Aufgabe 1 (3 Punkte)

Leiten Sie aus den vektoriellen Zusammenhängen der Wellenzahlvektoren an einer Grenzfläche das Relexionsgesetz $\theta_{\mathrm{ref}} = \theta_{\mathrm{in}}$ sowie das Snelliussche Brechungsgesetz $n_{\mathrm{in}} \sin(\theta_{\mathrm{in}}) = n_{\mathrm{tr}} \sin(\theta_{\mathrm{tr}})$ her.

Lösung

Allgemein gilt

$$\left|\vec{a} \times \vec{b}\right| = \left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right| \sin\theta \ ,$$

wobei θ der Winkel zwischen $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist.
Bei der Reflexion bleibt die Tangentialkomponente erhalten, das heißt, es gilt

$$\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{in}} = \vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{ref}} \ ,$$

diese Gleichung muss dann auch betragsmäßig erfüllt sein, also

$$\left|\vec{k}_{\mathrm{in}}\right| \sin\theta_{\mathrm{in}} = \left|\vec{k}_{\mathrm{ref}}\right| \sin\theta_{\mathrm{ref}}$$

Der Betrag eines Wellenvektors ist durch die Dispersionsrelation mit $\left|\vec{k}\right| = nk_0$ gegeben, wobei n der Brechungsindex des Mediums ist, in dem sich die Welle bewegt. Es folgt also

$$n_{\mathrm{in}} \sin\theta_{\mathrm{in}} = n_{\mathrm{ref}} \sin\theta_{\mathrm{ref}}$$

Da die einfallende und reflektierte Welle sich im gleichen Medium ausbreiten ist $n_{\mathrm{in}} = n_{\mathrm{ref}} = n_1$, es folgt direkt $\theta_{\mathrm{in}} = \theta_{\mathrm{ref}}$.
Ersetzt man in der Herleitung die reflektierte mit der transmittierten Welle kann der letzte Schritt nicht gemacht werden, was auf das Snelliusschen Berechungsgesetzt

$$n_1 \sin\theta_{\mathrm{in}} = n_2 \sin\theta_{\mathrm{tr}}$$

führt.

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Ein infinitesimal dünne, kreisringförmige Scheibe mit Innenradius a und Außenradius b werde von einem kreisförmigen Strom J durchflossen, dessen Dichte antiproportional mit dem Abstand zum Mittelpunkt abfällt.

Berechnen Sie die magnetische Induktion auf der Mittelpunktachse der Scheibe.

Lösung

Zur Lösung der Aufgabe muss zunächst die Stromdichte parametrisiert werden:

$$\vec{j}_v\left\{\vec{r}\,'\right\} = \frac{j_0}{\rho'}\delta\left\{z'\right\}\left(\Theta\left\{\rho'-a\right\}-\Theta\left\{\rho'-b\right\}\right)\vec{e}_{\varphi'} \ ,$$

wobei $\vec{e}_{\varphi'} = -\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y$ ist. Der Zusammenhang zwischen j_0 und J ergibt sich zu

$$J = \int_a^b \frac{j_0}{\rho'}d\rho' = j_0 \ln\left\{\frac{b}{a}\right\} \ ,$$

also

$$j_0 = \frac{J}{\ln\left\{\frac{b}{a}\right\}} \ .$$

Der Einheitsvektor $\vec{e}_\varphi'$ lässt sich auch als $-\sin\varphi'\vec{e}_x + \cos\varphi'\vec{e}_y$ schreiben, es bietet sich an, hier in kartesischen Koordinaten mit zylindrischen Parametern zu arbeiten.
Mit Biot-Savart ergibt sich:

$$\begin{aligned}
\vec{B}\left\{\rho=0,\varphi=0,z\right\} &= \int\limits_{\rho'=0}^{\infty}\int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi}\int\limits_{z=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_v\left\{\vec{r}\,'\right\}\times\left(\vec{r}-\vec{r}\,'\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^3}\rho' d\rho' d\phi' dz \\
&= \frac{\mu_0 j_0}{4\pi}\int\limits_{\rho'=a}^{b}\int\limits_{\varphi'=0}^{2\pi}\frac{1}{\rho'}\frac{\rho'\cos^2\varphi'\vec{e}_z + z\cos\varphi'\vec{e}_x + \rho'\sin^2\varphi'\vec{e}_z + z\sin\varphi'\vec{e}_y}{\left(\rho'^2+z^2\right)^{3/2}}\rho' d\rho' d\phi' \\
&= \frac{\mu_0 j_0}{2}\int\limits_{\rho'=a}^{b}\frac{\rho'\vec{e}_z}{\left(\rho'^2+z^2\right)^{3/2}}d\rho' = \frac{\mu_0 j_0}{2}\left[\frac{-1}{\sqrt{\rho'^2+z^2}}\right]_a^b\vec{e}_z \\
&= \frac{\mu_0 j_0}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+z^2}}\right)\vec{e}_z
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Führen Sie für das magnetische Vektorpotential $\vec{A} = x\vec{e}_x - y\vec{e}_y + z^2\vec{e}_z$ eine Coulomb-Eichung durch und überprüfen Sie, dass die Eichung in Ihrem Fall keinen Einfluss auf das Ergebnis für die magnetische Induktion hat.
Hinweis: Die Eichfunktion ist nicht eindeutig. Es reicht hier, eine spezielle Lösung anzugeben.

Lösung

Die Divergenz

$$\nabla \circ \vec{A} = 2z \tag{1}$$

verschwindet nicht, somit ist das gegebene Vektorpotential nicht Coulomb-Geeicht. Die Lösungen der Gleichung

$$\Delta\Lambda = -\nabla \circ \vec{A} = -2z \tag{2}$$

sind mögliche Eichfunktionen. Mit dem Nullsetzen sämtlicher Integrationskonstanten ergibt sich als eine Lösung

$$\Lambda = -\frac{1}{3}z^3 \ .$$

Das Coulomb-Geeichte Vektorpotential lautet somit

$$\vec{A}' = \vec{A} + \nabla\Lambda = x\vec{e}_x - y\vec{e}_y \ .$$

In beiden Fällen ergibt sich $\vec{B} = \nabla \times \vec{A} = 0$, da im Kreuzprodukt jede Komponente nur in die anderen beiden Raumrichtungen abgeleitet wird, nie in die eigene.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Ein homogen geladener Vollzylinder mit Radius a habe ein zylinderförmiges Loch mit Radius b, welches parallel zu seiner Achse liegt. Der Rand des Loches und die Zylinderachse fallen zusammen. Der Radius des Loches sei außerdem so gewählt, dass dieses vollständig innerhalb des Zylinders liegt.

Berechnen Sie das elektrische Feld außerhalb des Zylinders.

Lösung

Nach dem Satz von Gauß lässt sich das Feld eines geladenen Zylinders auf eine Linienladung, welche dessen Achse entspricht, reduzieren. Das Feld einer Linienladung lautet

$$\vec{E} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho \ .$$

Die Linienladungsdichte ϱ_L ergibt sich als Produkt der Volumenladungsdichte ϱ_0 mit der Fläche πR^2. Das Feld eines homogen geladenen Vollzylinders auf der z-Achse mit Radius a lautet somit

$$\vec{E} = \frac{\varrho_0 a^2}{2\varepsilon_0\rho}\vec{e}_\rho = \frac{\varrho_0 a^2}{2\varepsilon_0}\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2+y^2} \ .$$

Das Superpositionsprinzip gilt auch für unbewegte Ladungen, somit lässt sich das Loch in dem Zylinder als Bereich mit negativer Volumenladungsdichte in einem Vollzylinder behandeln. Das Gesamtfeld außerhalb der Verteilung ergibt sich somit zu

$$\vec{E} = \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0}\left(a^2\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{x^2+y^2} - b^2\frac{(x-b)\,\vec{e}_x + y\vec{e}_y}{(x-b)^2+y^2}\right) \ .$$

Aufgabe 5 (2 Punkte)

Gegeben sei die dielektrische Verschiebung

$$\vec{D} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \quad .$$

Berechnen Sie die Raumladungsverteilung, welche dieses Feld hervorruft.

Lösung

Mit Kugelkoordinaten lässt sich das Feld als

$$\vec{D} = 1\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}\vec{e}_r \tag{3}$$

schreiben.
Mit Nutzung der Divergenz in Kugelkoordinaten ergibt sich für die Raumladungsverteilung

$$\varrho_\mathrm{V} = \nabla \circ \vec{D} = \frac{2}{r}\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2} \ . \tag{4}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Die zirkular polarisierte, ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp\left\{ i \left(\frac{k_0}{\sqrt{3}} x + k_y y - \omega t \right) \right\} \tag{5}$$

mit einer komplexen Amplitude $\vec{E}_0$ fällt aus dem Vakuum auf die Grenzfläche $x = 0$ zu einem unmagnetischen Medium mit Dielektrizitätszahl $\varepsilon_2 = 2$.

Wie ist die reflektierte Welle polarisiert?

Lösung

Der Wellenvektor der einfallenden Welle ist

$$\vec{k}_{\text{in}} = \frac{k_0}{\sqrt{3}} \vec{e}_x + k_y \vec{e}_y \ .$$

Der Normalenvektor zeigt in die Ebene, in die die Welle transmittiert wird, also $\vec{n} = \vec{e}_x$. Somit ist $\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = k_0/\sqrt{3}$. Die Normalkomponente des transmittierten Wellenvektors ergibt sich zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_0^2 \left(n_{\text{tr}}^2 - n_{\text{in}}^2 \right) + ||\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}||^2} = k_0 \sqrt{2 - 1 + 1/3} = k_0 \frac{2}{\sqrt{3}} \ .$$

Berechnen wir nun die Reflexionskoeffizienten für die beiden Anteile, TE und TM, der Welle. Es ergibt sich

$$r_{\text{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{3}}} = -\frac{1}{3}$$

sowie

$$r_{\text{TM}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \frac{2}{\sqrt{3}}} = 0 \ .$$

Da der Reflexionskoeffizient für den TM-Anteil verschwindet, ist die reflektierte Welle (linear) TE-Polarisiert. Die Welle fällt hier also im Brewsterwinkel auf die Grenzfläche.

Aufgabe 7 (3 Punkte)

Wir haben in der Vorlesung und Übung zwei verschiedene Schreibweisen für den Reflexionsfaktor einer TM-Welle kennengelernt:

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\cos\theta_{\mathrm{in}} - \frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\cos\theta_{\mathrm{in}} + \frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}$$

sowie

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\vec{n}\circ\left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}\right)}{\vec{n}\circ\left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}\right)} \ .$$

Zeigen Sie deren Äquivalenz.

Lösung

Es gilt (Geometrie):

$$\vec{a}\circ\vec{b} = \left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cos\theta \ ,$$

wobei θ der eingeschlossene Winkel zwischen den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ ist. Der Betrag eines Wellenvektors ist gerade der Brechungsindex, in der sich die Welle bewegt, multipliziert mit dem Vakuumwellenvektor. Es gilt also:

$$\begin{aligned}
r_{\mathrm{TM}} &= \frac{\vec{n}\circ\left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}\right)}{\vec{n}\circ\left(\frac{\vec{k}_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{\vec{k}_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}\right)} \\
&= \frac{\frac{n_{\mathrm{in}}\cos\theta_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{n_{\mathrm{tr}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\frac{n_{\mathrm{in}}\cos\theta_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{n_{\mathrm{tr}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}} \cdot \frac{n_{\mathrm{in}}n_{\mathrm{tr}}}{n_{\mathrm{in}}n_{\mathrm{tr}}} \\
&= \frac{\frac{n_{\mathrm{in}}^2 n_{\mathrm{tr}}\cos\theta_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \frac{n_{\mathrm{tr}}^2 n_{\mathrm{in}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\frac{n_{\mathrm{in}}^2 n_{\mathrm{tr}}\cos\theta_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{n_{\mathrm{tr}}^2 n_{\mathrm{in}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}} \\
&= \frac{\mu_{\mathrm{in}}n_{\mathrm{tr}}\cos\theta_{\mathrm{in}} - \mu_{\mathrm{tr}}n_{\mathrm{in}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{in}}n_{\mathrm{tr}}\cos\theta_{\mathrm{in}} + \mu_{\mathrm{tr}}n_{\mathrm{in}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}} \cdot \frac{\mu_{\mathrm{in}}\mu_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{in}}\mu_{\mathrm{tr}}} \\
&= r_{\mathrm{TM}} = \frac{\frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\cos\theta_{\mathrm{in}} - \frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}{\frac{n_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}\cos\theta_{\mathrm{in}} + \frac{n_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}\cos\theta_{\mathrm{tr}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Gegeben ist die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E_0 \frac{R}{r} \vec{e}_\theta$ in Kugelkoordinaten.

Wie groß ist die Spannung zwischen den in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkten $(3a, 4a, 0)$ und $(0, 0, 7a)$?

Lösung

Die Spannung zwischen zwei Punkten 1 und 2 ergibt sich aus $U_{12} = V_1 - V_2$. Wegen $V\{\vec{r}\} = V\{\vec{r_0}\} - \int_{\vec{r_0}}^{\vec{r}} \vec{E}\{\vec{r}'\} \, \mathrm{d}\vec{r}'$ resultiert

$$U_{12} = \int_{\vec{r_1}}^{\vec{r_2}} \vec{E}\{\vec{r}'\} \, \mathrm{d}\vec{r}' \quad .$$

Hier muss entlang eines beliebig wählbaren Wegs zwischen dem Anfangspunkt und dem Endpunkt integriert werden. Die sphärischen Parameter der beiden Punkte sind

$$\begin{aligned} (3a, 4a, 0) &\rightarrow \quad r = 5, \theta = \pi/2, \cos\{\phi\} = 0.6 \\ (0, 0, 7a) &\rightarrow \quad r = 7, \theta = 0, \cos\{\phi\} = 0 \end{aligned}$$

und der Weg wird nun stückweise entlang der Koordinatenrichtungen gewählt:

$$\begin{aligned} 1 \quad &: \quad r \in (5, 7), \theta = \pi/2, \cos\{\phi\} = 0.6, \, \mathrm{d}\vec{r} = \, \mathrm{d}r\vec{e}_r \\ 2 \quad &: \quad r = 7, \theta \in (\pi/2, 0), \cos\{\phi\} = 0.6, \, \mathrm{d}\vec{r} = r \, \mathrm{d}\theta\vec{e}_\theta \\ 3 \quad &: \quad r = 7, \theta = 0, \cos\{\phi\} \in (0.6, 0), \, \mathrm{d}\vec{r} = r\sin\{\theta\}\} \, \mathrm{d}\phi\vec{e}_\phi \quad . \end{aligned}$$

Auf den Wegstücken 1 und 3 verschwindet das Skalarprodukt $\vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r}$ und die Spannung ergibt sich zu

$$U_{12} = \int_{\pi/2}^{0} E_0 \frac{R}{r'} r' \, \mathrm{d}\theta' = -E_0 \frac{\pi R}{2} \quad .$$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Ein zylindrischer Körper mit Radius R und Länge 2ℓ befindet sich im ansonsten freien Raum und trägt auf den Stirnseiten die konstante Flächenladungsdichte ϱ_S.

Wie groß ist das Potenzial auf der Zylinderachse unter der Annahme, dass der Zylinder durch $\varepsilon = 1$ charakterisiert ist?

Lösung

Das Coulombpotenzial einer Raumladung lautet

$$V\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\varrho\{\vec{r}'\}}{\|\vec{r} - \vec{r}'\|} \, \mathrm{d}^3 r' \quad .$$

Hier lautet die Raumladungsdichte

$$\begin{aligned} \varrho\{\vec{r}\} &= \varrho_S(\delta\{z - \ell/2\} + \delta\{z + \ell/2\}) \quad \text{für } \rho \in (0, R), \phi \in (0, 2\pi) \\ &= 0 \quad \text{sonst} \quad . \end{aligned}$$

Das Potenzial auf der Zylinderachse lautet also

$$\begin{aligned} V\{\vec{r}\} &= \frac{\varrho_S}{4\pi\varepsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\delta\{z' - \ell/2\} + \delta\{z' + \ell/2\}) \frac{1}{\sqrt{r'^2 + (z - z')^2}} r' \, \mathrm{d}r' \, \mathrm{d}\phi' \, \mathrm{d}z' \\ &= \frac{\varrho_S}{4\pi\varepsilon_0} \left(\sqrt{R^2 + (z - \ell)^2} - \|z - \ell\| + \sqrt{R^2 + (z + \ell)^2} + \|z - \ell\| \right) \quad . \end{aligned}$$

Aufgabe 10 (5 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial einer Welle lautet

$$\vec{A} = A_0(i\vec{e}_y - \vec{e}_z)\exp\{i(k_0x - \omega t)\} \quad .$$

Wie ist die Welle polarisiert?

Lösung

Für die Polarisation einer Welle muss der Realteil des elektrischen Feldes an einem festen Ort untersucht werden. Mit

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

und

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E}$$

resultiert

$$\mu_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{E} = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{A}) - \Delta\vec{A}$$

und nach Integration wegen $\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0$

$$\vec{E} = \frac{-k_0^2}{i\omega\mu_0}\vec{A} = i\omega\varepsilon_0\vec{A} = -A_0\omega\varepsilon_0(\vec{e}_y + i\vec{e}_z)\exp\{i(k_0x - \omega t)\} \quad .$$

Die Welle breitet sich in x- Richtung aus. Der Realteil der elektrischen Feldstärke läuft in der y-z- Ebene rechts um die x-Achse und beschreibt einen Kreis mit konstantem Radius $-A_0\omega\varepsilon_0$. Es handelt sich also um eine rechts zirkular polarisierte ebene Welle.

Kommentar: Es ist für ebene Wellen ganz egal, welche Feldgröße man betrachtet. Man hätte also auch gleich $\vec{A}$ untersuchen können.

Aufgabe 11 (12 Punkte)

Bei der Brechung einer ebenen Welle, die in der $x-y$-Ebene aus einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 2 auf die Grenzfläche $y=0$ zu Luft fällt, resultiert für die Amplitude der elektrischen Feldstärke der transmittierten Welle $\vec{E}_{0\mathrm{tr}} = 1\ \mathrm{V/m}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass die einfallende Welle im Bereich $y > 0$ läuft.

Wie lautet die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle?

Lösung

Gemäß der üblichen Festlegung wird der Normalenvektor zu $\vec{n} = -\vec{e}_y$ gewählt. Die Einfallsebene ist die x-y- Ebene, also ist $\vec{e}_p = \pm\vec{e}_x$; hier wird die positive Richtung gewählt. Damit ergibt sich $\vec{e}_s = \vec{n} \times \vec{e}_p = \vec{e}_z$.

Das elektrische Feld hat hier eine Normalkomponente. Daraus folgt, dass sie TM- polarisiert sein muss. Mit $\vec{k_{\mathrm{tr}}} = k_{\mathrm{n,tr}}\vec{n} + k_{\mathrm{p}}\vec{e}_p$ und $\vec{H_{\mathrm{tr}}} = H_{\mathrm{tr}}\vec{e}_s$ ergibt sich aus dem Vergleich

$$\vec{E_{0\mathrm{tr}}} = \frac{H_{0\mathrm{tr}}}{\omega\varepsilon_0}(k_{\mathrm{n,tr}}\vec{e}_p - k_{\mathrm{p}}\vec{n}) \stackrel{!}{=} 1\ \mathrm{V/m}(\vec{e}_x + \vec{e}_y)$$

mit $k_{\mathrm{tr}} = k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$

$$k_{\mathrm{n,tr}} = k_0/\sqrt{2} = k_0\sqrt{2}/2$$
$$k_{\mathrm{p}} = k_0\sqrt{2}/2$$

und mit $E_0 = 1\ \mathrm{V/m}$

$$H_{0\mathrm{tr}} = \sqrt{2}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 \quad .$$

Damit lässt sich die Normalkomponente von $\vec{k_{\mathrm{in}}}$ unter Verwendung von $k_{\mathrm{in}} = 2k_0$ bestimmen:

$$k_{\mathrm{n,in}} = k_0\sqrt{4-0,5} = k_0\sqrt{3,5} \quad .$$

Es gilt $H_{0\mathrm{tr}} = t_{\mathrm{TM}}H_{0\mathrm{in}}$ mit

$$t_{\mathrm{TM}} = \frac{2\frac{k_{\mathrm{n,in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}}{\frac{k_{\mathrm{n,in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \frac{k_{\mathrm{n,tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}} = \frac{2\sqrt{3,5}}{\sqrt{3,5} - 4\sqrt{0,5}}$$

und daraus resultiert

$$\begin{aligned}
\vec{E_{0\mathrm{in}}} &= \frac{H_{0\mathrm{tr}}}{t_{\mathrm{TM}}\omega\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{in}}}(k_{\mathrm{n,in}}\vec{e}_p - k_{\mathrm{p}}\vec{n}) = \frac{\sqrt{2}}{t_{\mathrm{TM}}\omega\varepsilon_0 \cdot 4}\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}}E_0 k_0(\sqrt{3,5}\vec{e}_x + \sqrt{0,5}\vec{e}_y) \\
&= \frac{E_0}{4t_{\mathrm{TM}}}(\sqrt{7}\vec{e}_x + \vec{e}_y) = \frac{\sqrt{7}\vec{e}_x + \vec{e}_y}{4t_{\mathrm{TM}}}\ \mathrm{V/m}
\end{aligned}$$

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{6}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{8}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{10}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{11}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{12}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{13}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2 t} \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{16}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{17}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{18}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{19}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{20}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{21}$$