Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2021-1

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$
Aufgabe 10:	Aufgabe 11:		$\sum$
			Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Leiten Sie aus den vektoriellen Zusammenhängen der Wellenzahlvektoren an einer Grenzfläche das Relexionsgesetz $\theta_{\mathrm{ref}} = \theta_{\mathrm{in}}$ sowie das Snelliussche Brechungsgesetz $n_{\mathrm{in}} \sin(\theta_{\mathrm{in}}) = n_{\mathrm{tr}} \sin(\theta_{\mathrm{tr}})$ her.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein infinitesimal dünne, kreisringförmige Scheibe mit Innenradius a und Außenradius b werde von einem kreisförmigen Strom J durchflossen, dessen Dichte antiproportional mit dem Abstand zum Mittelpunkt abfällt.

Berechnen Sie die magnetische Induktion auf der Mittelpunktachse der Scheibe.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Führen Sie für das magnetische Vektorpotential $\vec{A} = x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ eine Coulomb-Eichung durch und überprüfen Sie, dass die Eichung in Ihrem Fall keinen Einfluss auf das Ergebnis für die magnetische Induktion hat.

Hinweis: Die Eichfunktion ist nicht eindeutig. Es reicht hier, eine spezielle Lösung anzugeben.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein homogen geladener Vollzylinder mit Radius a habe ein zylinderförmiges Loch mit Radius b, welches parallel zu seiner Achse liegt. Der Rand des Loches und die Zylinderachse fallen zusammen. Der Radius des Loches sei außerdem so gewählt, dass dieses vollständig innerhalb des Zylinders liegt.

Berechnen Sie das elektrische Feld außerhalb des Zylinders.

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Gegeben sei die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = 1 \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \quad .$$

Berechnen Sie die Raumladungsverteilung, welche dieses Feld hervorruft.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die zirkular polarisierte, ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left\{ i \left(\frac{k_0}{\sqrt{3}} x + k_y y - \omega t \right) \right\} \tag{1}$$

mit einer komplexen Amplitude $\vec{E}_0$ fällt aus dem Vakuum auf die Grenzfläche $x = 0$ zu einem unmagnetischen Medium mit Dielektrizitätszahl $\varepsilon_2 = 2$.

Wie ist die reflektierte Welle polarisiert?

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung und Übung zwei verschiedene Schreibweisen für den Reflexionsfaktor einer TM-Welle kennengelernt:

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\cos\theta_{\mathrm{in}} - \frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\cos\theta_{\mathrm{in}} + \frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}$$

sowie

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}\right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}\right)} \quad .$$

Zeigen Sie deren Äquivalenz.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Gegeben ist die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E_0 \dfrac{R}{r} \vec{e}_\theta$ in Kugelkoordinaten.

Wie groß ist die Spannung zwischen den in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkten $(3a,4a,0)$ und $(0,0,7a)$?

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Ein zylindrischer Körper mit Radius R und Länge 2ℓ befindet sich im ansonsten freien Raum und trägt auf den Stirnseiten die konstante Flächenladungsdichte ϱ_S.

Wie groß ist das Potenzial auf der Zylinderachse unter der Annahme, dass der Zylinder durch $\varepsilon = 1$ charakterisiert ist?

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial einer Welle lautet

$$\vec{A} = A_0(i\vec{e}_y - \vec{e}_z)\exp\{i(k_0x - \omega t)\} \quad .$$

Wie ist die Welle polarisiert?

Aufgabe 11 (12 Punkte)

Bei der Brechung einer ebenen Welle, die in der $x-y$-Ebene aus einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 2 auf die Grenzfläche $y = 0$ zu Luft fällt, resultiert für die Amplitude der elektrischen Feldstärke der transmittierten Welle $\vec{E}_{0\mathrm{tr}} = 1\ \mathrm{V/m}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass die einfallende Welle im Bereich $y > 0$ läuft.

Wie lautet die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle?

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{2}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{5}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{6}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{7}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{8}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2t} \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{12}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{14}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{17}$$