Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2022-1

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$
Aufgabe 10:	Aufgabe 11:		$\sum$
			Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei ein Medium mit beliebiger Magnetisierung $\vec{M}\,\{\vec{r}, t\}$, in welchem keine freien Ströme und Ladungen existieren. Zeigen Sie, dass im Fall einer verschwindenden Gesamtstromdichte die Divergenz des elektrischen Feldes ebenfalls verschwinden muss.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Brewsterwinkel in unmagnetischen Medien kleiner als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

In welchen Ebenen im freien Raum ist das Integral $\int \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r}$ für das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_x$ vom Weg unabhängig?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Welche Kraft wirkt auf eine Punktladung Q, die sich im Abstand L zum Mittelpunkt einer geerdeten, ideal leitfähigen Metallkugel vom Durchmesser D befindet?

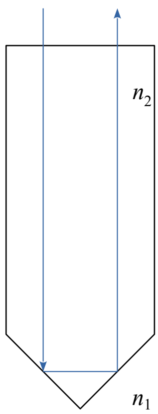

Abbildung 1: Stab mit Strahlengang einer sich darin ausbreitenden ebenen Welle

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Welche Brechzahl n_2 muss der Stab in Abbildung 1 mindestens haben, damit sich bei der Reflektion der eingezeichneten Wellenausbreitung an den Grenzflächen Totalreflexion einstellt, wenn sich der Stab in Luft befindet? Wie groß darf die Brechzahl höchstens sein, damit keine Totalreflexion auftritt, wenn sich der Stab in einem Medium mit Brechzahl $n_1 > 1$ befindet?

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Die Achse eines geraden, stromdurchflossenen, rechteckigen Stabs mit Querschnitt $a \cdot b$ fällt mit der y-Achse zusammen, wobei a und b jeweils parallel zur x- und z-Achse liegen. Das Magnetfeld im Stab lautet

$$\vec{B} = B_0 \left(\sin\{3\pi x/a\}\vec{e}_z + \sin\{\pi z/b\}\vec{e}_x\right) \ .$$

Welcher Gesamtstrom fließt in dem Stab?

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien schneidet die x-Achse bei a, die y-Achse bei b und die z-Achse im unendlichen. Eine ebene Welle mit $\vec{H} = \exp\{i(k_0 y - \omega t)\}(H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y + H_z \vec{e}_z)$ läuft auf die Grenzfläche zu. Bestimmen Sie den TE- und den TM- Anteil.

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Welche Ladung befindet sich in einem kugelförmigen Bereich vom Radius A, dessen Mittelpunkt sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet, wenn das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \frac{r}{A} \sin\{\varphi/2\} \sin\{\theta\} \vec{e}_r$$

lautet?

Aufgabe 9 (9 Punkte)

Berechnen Sie die komplexen Poyntingvektoren $\vec{S}_0 = \vec{E} \times \vec{H}^*$ der einfallenden, reflektieren und transmittierten ebenen Wellen an der Grenzfläche für den Grenzwinkel der Totalreflexion. Es soll die TE-Polarisation betrachtet werden.

Aufgabe 10 (9 Punkte)

In einem Zylinderkoordinatensystem fließt in der Ebene $z = z_0$ im Bereich $0 \leq \rho \leq R$ die Stromdichte $\vec{j} = j_0 \sin\{\phi\}\vec{e}_\phi$. Wie groß ist die magnetische Induktion auf der z-Achse?

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den senkrechten Einfall einer TE-Welle die Reflexion an einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl n_3 aus Luft ($n_1 = 1$) verschwindet, wenn sich auf diesem eine Schicht mit der optischen Dicke $\lambda/4$ und der Brechzahl $n_2 = \sqrt{n_3}$ befindet.

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{1}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{2}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{5}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{6}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2t} \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{11}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{12}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{13}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{16}$$

$$\int \cos^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \tag{17}$$

$$\int \sin^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \tag{18}$$