Aufgabe 1 (8 Punkte)

Eine Linienladung mit homogener Ladungsdichte ϱ_L liege auf der $z-$Achse des freien Raums. Eine dünne, geerdete Metallplatte schneidet die $x-$Achse bei a, die $y-$Achse bei $b > a$ und die $z-$Achse im Unendlichen. Eine dielektrische Kugel mit Radius a und relativer Dielektrizitätskonstante ε liege am Ort $(2a, 2b, 0)$. Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Lösung

Zur Lösung dieser Aufgabe ist es notwendig, die Linienladung an der Platte zu spiegeln. Dies lässt sich entweder geometrisch mit Hilfe eines Drachens, oder aber durch die saubere Parametrisierung der Ebene in der Hesseschen Normalform lösen. Hier wählen wir die zweite Variante. Die Hessesche Normalform einer Ebene lautet

$$\vec{n}(\vec{r} - \vec{r}_0) = 0 \ ,$$

wobei $\vec{n}$ der Normalenvektor der Ebene und $\vec{r}_0$ ein beliebiger Aufpunkt ist.
Den Normalenvektor erhalten wir durch das Kreuzprodukt zweier Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$, welche in der Ebene liegen, und anschließendes normieren. Da die Ebene parallel zur z-Achse liegt kann $\vec{v_1} = \vec{e}_z$ gewählt werden, für $\vec{v_2}$ nehmen wir einfach die Differenz der beiden Vektoren, welche auf die Schnittpunkte der Ebene mit dem Koordinatensystem zeigen, also $\vec{v}_2 = a\vec{e}_x - b\vec{e}_y$. Es ergibt sich $\vec{v_1} \times \vec{v_2} = a\vec{e}_y + b\vec{e}_x$ und nach normieren

$$\vec{n} = \frac{a\vec{e}_y + b\vec{e}_x}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ . \tag{1}$$

Als Aufpunkt der Ebene wählen wir einen der beiden Schnittpunkte, zum Beispiel $\vec{r}_0 = a\vec{e}_x$.
Der Abstand des Ursprungs $\vec{p} = \vec{0}$ von der Ebene in Richtung der Normalen lässt sich nun einfach mit

$$d = |(\vec{p} - \vec{r}_0)\vec{n}| = \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \tag{2}$$

berechnen.
Die gespiegelte Linienladung muss beim doppelten Abstand vom Ursprung in Normalenrichtung und somit bei

$$\vec{r}_\mathrm{SL} = \frac{2a^2b\vec{e}_y + 2b^2a\vec{e}_x}{a^2 + b^2} \tag{3}$$

liegen und hat die homogene Ladungsdichte $\varrho_\mathrm{SL} = -\varrho_\mathrm{L}$.
Die gespiegelte Ladung ist nur ein Hilfsmittel, um die auf der Platte influenzierte Ladung zu berechnen, welche zu einem Feld führt, welches senkrecht auf der Platte steht. Durch diese Influenzladung schirmt die Platte den von der Linienladung abgewandte Halbraum ab und

dieser ist feldfrei. Die dielektrische Kugel spielt somit für die Berechnung überhaupt keine Rolle .
Das Feld einer homogenen Linienladung ist durch

$$\vec{E} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0 \rho}\vec{e}_\rho = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2+y^2} \tag{4}$$

gegeben, was zu dem Feld

$$\vec{E} = \begin{cases} 0 \quad \text{für} \quad \vec{r}\circ\vec{n} - d \geq 0 \\ \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x\vec{e}_x+y\vec{e}_y}{x^2+y^2} - \frac{\left(x-\frac{2b^2a}{a^2+b^2}\right)\vec{e}_x+\left(y-\frac{2ba^2}{a^2+b^2}\right)\vec{e}_y}{\left(x-\frac{2b^2a}{a^2+b^2}\right)^2+\left(y-\frac{2ba^2}{a^2+b^2}\right)^2} \quad \text{für} \quad \vec{r}\circ\vec{n} - d \leq 0\right) \end{cases} \tag{5}$$

im gesamten Raum führt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den Übergang von einem optisch dichteren, unmagnetischen Medium in ein optisch dünneres, unmagnetisches Medium der Brewsterwinkel immer kleiner gleich dem Grenzwinkel der Totalreflexion ist.

Lösung

Der Brewsterwinkel bei zwei unmagnetischen Materialien ist durch

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1} \tag{6}$$

gegeben, der Grenzwinkel der Totalreflexion durch

$$\sin\theta_C = \frac{n_2}{n_1} \ . \tag{7}$$

Es folgt unmittelbar

$$\sin\theta_C = \tan\theta_B = \frac{\sin\theta_B}{\cos\theta_B} \ . \tag{8}$$

Da der Cosinus immer kleiner gleich 1 ist folgt

$$\sin\theta_C \geq \sin\theta_B \tag{9}$$

und daraus

$$\theta_C \geq \theta_B \ . \tag{10}$$

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Ein einfach ionisiertes Heliumatom ($m \approx 6{,}64 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$, $q \approx 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C}$) befindet sich zunächst ruhend bei $\vec{r} = (-1\,\mathrm{cm})\vec{e}_z$. Von dort aus wird es über eine Spannungsdifferenz von $U = 200\,\mathrm{V}$ nach $\vec{r} = 0$ beschleunigt und trifft dort auf ein homogenes Magnetfeld $\vec{B} = (100\,\mathrm{mT})\vec{e}_x$, welches sich auf den Bereich $-10\,\mathrm{cm} \le x \le 10\,\mathrm{cm}$, $-10\,\mathrm{cm} \le y \le 10\,\mathrm{cm}$ und $0\,\mathrm{cm} \le z \le 20\,\mathrm{cm}$ beschränkt.
An welchem Ort verlässt das Teilchen das Magnetfeld wieder? Schätzen Sie das Ergebnis mit den gegebenen Zahlenwerten ab.
Hinweise:

- Was bedeutet es für den Betrag der Geschwindigkeit und somit für die Bahn des Teilchens, dass das Magnetfeld immer senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor steht?
- Zentripetalkraft: $|F_z| = \frac{mv^2}{r}$

Lösung

Die Geschwindigkeit des Heliumatoms ergibt sich aus der kinetischen Energie:

$$qU = E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \; . \tag{11}$$

Dabei spielt die Strecke, über die das Teilchen beschleunigt wird, keine Rolle. Einsetzen der Zahlenwerte führt zu:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 200}{6{,}64 \cdot 10^{-27}} \frac{\mathrm{AsV}}{\mathrm{kg}}} = \underbrace{\sqrt{\frac{6{,}4}{6{,}64}}}_{\approx 1} \underbrace{\sqrt{\frac{10^{-17}}{10^{-27}}}}_{=10^5} \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 10^5 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \; . \tag{12}$$

Da das Magnetfeld immer senkrecht zum Geschwindigkeitsvektor steht greift auch die Lorentzkraft senkrecht zu diesem an, wobei der Betrag der Geschwindigkeit konstant bleibt und das Teilchen somit eine Kreisbahn beschreibt. Der Radius dieser lässt sich durch Gleichsetzen von Lorentz- und Zentripetalkraft bestimmen:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \Rightarrow r = \frac{mv}{qB} \tag{13}$$

Einsetzen der Zahlenwerte gibt hier:

$$r = \underbrace{\frac{6{,}64}{1{,}6}}_{\approx 4} \underbrace{\frac{10^{-27} \cdot 10^5}{10^{-19} \cdot 0{,}1}}_{=\frac{10^{-22}}{10^{-20}}=0{,}01} \frac{\mathrm{kg\,m}}{\mathrm{A\,s^2\,T}} = 0{,}04\,\mathrm{m} = 4\,\mathrm{cm} \; . \tag{14}$$

Das Heliumatom beschreibt also eine Kreisbahn mit dem Radius 4 cm, muss also das Magnetfeld bei 8 cm auf der gleichen Seite, in der es eingetreten ist, wieder verlassen. Unter Zuhilfenahme der Rechte-Hand-Regel ergibt sich, dass dieser Punkt außerdem in y-Richtung liegen muss, da das Magnetfeld in $\vec{e}_x$- und die Geschwindigkeit in $\vec{e}_z$-Richtung zeigt (das Ion ist positiv geladen, da ihm ein Elektron fehlt). Der Ort des Austritts ist also:

$$\vec{r} = 8\,\mathrm{cm}\,\vec{e}_y \tag{15}$$

Aufgabe 4 (8 Punkte)

Leiten Sie ausgehend von den Maxwell-Gleichungen in Materie unter der Annahme homogener, linearer, verlustloser Materie **zwei** Wellengleichungen her, welche nur noch das dynamische elektrische Potential Φ_{el}, das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ sowie Strom- und Ladungsdichten enthalten. Zeigen Sie darauf folgend, dass diese beiden Gleichungen im Fall der Lorentz-Eichung in zwei Wellengleichungen, eine für das elektrische Potential und eine für das magnetische Vektorpotential, entkoppeln.

Lösung

In der Dynamik lautet das elektrische Feld

$$\vec{E} = -\nabla\Phi_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\ , \tag{16}$$

die magnetische Induktion lautet wie in der Statik

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}\ . \tag{17}$$

Für die erste Gleichung ersetzen wir $\vec{E}$ im Gaußsche Gesetz mit Gleichung (16):

$$\nabla \circ \vec{E} = \nabla \circ \left(-\nabla\Phi_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) = \frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \Rightarrow \Delta\Phi_{\mathrm{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\nabla \circ \vec{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0}\ . \tag{18}$$

Für die zweite Gleichung ersetzen wir im erweiterten Durchflutungsgesetz $\vec{E}$ und $\vec{B}$ mit den Gleichungen (16) und (17):

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \mu\mu_0\vec{j} \Rightarrow \\ \nabla \times \nabla \times \vec{A} &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\nabla\Phi_{\mathrm{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) + \mu\mu_0\vec{j} \end{aligned} \tag{19}$$

Ausführen des doppelten Kreuzprodukts und Umsortieren führt schließlich zu

$$-\Delta A + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} + \nabla\left(\nabla \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}}\right) = \mu\mu_0\vec{j} \tag{20}$$

In der Lorentz-Eichung wird die Eichfunktion so gewählt, dass der Ausdruck in der Klammer in Gleichung (20) verschwindet. Diese hängt somit nicht mehr von Φ_{el} ab . In Gleichung (18) wird $\nabla \circ \vec{A}$ mit $-\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}}$ ersetzt, was zu

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{21}$$

führt . Diese Gleichung hängt dann nur noch von Φ_{el} und nicht mehr von $\vec{A}$ ab. Somit sind die beiden Wellengleichungen in Lorentz-Eichung entkoppelt.

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Eine Punktladung der Stärke Q befindet sich im Ursprung vor einer ideal leitfähigen Metallplatte, die durch $x + y = 2\,\mathrm{cm}$ beschrieben wird. Wie groß ist die elektrische Feldstärke im ansonsten freien Raum an der Stelle $(-1,\ 0,\ 0)\,\mathrm{cm}$?

Lösung

Die Grenzfläche kann in die Gleichung $x + y - 2\,\mathrm{cm} = 0$ überführt werden. Ein Vergleich mit der Hesseschen Normalenform $\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r_0})$ führt auf

$$c\vec{n} = \vec{e}_x + \vec{e}_y$$

Mit $c = \sqrt{2}$ resultiert der Normalenvektor

$$\vec{n} = (\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}$$

und $\vec{n} \circ \vec{r_0} = -2\,\mathrm{cm}/c = -(2/\sqrt{2})\,\mathrm{cm}$. Die Ladung am Punkt $\vec{r_Q} = (0{,}0{,}0)^T\mathrm{cm}$ hat den Abstand

$$d = \vec{n} \circ (\vec{r_Q} - \vec{r_0}) = -2/\sqrt{2}\mathrm{cm}$$

Für die Berechnung des Feldes „vor" der Platte muss die Ladung an der Platte gespiegelt werden. Die Spiegelladung befindet sich dann gemäß Abbildung 1 bei

$$\vec{r_{Q'}} = \vec{r_Q} - 2d\vec{n} = (0 - (-2 \cdot 2/\sqrt{2}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)/\sqrt{2}))\,\mathrm{cm} = 2(\vec{e}_x + \vec{e}_y)\,\mathrm{cm}$$

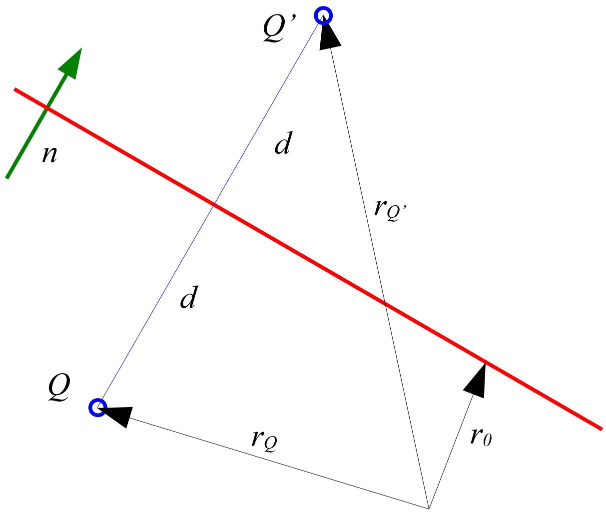

Abbildung 1: Spiegelung einer Punktladung an einer Ebene

Somit wird am Ort $(-1{,}0{,}0)^T$cm das elektrische Feld

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\vec{e}_x - \frac{-3\vec{e}_x - 2\vec{e}_y}{\sqrt{13}^3}\right)\frac{1}{\mathrm{cm}^2}$$

erzeugt.

Aufgabe 6 (12 Punkte)

Zwei mit jeweils dem gleichen Strom I durchflossene Linienleiter sind wie in Abbildung 2 angeordnet. Welche Kraft wirkt auf den Leiter mit Länge L?

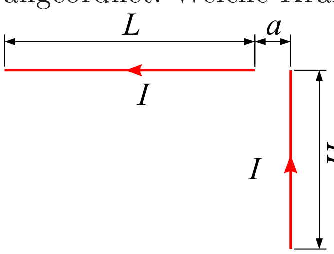

Abbildung 2: T-förmige Anordnung zweier Linienströme mit Stromdichte I.

Lösung

Für die Berechnung der gesuchten Kraft wird das Koordinatensystem gemäß Abbildung 3 festgelegt. Damit lautet die Stromdichte im senkrechten Stromfaden

$$\vec{j}_1 = I\delta\{x\}\delta\{z\}\vec{e}_y \cdot \begin{cases} 1 & -H \leq y \leq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

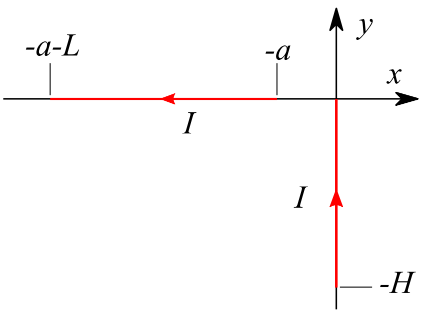

Abbildung 3: Festlegung des Koordinatensystems zur Berechnung der Kraft auf den waagerechten Stromfaden.

Das zugehörige Magnetfeld ergibt sich zu

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-H}^{0} \frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{(x^2 + (y-y')^2 + z^2)^{3/2}}\, \mathrm{d}y' \quad \text{mit (32)} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{x^2 + z^2} \left[\frac{-t}{\sqrt{x^2 + t^2 + z^2}} \right]_{y+H}^{y} \\
&= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{z\vec{e}_x - x\vec{e}_z}{x^2 + z^2} \left(\frac{y+H}{\sqrt{x^2 + (y+H)^2 + z^2}} - \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)
\end{aligned}$$

Für die Kraft auf den waagerechten Stromfaden muss das Magnetfeld des senkrechten Stromfaden dort genommen werden, also für $y = z = 0$:

$$\vec{B}\{\text{Stromfaden}\} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{-x\vec{e}_z}{x^2} \frac{H}{\sqrt{x^2 + H^2}} = \frac{\mu_0 I H}{4\pi} \frac{-\vec{e}_z}{x\sqrt{x^2 + H^2}}$$

Die Kraft auf den waagerechten Stromfaden folgt aus

$$\mathrm{d}\vec{F} = I\, \mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B}$$

mit $\mathrm{d}\vec{\ell} = \mathrm{d}x\vec{e}_x$ und $x \in [-a, -(a+L)]$ zu

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \int_{-a}^{-(a+L)} I(\vec{e}_x \times \vec{e}_z) \frac{\mu_0 I H}{4\pi} \frac{-1}{x\sqrt{x^2 + H^2}}\, \mathrm{d}x \quad \text{mit (30)} \\
&= -\vec{e}_y \frac{\mu_0 I^2 H}{4\pi} \left[\frac{1}{H} \ln\left\{ \frac{H + \sqrt{H^2 + x^2}}{x} \right\} \right]_{-a}^{-(a+L)} \\
&= -\vec{e}_y \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \left[\ln\left\{ \frac{a}{a+L} \frac{H + \sqrt{H^2 + (a+L)^2}}{H + \sqrt{H^2 + a^2}} \right\} \right]
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

In einer ebenen, unendlich ausgedehnten, ideal leitfähigen, geerdeten Metallplatte befindet sich ein rechteckiges Loch der Tiefe t. Die Mitte des Lochs fällt mit der z-Achse zusammen, die Ausdehnung in x-Richtung ist a und in y-Richtung b. Die Oberfläche der Platte ist bei $z = 0$. Als Ansatz für das elektrostatische Potenzial im Loch wird

$$V = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{m,n} \sin\{k_x\{m\}x\} \sin\{k_y\{n\}y\} \sinh\{k_z(z - z_0)\}$$

herangezogen. Wie müssen die Koeffizienten k_x, k_y, k_z und z_0 gewählt werden, so dass alle Randbedingungen und die Laplacegleichung erfüllt sind?

Lösung

Zunächst müssen die Randbedingungen an den Lochgrenzen betrachtet werden. Hier ist jeweils das Potenzial stetig und muss 0 werden. Also gilt beispielsweise für die x-Richtung

$$\sin\{k_x\{m\}x\}|_{x=\pm a/2} = 0$$

Das lässt sich nur erfüllen, wenn

$$\pm k_x\{m\}a/2 = \pm m\pi \longrightarrow k_x\{m\} = m\frac{2\pi}{a}$$

wird. Entsprechend gilt

$$\pm k_y\{n\}b/2 = \pm m\pi \longrightarrow k_y\{n\} = n\frac{2\pi}{b}$$

Auch bei $z = -t$ muss das Potenzial verschwinden. Aus $\sinh\{k_z(z - z_0)\}|_{z=t} = 0$ resultiert dann $z_0 = t$.

Anwenden der Laplacegleichung führt auf die Dispersionsrelation

$$k_x^2 + k_y^2 - k_z^2 = 0$$

Damit resultiert aus den bekannten Werten für k_x und k_y

$$k_z = 2\pi\sqrt{(\frac{m}{a})^2 + (\frac{n}{b})^2}$$

Aufgabe 8 (2 Punkte)

Wie ist die Welle

$$\vec{H} = H_0 \left(\exp\{i(\beta z + \omega t - \pi/4)\}\vec{e}_x - 0{,}5 \exp\{i(\beta z + \omega t + 3\pi/4)\}\vec{e}_y\right)$$

polarisiert?

Lösung

Mit ausklammern des ersten exp-Terms resultiert

$$\vec{H} = H_0 \exp\{i(\beta z + \omega t - \pi/4)\}(\vec{e}_x - 0{,}5 \exp\{i(\pi)\}\vec{e}_y) = H_0 \exp\{i(\beta z + \omega t - \pi/4)\}(\vec{e}_x + 0{,}5\vec{e}_y)$$

Das ist eine linear polarisierte Welle, weil die Phasenverschiebung zwischen dem beiden enthaltenen Raumrichtungen gerade ein Vielfaches von π ist.

Aufgabe 9 (2 Punkte)

Eine ebene Welle fällt unter dem Brewsterwinkel auf die Grenzfläche zwischen zwei unmagnetischen Medien. Die Welle bewegt sich im Medium mit Brechzahl n_1, im angrenzenden Medium herrscht die Brechzahl n_2. Wie groß ist der Reflexionsfaktor des TE-Anteils?

Lösung

Wenn die Welle unter dem Brewster-Winkel auf die Grenzfläche trifft, wird der TM-Reflexionsfaktor Null. Das bedeutet

$$\frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}}}{\varepsilon_1} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}}}{\varepsilon_2}$$

Der TE-Reflexionsfaktor lautet nach Einsetzen

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}} - \vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}}}{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}} + \vec{n} \circ \vec{k_{\text{tr}}}} = \frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}}(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})}{\vec{n} \circ \vec{k_{\text{in}}}(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1})} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}$$

Aufgabe 10 (8 Punkte)

Eine ebene Welle fällt auf die Grenzfläche $y = 0$. Sie bewegt sich im unmagnetischen Medium mit $\varepsilon = 2{,}5$. Im angrenzenden Medium wird die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = H_0(\vec{e}_y - \vec{e}_x)\exp\{i(k_0(x+y) - \omega t)\}$$

gemessen. Wie lautet die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle?

Lösung

Aus der magnetischen Feldstärke folgt der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle

$$\vec{k_{\text{tr}}} = k_0(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

Der Normalenvektor ist $\vec{n} = \vec{e}_y$. Die magnetische Feldstärke liegt vollständig in der Einfallsebene, die Welle ist also bezüglich der Grenzfläche TE-polarisiert. Die Tangentialkomponente des Wellenzahlvektors ist $k_0\vec{e}_x$, für die Normalkomponente resultiert $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = k_0$. Die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle ist

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = k_0\sqrt{2{,}5 - 1} = k_0\sqrt{1{,}5}$$

Die elektrische Feldstärke der transmittierten Welle lautet

$$\vec{E}_{\text{tr}} = \frac{k_0}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\text{tr}}} H_0(\vec{e}_y - \vec{e}_x) \times (\vec{e}_x + \vec{e}_y)\exp\{i(k_0(x+y) - \omega t)\} = \frac{-2H_0k_0}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\text{tr}}}\exp\{i(k_0(x+y) - \omega t)\}\vec{e}_z$$

In der Aufgabenstellung wird keine Angabe zu μ_{tr} gemacht, daher kann ε_{tr} nicht bestimmt werden. Im unmagnetischen Medium wäre es 2.
Der Transmissionsfaktor ist

$$t_{\text{TE}} = 2\frac{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}}}{\dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} + \dfrac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}}} = 2\frac{\sqrt{1{,}5}}{\sqrt{1{,}5} + \dfrac{1}{\mu_{\text{tr}}}}$$

und damit resultiert für das elektrische Feld der einfallenden Welle

$$\vec{E}_{\text{in}} = \frac{-2H_0k_0}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\text{tr}}t_{\text{TE}}}\exp\{i(k_0(x + \sqrt{1{,}5}y) - \omega t)\}\vec{e}_z$$

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{22}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{23}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{24}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{25}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{26}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{27}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{28}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{29}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{30}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2t} \tag{31}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{32}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{33}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{34}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{35}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{36}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{37}$$