}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)}{\left| \vec{r} - \frac{2a}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \right|^3} \right) & \text{für } \vec{r} \circ \vec{n} - d \leq 0 . \end{cases} \tag{8}$$

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Eine dünne Kreisscheibe mit Radius a befindet sich im freien Raum und trägt im Bereich $a/10 \leq \rho \leq a$ die Ladungsdichte $\varrho = \varrho_0(a/\rho)^2$, wobei ρ der Abstand zur Scheibenachse ist. Die Scheibe rotiert um ihre Achse mit der Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_n$ mit \vec{e}_n als Normalenvektor der Kreisscheibe. Berechnen Sie die magnetische Induktion auf der Achse.

Hinweise:

- Die Achse verläuft senkrecht zur Kreisscheibe durch deren Mittelpunkt.
- $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$

Lösung

Wir legen zur Lösung der Aufgabe die Scheibe so, dass sie in der x-y-Ebene liegt und die Mittelpunktschse gerade der z-Achse entspricht. Aus der rotierenden, geladenen Scheibe lässt sich mit $\vec{j} = \varrho \vec{v}$ eine Stromdichte berechnen, aus welcher dann mit Hilfe von Biot-Savart die magnetische Induktion auf der z-Achse berechnen lässt.

Die Parametrisierung der Ladungsdichte liefert in Zylinderkoordinaten

$$\varrho\{\rho\} = \varrho_0 \frac{a^2}{\rho^2} \delta\{z\} \left(\Theta \left\{ \frac{10\rho}{a} - 1 \right\} - \Theta \left\{ \frac{\rho}{a} - 1 \right\} \right), \quad (9)$$

woraus sich mit $\vec{j} = \varrho \vec{v}$ und $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega \rho \vec{e}_\phi$ für die Stromdichte

$$\vec{j}\{\rho\} = \frac{\varrho_0 a^2 \omega}{\rho} \delta\{z\} \left(\Theta \left\{ \frac{10\rho}{a} - 1 \right\} - \Theta \left\{ \frac{\rho}{a} - 1 \right\} \right) \vec{e}_\phi \quad (10)$$

ergibt.

Einsetzen in Biot-Savart führt zu

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \varrho_0 a^2 \omega}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} \delta\{z\} \left(\Theta \left\{ \frac{10\rho}{a} - 1 \right\} - \Theta \left\{ \frac{\rho}{a} - 1 \right\} \right) \frac{\vec{e}_{\phi'} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \cdot d\phi' d\rho' dz' \quad (11)$$

In dem hier vorliegenden Fall von Quellpunkten in der Ebene $z = 0$ und Aufpunkten auf der z-Achse ergibt sich $\vec{r} = z \vec{e}_z$ sowie $\vec{r}' = \rho' \vec{e}_{\rho'}$ und damit

$$\vec{r} - \vec{r}' = z \vec{e}_z - \rho' \vec{e}_{\rho'} \quad (12)$$

sowie

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{z^2 + \rho'^2}. \quad (13)$$

Einsetzen dieser Beziehungen und Ausführen der z' -Integration liefert

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \varrho_0 a^2 \omega}{4\pi} \int_{a/10}^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho' \vec{e}_z + z \vec{e}_{\rho'}}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} d\phi' d\rho' \quad (14)$$

Die Integration über ϕ sorgt nun dafür, dass die ρ -Komponente des \vec{B} -Feldes verschwindet, da $\vec{e}_\rho = \cos\{\phi\}\vec{e}_x + \sin\{\phi\}\vec{e}_y$ ist und Cosinus und Sinus dann je über eine volle Periode integriert werden. Es ergibt sich

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \varrho_0 a^2 \omega}{2} \int_{a/10}^a \frac{\rho' \vec{e}_z}{(\rho'^2 + z^2)^{3/2}} d\rho' \quad (15)$$

und daraus mit der Ausführung der letzten Integration

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \varrho_0 a^2 \omega \vec{e}_z}{2} \left[\frac{-1}{(\rho'^2 + z^2)^{1/2}} \right]_{a/10}^a = \frac{\mu_0 \varrho_0 a^2 \omega \vec{e}_z}{2} \left(\frac{1}{\left(\left(\frac{a}{10}\right)^2 + z^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{(a^2 + z^2)^{1/2}} \right). \quad (16)$$

für die magnetische Induktion auf der z -Achse.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Ein ideal leitfähiger Stab (Innenelektrode) mit kreisförmigem Querschnitt vom Radius a ist unendlich lang und konzentrisch von einer geerdeten Außenelektrode mit Radius b umgeben. Auf der Innenelektrode befindet sich die homogene Flächenladungsdichte ϱ_0 . Welche Spannung stellt sich zwischen den Elektroden ein?

Lösung

Im Raum zwischen den Elektroden gilt die Laplacegleichung. Bei dem vorliegenden Problem kann von Zylindersymmetrie ausgegangen werden, also resultiert

$$\Delta V = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} V \right) = 0$$

mit der Lösung

$$V = c_1 \ln\{\rho\} + c_2$$

Bei $\rho = b$ verschwindet das Potenzial, also ist $c_2 = -c_1 \ln\{b\}$ und entsprechend

$$V = c_1 \ln \left\{ \frac{\rho}{b} \right\}$$

Auf der Innenelektrode gilt die Stetigkeitsbedingung

$$\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \varrho_S$$

mit Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_\rho$. Wegen $\vec{D} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} V = -\varepsilon_0 c_1 \frac{1}{\rho} \vec{e}_\rho$ resultiert

$$c_1 = -\frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} a$$

und damit die Spannung

$$U = V\{b\} - V\{a\} = \frac{\varrho_0}{\varepsilon_0} a \ln \left\{ \frac{a}{b} \right\}$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

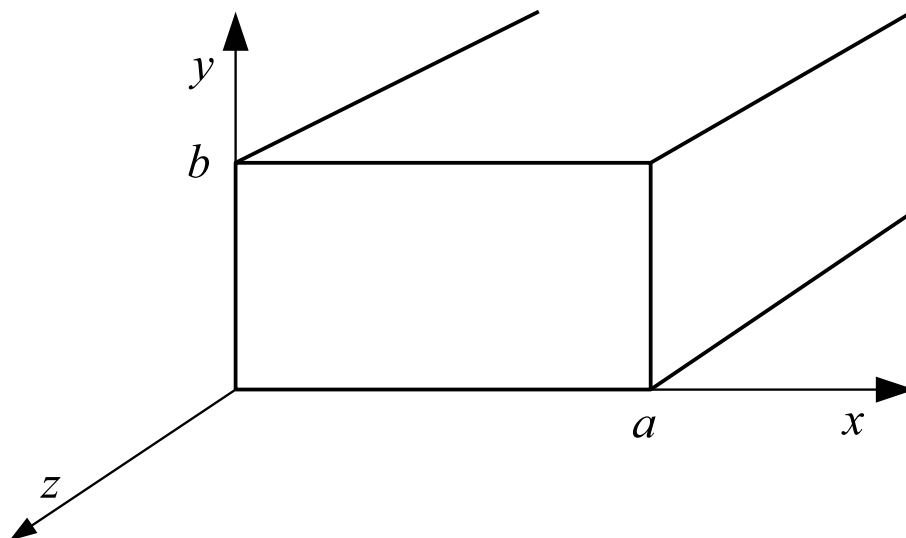


Abbildung 1: Anordnung des Rechteckhohlleiters mit metallischer Berandung im Koordinatensystem. Es gilt $b < a$.

Die elektrische Feldstärke in einem Rechteckhohlleiter mit Anordnung gemäß Abbildung 1 wird durch Überlagerung von unendlich vielen Wellen entsprechend

$$\vec{E} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} E_{m,n} \sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \exp\{i(\beta_{m,n}z - \omega t)\} \vec{e}_x$$

beschrieben. Wie groß muss ω mindestens sein, damit sich mindestens eine der beteiligten Wellen verlustfrei im Hohlleiter ausbreitet? Wie groß darf sie höchstens sein, damit sich nur eine Welle verlustfrei ausbreitet?

Lösung

Aus der Wellengleichung resultiert für die einzelnen Wellen die Dispersionsrelation

$$\left(m\pi\frac{1}{a}\right)^2 + \left(n\pi\frac{1}{b}\right)^2 + \beta_{m,n}^2 = \omega^2\epsilon_0\mu_0$$

mit $m > 0$ und $n > 0$, sonst verschwindet das Feld. Verlustfreie Ausbreitung verlangt, dass die Feldstärke nicht abnimmt, also

$$\beta_{m,n} \in \mathbb{R} \quad |\beta_{m,n}| \geq 0$$

Aus der Dispersionsrelation folgt damit

$$\omega^2 \varepsilon_0 \mu_0 \geq \omega_{m,n}^2 \varepsilon_0 \mu_0 = \left(m\pi \frac{1}{a}\right)^2 + \left(m\pi \frac{1}{b}\right)^2$$

Das Minimum ist für $m = n = 1$ bei

$$\omega_{1,1}^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\left(\pi \frac{1}{a}\right)^2 + \left(\pi \frac{1}{b}\right)^2 \right)$$

Die nächste Welle wäre mit $(m, n) \in \{(1,2), (2,1)\}$ zu nehmen. Gemäß Skizze ist $a > b$ und somit die Grenze zur verlustlosen Ausbreitung der nächsten Welle für $m = 2, n = 1$ bei

$$\omega_{2,1}^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \left(\left(\pi \frac{2}{a}\right)^2 + \left(\pi \frac{1}{b}\right)^2 \right)$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Ein infinitesimal dünnes, gerades, unendlich langes Leiterband der Breite $2a$ trägt quer zu seiner Längsachse die homogene Flächenstromdichte j_0 . Wie lautet die magnetische Induktion im umgebenden freien Raum?

Tipp: Führen Sie die Integration in Achsenrichtung als erstes aus.

Lösung

Das Koordinatensystem wird so gewählt, dass die Bandachse in z -Richtung verläuft. Das Band soll in der x - z -Ebene im Bereich $-a \leq x \leq a$ liegen. Der Strom wird mit $\vec{j} = j_0 \delta\{y\} \vec{e}_x$ festgelegt. Nun resultiert aus dem Biot-Savart-Gesetz die magnetische Induktion zu

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{j \{\vec{r}'\} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} d^3 r' \\ &= \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{e}_x \times ((x-x')\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-z')\vec{e}_z)}{((x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2)^{3/2}} dz' dx' \\ &= \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{+y\vec{e}_z - (z-z')\vec{e}_y}{((x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2)^{3/2}} dz' dx' \end{aligned}$$

Für die y -Komponente resultiert mit Gleichung (20) aus den Hinweisen

$$\begin{aligned} \vec{B} \circ \vec{e}_y &= -\frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(z-z')}{((x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2)^{3/2}} dz' dx' \\ &= -\frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{-a}^a \left[\frac{-1}{((x-x')^2 + y^2 + (z-z')^2)^{1/2}} \right]_{-\infty}^{\infty} dx' = 0 \end{aligned}$$

Für die z -Komponente wird (18) und (25) herangezogen. Mit den Substitutionen $t = z - z'$ bzw. $s = x - x'$ resultiert

$$\begin{aligned} \vec{B} \vec{e}_z &= \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{x-a}^{x+a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{y}{(s^2 + y^2 + t^2)^{3/2}} dt ds = \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \int_{x-a}^{x+a} \left[\frac{y}{s^2 + y^2} \underbrace{\frac{t}{(s^2 + y^2 + t^2)^{1/2}}}_2 \right]_{-\infty}^{\infty} ds \\ &= \frac{\mu_0 j_0}{2\pi} \left[\arctan \left\{ \frac{s}{y} \right\} \right]_{x-a}^{x+a} = \frac{\mu_0 j_0}{2\pi} \left(\arctan \left\{ \frac{x+a}{y} \right\} - \arctan \left\{ \frac{x-a}{y} \right\} \right) \end{aligned}$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Die ebene Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien liegt bei $x = 20\lambda$. Die Brechzahlen sind 2,5 im Bereich $x < 20\lambda$ und 3 im anderen Medium. Aus dem Bereich $x > 20\lambda$ fällt eine TE-Welle mit elektrischer Feldstärke E_0 und der Vakuumwellenlänge λ unter dem Winkel $\pi/6$ auf die Grenzfläche. Wie lautet die magnetische Feldstärke in der Ebene $x = 0$?

Lösung

Für die beteiligten Wellen wird der Ansatz

$$\vec{E} = E_0 \exp\{i(\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

verwendet.

Da die Grenzfläche bei $x = x_0 = 20\lambda$ liegt, ist der Normalenvektor parallel zu \vec{e}_x . Die Welle läuft rückwärts in x -Richtung, also ist $\vec{n} = -\vec{e}_x$. Gemäß Aufgabenstellung ist

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = n_1 k_0 \cos\{\theta_{\text{in}}\} = 3k_0 \frac{1}{2} \sqrt{3} = 1,5\sqrt{3}k_0$$

und

$$\|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\| = n_1 k_0 \sin\{\theta_{\text{in}}\} = 1,5$$

und somit

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_0^2 n_{\text{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}\|^2} = 2k_0$$

Der Transmissionsfaktor resultiert nun zu

$$t_{\text{TE}} = \frac{2\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}}{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} + \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}} = \frac{3\sqrt{3}}{1,5\sqrt{3} + 2}$$

Damit lässt sich das Verhältnis der Feldamplituden der transmittierten Welle und der einfallenden Welle an der Grenzfläche beschreiben. Das Problem besteht darin, dass der Ursprung des Koordinatensystems nicht auf der Grenzfläche liegt. Somit müssen die Feldamplituden der beteiligten Wellen dort erstmal ausgedrückt werden. Unter Verwendung von

$$\vec{k} = (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{k}) \times \vec{n}$$

mit $\vec{k}_{\text{p}} = (\vec{n} \times \vec{k}_{\text{in}}) \times \vec{n}$ resultiert zunächst

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = E_0 \exp\{i((\vec{n} \circ \vec{k})\vec{n} + \vec{k}_{\text{p}}) \circ \vec{r} - \omega t\} = E_0 \exp\{i(\vec{n} \circ \vec{k})(\vec{n} \circ \vec{r})\} \exp\{i(\vec{k}_{\text{p}} \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

und an der Grenzfläche $\vec{n} \circ \vec{r} = \vec{n} \circ \vec{r}_0 = 20\lambda$

$$\vec{E}\{\vec{r}_0\} = \vec{E}_0 \exp\{i(\vec{n} \circ \vec{k})20\lambda\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\}$$

Hier ist die zweite exp-Funktion wegen des Snellius-Gesetzes für alle beteiligten Wellen gleich groß und es resultiert

$$E_{0\text{tr}}^{\vec{r}} \exp\{i(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})20\lambda\} = t_{\text{TE}} E_{0\text{in}}^{\vec{r}} \exp\{i(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})20\lambda\}$$

und damit die elektrische Feldstärke in der Ebene $x = 0$

$$\begin{aligned} E_{0\text{tr}}^{\vec{r}} &= t_{\text{TE}} E_{0\text{in}}^{\vec{r}} \exp\{i(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})20\lambda\} \exp\{-i(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})20\lambda\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\} \\ &= t_{\text{TE}} E_{0\text{in}}^{\vec{r}} \exp\{i(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} - \vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})20\lambda\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\} \\ &= t_{\text{TE}} E_{0\text{in}}^{\vec{r}} \exp\{i(1,5\sqrt{3} - 2)k_0 20\lambda\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\} \\ &= t_{\text{TE}} E_{0\text{in}}^{\vec{r}} \exp\{i(1,5\sqrt{3} - 2)40\pi\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\} \\ &= t_{\text{TE}} E_{0\text{in}}^{\vec{r}} \exp\{i60\sqrt{3}\pi\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\} \end{aligned}$$

Die zugehörige magnetische Feldstärke resultiert einfach aus

$$\vec{H}_{\text{tr}} = \frac{1}{\omega\mu_0} (\vec{k}_{\text{tr}} \times \vec{E}_{\text{tr}}) = \frac{t_{\text{TE}}}{\omega\mu_0} (\vec{k}_{\text{tr}} \times \vec{E}_{0\text{in}}^{\vec{r}}) \exp\{i60\sqrt{3}\pi\} \exp\{i(\vec{k}_p \circ \vec{r} - \omega t)\} \quad ,$$

was ohne weitere Angaben hinsichtlich der Richtung von $\vec{E}_{\text{in}}^{\vec{r}}$ bzw. $\vec{k}_{\text{in}}^{\vec{r}}$ nicht weiter ausgewertet werden kann.

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{a} \arctan \left\{ \frac{t}{a} \right\} \quad (17)$$

$$\int \frac{t}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{t}{a} \right\} \quad (18)$$

$$\int \frac{t^2}{a^2 + t^2} dt = t - \arctan \left\{ \frac{t}{a} \right\} \quad (19)$$

$$\int \frac{t^3}{a^2 + t^2} dt = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \{a^2 + t^2\} \quad (20)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \ln \{t + \sqrt{a^2 + t^2}\} \quad (21)$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \sqrt{a^2 + t^2} \quad (22)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{t}{2} \sqrt{a^2 + t^2} + \frac{a^2}{2} \ln \{t + \sqrt{a^2 + t^2}\} \quad (23)$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{\sqrt{a^2 + t^2}^3}{3} - a^2 \sqrt{a^2 + t^2} \quad (24)$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{-1}{a} \ln \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2 + t^2}}{t} \right\} \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{-\sqrt{a^2 + t^2}}{a^2 t} \quad (26)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{t}{a^2 \sqrt{a^2 + t^2}} \quad (27)$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + t^2}} \quad (28)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{-t}{\sqrt{a^2 + t^2}} + \ln \{t + \sqrt{a^2 + t^2}\} \quad (29)$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \sqrt{a^2 + t^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} \quad (30)$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 + t^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2 + t^2}}{t} \right\} \quad (31)$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{-1}{a^4} \left(\frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{t} + \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right) \quad (32)$$