

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Welcher Zusammenhang muss für ε_{in} , ε_{tr} , μ_{in} und μ_{tr} gelten, damit ein Winkel existiert, in welchem eine beliebig polarisierte Welle an einer Grenzfläche ausschließlich transmittiert wird.

Lösung

Damit eine Welle ausschließlich transmittiert wird muss sowohl $r_{\text{TE}} = 0$ als auch $r_{\text{TM}} = 0$ gelten. Es muss also gelten:

$$\begin{aligned} r_{\text{TE}} &= \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{k_{\text{in},n}}{\mu_{\text{in}}} &= \frac{k_{\text{tr},n}}{\mu_{\text{tr}}} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} r_{\text{TM}} &= \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)} = 0 \\ \Rightarrow \frac{k_{\text{in},n}}{\varepsilon_{\text{in}}} &= \frac{k_{\text{tr},n}}{\varepsilon_{\text{tr}}} . \end{aligned}$$

Einsetzen der beiden Bedingungen ineinander liefert

$$\frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}} = \frac{\varepsilon_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} .$$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Leiten Sie die Bedingung für die Normalkomponente des an einer Grenzfläche transmittierten Wellenvektors

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{\left(n_{\text{tr}}^2 - n_{\text{in}}^2\right)k_0^2 + \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}}\right)^2}$$

geometrisch her.

Lösung

Bezüglich einer Grenzfläche mit lokalem Koordinatensystem \vec{n} , \vec{e}_p , \vec{e}_s gilt für einen Wellenvektor im Medium

$$\vec{k} = \left(\vec{n} \circ \vec{k}\right) \vec{n} + \left(\vec{e}_p \circ \vec{k}\right) \vec{e}_p = k_n \vec{n} + k_p \vec{e}_p .$$

Der Betrag eines Wellenvektors lässt sich damit als

$$\left|\vec{k}\right| = \sqrt{k_n^2 + k_p^2}$$

schreiben, wobei dieser wiederum nk_0 mit dem Brechungsindex n entsprechen muss.

Bei Brechung an einer Grenzfläche ändert sich die Komponente des Wellenvektors parallel zu der Grenzfläche nicht. Es gilt also

$$n_{\text{in}}k_0 = \sqrt{k_{\text{in},n}^2 + k_p^2}$$

sowie

$$n_{\text{tr}}k_0 = \sqrt{k_{\text{tr},n}^2 + k_p^2} .$$

Auflösen der ersten Gleichung nach k_p , Einsetzen in die zweite und ausmultiplizieren liefert das gesuchte Ergebnis.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Eine Punktladung mit Ladung q befindet sich im Abstand a zum Mittelpunkt einer geerdeten Metallkugel mit Radius $R < a$ im freien Raum. Welche Kraft wirkt auf die Punktladung?

Lösung

Bei einer Punktladung vor einer geerdeten Metallkugel muss eine Spiegelladung innerhalb der Kugel bestimmt werden. Diese hat die Position $a' = R^2/a$ und die Ladung $q' = -qR/a$. Wir nehmen an, dass der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung und die Punktladung q am Ort $a\vec{e}_x$ liege, dann ergibt sich für die Kraft, die auf die Punktladung q wirkt, direkt

$$\vec{F} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0} \frac{(a - a')\vec{e}_x}{(a - a')^3} = -\frac{q^2 R}{4\pi\epsilon_0 a (a - R^2/a)^2} \vec{e}_x = -\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{aR}{(a^2 - R^2)^2} \vec{e}_x. \quad (1)$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Gegeben sei die magnetische Flussdichte

$$\vec{B} = \frac{-y\vec{e}_x + x\vec{e}_y}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \cdot 1\text{Vs} . \quad (2)$$

Berechnen Sie die Stromdichte, die dieses Magnetfeld hervorruft.

Lösung

Die Stromdichte errechnet sich aus der magnetischen Induktion mit

$$\vec{j}_V = \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu_0} .$$

Das hier gegebene Feld lässt sich in Zylinderkoordinaten als

$$\vec{B} = \frac{\vec{e}_\varphi}{\rho^2} \cdot 1\text{Vs}$$

darstellen. Die Rotation ergibt sich mit den Regeln für Zylinderkoordinaten zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{-1}{\rho^3} \vec{e}_z \cdot 1\text{Vs} .$$

Damit ergibt sich für die Stromdichte

$$\vec{j}_V = \frac{-1}{\mu_0 \rho^3} \vec{e}_z \cdot 1\text{Vs} . \quad (3)$$

Das Ergebnis hat die Einheit A/m^2 , da $[\mu_0] = \text{Vs}/\text{Am}$ und $[\rho] = \text{m}$.

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Die zirkular polarisierte, ebene Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp \left\{ i \left(k_x x + k_0 \sqrt{\frac{2}{3}} y - \omega t \right) \right\} \quad (4)$$

mit einer komplexen Amplitude \vec{E}_0 fällt aus einem Medium mit $\varepsilon = 1$ und $\mu = 2$ auf die Grenzfläche $x = 0$ zu Vakuum. Wie ist die reflektierte Welle polarisiert?

Lösung

Der Wellenvektor der einfallenden Welle lässt sich als

$$\vec{k}_{\text{in}} = k_x \vec{e}_x + k_0 \sqrt{\frac{2}{3}} \vec{e}_y \quad (5)$$

ablesen. Da $\vec{n} = \vec{e}_x$ gilt (Annahme: $k_x > 0$) folgt für k_x mit der Dispersionsrelation:

$$\vec{k}_x = \sqrt{n^2 k_0^2 - \frac{2}{3} k_0^2} = \sqrt{2k_0^2 - \frac{2}{3} k_0^2} = \sqrt{\frac{4}{3}} k_0. \quad (6)$$

Die Normalkomponente der Transmittierten Welle ergibt sich zu

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}} = \sqrt{k_0^2 (n_{\text{tr}}^2 - n_{\text{in}}^2) + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})^2} = k_0 \sqrt{1 - 2 + 4/3} = k_0 \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Berechnen wir nun die Reflexionskoeffizienten für die beiden Anteile, TE und TM, der Welle. Es ergibt sich

$$r_{\text{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\mu_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\mu_{\text{tr}}} \right)} = \frac{\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0$$

sowie

$$r_{\text{TM}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} - \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{in}}} + \frac{\vec{k}_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}} \right)} = \frac{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Da der Reflexionskoeffizient für den TE-Anteil verschwindet, ist die reflektierte Welle (linear) TM-Polarisiert. Die Welle fällt hier also im Brewsterwinkel auf die Grenzfläche.

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Führen Sie für das Potential

$$\vec{A} = A_x t \vec{e}_x + A_y t y \vec{e}_y + A_z z^2 \vec{e}_z, \quad \phi_{\text{el}} = \phi_0 t^3 \quad (7)$$

eine Lorenz-Eichung durch. Finden Sie dafür eine geeignete Eichfunktion Λ und bestimmen Sie damit das geeichte Potential \vec{A}' , ϕ'_{el} . Zeigen Sie, dass die Eichung keinen Einfluss auf das Ergebnis für das (dynamische) E- und B-Feld hat.

Hinweis: Die Lösung ist nicht eindeutig, die Angabe einer speziellen Lösung für Λ sowie \vec{A}' , ϕ'_{el} genügt.

Lösung

Für die Lorenz-Eichung muss gelten:

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{el}} = 0. \quad (8)$$

Hier ergibt sich

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} = A_y t + 2A_z z \quad (9)$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{el}} = 3\Phi_0 t^2. \quad (10)$$

Das gegebene Potential ist also offensichtlich nicht Lorenz-geeicht.

Eine Eichfunktion lässt sich als Lösung der inhomogenen Wellengleichung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{el}} = 2A_z z + A_y t + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 3\Phi_0 t^2 = -\Delta \Lambda + \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Lambda \quad (11)$$

bestimmen. Da dabei ein Orts- und zwei Zeitabhängige Terme auftauchen kann man diese so aufteilen, dass bei $\Delta \Lambda$ nur der ortsabhängige und bei $\partial^2 \Lambda / \partial t^2$ nur die zeitabhängigen Terme auftauchen.

Eine Lösung ist also:

$$\Lambda = -\frac{1}{3} A_z z^3 + \frac{1}{\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} \frac{1}{6} A_y t^3 + \frac{1}{4} \Phi_0 t^4. \quad (12)$$

Das Lorenz-geeichte Potential bestimmt sich nun zu

$$\Phi'_{\text{el}} = \Phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t} \Lambda = \Phi_0 t^3 - \frac{1}{2\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} A_y t^2 - \Phi_0 t^3 = -\frac{1}{2\varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0} A_y t^2 \quad (13)$$

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda = A_x t \vec{e}_x + A_y t y \vec{e}_y + A_z z^2 \vec{e}_z - A_z z^2 \vec{e}_z = A_x t \vec{e}_x + A_y t y \vec{e}_y. \quad (14)$$

Das B-Feld berechnet sich aus dem elektrodynamischen Potential als $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, was sowohl vor als auch nach der Eichung offensichtlich Null ergibt. Das E-Feld ergibt sich zu

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = A_x\vec{e}_x + A_y y\vec{e}_y, \quad (15)$$

auch dieses Ergebnis bleibt durch die Eichung offensichtlich unverändert.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Welche Flächenstromdichte \vec{j}_s stellt sich beim schrägen Einfall einer TE-Welle auf eine ebene, ideal leitfähige Grenzfläche ein?

Lösung

Eine TE-Welle hat gemäß Definition ein elektrisches Feld, das senkrecht zur Einfallsebene gerichtet und damit parallel zur Grenzfläche liegt:

$$\vec{E} = E\vec{e}_s \quad .$$

An der ideal leitfähigen Grenzfläche darf es aber gar kein tangenciales elektrisches Feld geben. Das bedeutet, dass sich dort die elektrischen Felder der einfallenden und reflektierten Welle gegenseitig auslöschen:

$$\vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{ref}} \Big|_{\text{Grenze}} = 0 \quad .$$

Daraus resultiert der Reflexionsfaktor

$$r_{\text{TE}} = -1 \quad .$$

Die zugehörigen magnetischen Feldstärken lauten mit $\vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{ref}} + \vec{k}_{\text{in}}) = 0$

$$\begin{aligned} \omega\mu\mu_0\vec{H}_{\text{in}} &= \vec{k}_{\text{in}} \times \vec{E}_{\text{in}} = E_{\text{in}}(-k_p\vec{n} + k_n\vec{e}_p) \\ \omega\mu\mu_0\vec{H}_{\text{ref}} &= \vec{k}_{\text{ref}} \times \vec{E}_{\text{ref}} = -E_{\text{in}}(-k_p\vec{n} - k_n\vec{e}_p) \quad . \end{aligned}$$

Somit resultiert

$$\vec{j}_s = \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_{\text{Grenze}}$$

mit $\vec{H}_1 = \vec{H}_{\text{in}} + \vec{H}_{\text{ref}}$ und $\vec{H}_2 = 0$

$$\vec{j}_s = \frac{2k_n}{\omega\mu\mu_0} E_{\text{in}} \{ \text{Grenze} \} \vec{e}_s \quad .$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

In Zylinderkoordinaten ist die elektrische Feldstärke

$$\vec{E} = E_0 \left(-\frac{z}{\rho} \sin\{\phi\} \vec{e}_\phi + \cos\{\phi\} \vec{e}_z \right)$$

in einem Medium mit relativer Dielektrizitätszahl $\varepsilon = 2$ gegeben.

Wie lautet die Spannung $U = V\{P_1\} - V\{P_2\}$ zwischen den in kartesischen Koordinaten gegebenen Punkten $P_1 = (1, 1, 2)$ cm und $P_2 = (-1, 1, -2)$ cm?

Lösung

Die Spannung zwischen den Punkten P_1 und P_2 errechnet sich aus dem elektrischen Feld zu

$$U = V\{P_1\} - V\{P_2\} = V\{P_1\} - (V\{P_1\} - \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \, d\vec{r}) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \, d\vec{r} \quad .$$

Hier muss ein geeigneter Integrationsweg zwischen den beiden Punkten gefunden werden. Da das Feld in Zylinderkoordinaten angegeben ist, bietet es sich an, sich stückweise parallel zu den Zylinderkoordinatenachsen zu bewegen, also das Wegintegral in drei Stücke mit jeweils zwei konstanten und einem variablen Parameter zu zerlegen.

Teilstück 1: $\rho \in [\rho_1, \rho_2]; \Phi = \Phi_1; z = z_1; d\vec{r} = d\rho \vec{e}_\rho$

Teilstück 2: $\rho = \rho_2; \Phi \in [\Phi_1, \Phi_2]; z = z_1; d\vec{r} = \rho_2 d\Phi \vec{e}_\Phi$

Teilstück 3: $\rho = \rho_2; \Phi = \Phi_2; z \in [z_1, z_2]; d\vec{r} = dz \vec{e}_z$

Die Parameter für die beiden Punkte lauten

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{2} \text{cm} & \cos\{\Phi_1\} &= x_1/\rho_1 = \sqrt{1/2} & \sin\{\Phi_1\} &= y_1/\rho_1 = \sqrt{1/2} & z_1 &= 2 \text{cm} \\ \rho_2 &= \sqrt{2} \text{cm} & \cos\{\Phi_2\} &= -\sqrt{1/2} & \sin\{\Phi_2\} &= \sqrt{1/2} & z_2 &= -2 \text{cm} \quad . \end{aligned}$$

Das erste Integralstück gibt keinen Beitrag, weil die Grenzen die selben sind. Beim zweiten Stück resultiert

$$U_2 = \int_{\Phi_1}^{\Phi_2} -E_0 \frac{z_1}{\rho_2} \sin\{\Phi\} \rho_2 \, d\Phi = [E_0 z_1 \cos\{\Phi\}]_{\Phi_1}^{\Phi_2} = E_0 2 \text{cm} (-2\sqrt{1/2}) = -E_0 4\sqrt{2} \text{cm}$$

und für das dritte Teilstück

$$U_3 = \int_{z_1}^{z_2} E_0 \cos\{\Phi_2\} \, dz = [E_0 (-\sqrt{1/2}) z]_{z_1}^{z_2} = E_0 4\sqrt{2} \text{cm} \quad ,$$

und damit die gesuchte Spannung

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = 0 \quad .$$

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Ein zylindrischer Körper mit Radius R und Länge 2ℓ befindet sich im ansonsten freien Raum und trägt auf dem Mantel die Flächenladungsdichte $\varrho_s(u/\ell)^2$, wobei u parallel zur Zylinderachse von dessen Mitte gemessen wird.

Wie groß ist das Potenzial auf der Zylinderachse unter der Annahme, dass der Zylinder durch $\varepsilon = 1$ charakterisiert ist?

Lösung

Für die Berechnung des Potenzials wird

$$V\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\varrho_v\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d^3r'$$

herangezogen. Auf Grund der Zylindersymmetrie bietet es sich an, in Zylinderkoordinaten zu rechnen. Dann ist

$$d^3r' = \rho' d\rho' d\phi' dz' \quad ,$$

auf der Zylinderachse mit $\rho = 0$

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{\rho'^2 + (z - z')^2}$$

und die Ladungsdichte wird durch

$$\varrho_v\{\vec{r}'\} = \varrho_s \left(\frac{z'}{\ell}\right)^2 \delta\{\rho' - R\} \text{rect}\left\{\frac{z'}{2\ell}\right\}$$

beschrieben. Nach direkter Auswertung des Dirac und der Rechteckfunktion resultiert

$$\begin{aligned}
 V\{\vec{r}\} &= \frac{\rho_S}{4\pi\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{z'^2}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} d\phi dz' \\
 &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \int_{-\ell}^{\ell} \frac{z'^2}{\sqrt{R^2 + (z - z')^2}} dz'
 \end{aligned}$$

Substitution $z - z' = t$

$$= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \int_{z-\ell}^{z+\ell} \frac{(z-t)^2}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt = \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \int_{z-\ell}^{z+\ell} \frac{z^2 - 2zt + t^2}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt$$

Hinweise (20), (21) und (22)

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \left[z^2 \ln\{t + \sqrt{R^2 + t^2}\} - 2z\sqrt{R^2 + t^2} + \frac{t}{2}\sqrt{R^2 + t^2} + \frac{R^2}{2} \ln\{t + \sqrt{R^2 + t^2}\} \right]_{z-\ell}^{z+\ell} \\
 &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \left[\frac{2z^2 + R^2}{2} \ln\{t + \sqrt{R^2 + t^2}\} + \frac{t - 4z}{2} \sqrt{R^2 + t^2} \right]_{z-\ell}^{z+\ell} \\
 &= \frac{\rho_S}{2\epsilon_0} \frac{R}{\ell^2} \left(\frac{2z^2 + R^2}{2} \ln \left\{ \frac{z + \ell + \sqrt{R^2 + (z + \ell)^2}}{z - \ell + \sqrt{R^2 + (z - \ell)^2}} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\ell - 3z}{2} \sqrt{R^2 + (z + \ell)^2} + \frac{\ell + 3z}{2} \sqrt{R^2 + (z - \ell)^2} \right)
 \end{aligned}$$

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{a} \arctan \left\{ \frac{t}{a} \right\} \quad (16)$$

$$\int \frac{t}{a^2 + t^2} dt = \frac{1}{2} \ln \{a^2 + t^2\} \quad (17)$$

$$\int \frac{t^2}{a^2 + t^2} dt = t - \arctan \left\{ \frac{t}{a} \right\} \quad (18)$$

$$\int \frac{t^3}{a^2 + t^2} dt = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln \{a^2 + t^2\} \quad (19)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \ln \{t + \sqrt{a^2 + t^2}\} \quad (20)$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \sqrt{a^2 + t^2} \quad (21)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{t}{2} \sqrt{a^2 + t^2} + \frac{a^2}{2} \ln \{t + \sqrt{a^2 + t^2}\} \quad (22)$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{\sqrt{a^2 + t^2}^3}{3} - a^2 \sqrt{a^2 + t^2} \quad (23)$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{-1}{a} \ln \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2 + t^2}}{t} \right\} \quad (24)$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2 + t^2}} dt = \frac{-\sqrt{a^2 + t^2}}{a^2 t} \quad (25)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{t}{a^2 \sqrt{a^2 + t^2}} \quad (26)$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{-1}{\sqrt{a^2 + t^2}} \quad (27)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{-t}{\sqrt{a^2 + t^2}} + \ln \{t + \sqrt{a^2 + t^2}\} \quad (28)$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \sqrt{a^2 + t^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + t^2}} \quad (29)$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{1}{a^2 \sqrt{a^2 + t^2}} - \frac{1}{a^3} \ln \left\{ \frac{a + \sqrt{a^2 + t^2}}{t} \right\} \quad (30)$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2 + t^2}^3} dt = \frac{-1}{a^4} \left(\frac{\sqrt{a^2 + t^2}}{t} + \frac{t}{\sqrt{a^2 + t^2}} \right) \quad (31)$$