Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei ein Medium mit beliebiger Magnetisierung $\vec{M}\{\vec{r}, t\}$, in welchem keine freien Ströme und Ladungen existieren. Zeigen Sie, dass im Fall einer verschwindenden Gesamtstromdichte die Divergenz des elektrischen Feldes ebenfalls verschwinden muss.

Lösung

Die Stromdichte im Medium lautet

$$\vec{j}_\mathrm{V} = j + \frac{\partial}{\partial t}\vec{P} + \vec{\nabla} \times \vec{M} \ . \tag{1}$$

Da $\vec{j}_\mathrm{V}$ und j beide laut Aufgabenstellung Null sind folgt direkt

$$\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = -\vec{\nabla} \times \vec{M} \ . \tag{2}$$

Für die Ladungsdichte im Medium folgt

$$\varrho_\mathrm{V} = \varrho - \vec{\nabla} \circ \vec{P} = \vec{\nabla} \circ \left(\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{M}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}\right) = 0 \ . \tag{3}$$

Mit

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\varrho_\mathrm{V} \tag{4}$$

folgt die Behauptung.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Brewsterwinkel in unmagnetischen Medien kleiner als der Grenzwinkel der Totalreflexion ist.

Lösung

$$\begin{aligned}
\sin\{\theta_{\mathrm{gr}}\} &= \frac{n_2}{n_1} \\
\tan\{\theta_{\mathrm{B}}\} &= \frac{n_2}{n_1} \\
\frac{\sin\{\theta_{\mathrm{B}}\}}{\cos\{\theta_{\mathrm{B}}\}} &= \sin\{\theta_{\mathrm{gr}}\} \\
\sin\{\theta_{\mathrm{B}}\} &= \sin\{\theta_{\mathrm{gr}}\}\cos\{\theta_{\mathrm{B}}\} < \sin\{\theta_{\mathrm{gr}}\} \\
\theta_{\mathrm{B}} &< \theta_{\mathrm{gr}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

In welchen Ebenen im freien Raum ist das Integral $\int \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{r}$ für das elektrische Feld $\vec{E} = E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_x$ vom Weg unabhängig?

Lösung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$$

Stokesscher Integralsatz

$$\oint \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t}\iint \vec{B}\,\mathrm{d}^2\vec{r}$$

Wegunabhängigkeit: Die rechte Seite muss Null werden. Genauer gesagt: Der Normalenvektor der Fläche muss in Richtung von $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ zeigen.
Also

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = ikE_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}\vec{e}_y = 0$$

Damit sind alle Ebenen mit Normalenvektor senkrecht zu $\vec{e}_y$ zugelassen. Die y-Achse muss also Bestandteil der Ebenen sein. Speziell die x-y- und die y-z-Ebenen sind mögliche Kandidaten. Weiterhin könnten man vermuten, dass Ebenen mit Normalenvektor $\vec{e}_y$, also x-z-Ebenen, erlaubt sind, wenn sie die Bedingung $kz - \omega t = (2m+1)\pi/2$ erfüllen. Das sind aber keine Ebenen sondern Linien, da ja jetzt z eingeschränkt wird.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Welche Kraft wirkt auf eine Punktladung Q, die sich im Abstand L zum Mittelpunkt einer geerdeten, ideal leitfähigen Metallkugel vom Durchmesser D befindet?

Lösung

Hier wird sinnvoll die Spiegelladungsmethode verwendet. Wenn das Koordinatensystem so gewählt wird, dass der Ursprung in der Kugelmitte liegt und die Punktladung auf der x-Achse, kann der Ort der Spiegelladung mit

$$x' = \frac{D^2}{4L}$$

angegeben werden. Die Ladung selbst hat die Größe

$$Q' = -Q\frac{D}{2L} \quad .$$

Die Kraft errechnet sich nun einfach mit

$$\begin{aligned}
\vec{F} &= \frac{QQ'}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{(L-x')^2}\vec{e}_x \\
&= -\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{D}{2L(L-\frac{D^2}{4L})^2}\vec{e}_x \\
&= -\frac{Q^2}{\pi\varepsilon_0}\frac{2LD}{((2L)^2-D^2)^2}\vec{e}_x
\end{aligned}$$

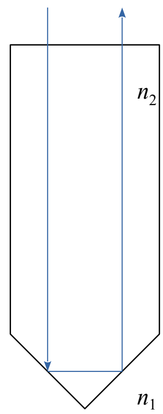

Abbildung 1: Stab mit Strahlengang einer sich darin ausbreitenden ebenen Welle

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Welche Brechzahl n_2 muss der Stab in Abbildung 1 mindestens haben, damit sich bei der Reflektion der eingezeichneten Wellenausbreitung an den Grenzflächen Totalreflexion einstellt, wenn sich der Stab in Luft befindet? Wie groß darf die Brechzahl höchstens sein, damit keine Totalreflexion auftritt, wenn sich der Stab in einem Medium mit Brechzahl $n_1 > 1$ befindet?

Lösung

Die Bedingung für Totalreflexion lautet

$$k_\mathrm{p} \geq k_\mathrm{tr} \quad .$$

Übersetzt auf die Verhältnisse in der Aufgabe bedeutet das

$$\frac{n_2}{\sqrt{2}} \geq n_1 \quad .$$

Bei Umgebung Luft ($n_1 = 1$) soll sicher Totalreflexion stattfinden, im Fall $n_1 = n' > 1$ sicher nicht. Damit resultiert

$$n' > \frac{n_2}{\sqrt{2}} \geq 1$$

bzw.

$$\sqrt{2}n' > n_2 \geq \sqrt{2} \quad .$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Die Achse eines geraden, stromdurchflossenen, rechteckigen Stabs mit Querschnitt $a \cdot b$ fällt mit der y-Achse zusammen, wobei a und b jeweils parallel zur x- und z-Achse liegen. Das Magnetfeld im Stab lautet

$$\vec{B} = B_0 \left(\sin\{3\pi x/a\}\vec{e}_z + \sin\{\pi z/b\}\vec{e}_x \right) \ .$$

Welcher Gesamtstrom fließt in dem Stab?

Lösung

Der Gesamtstrom durch einen Querschnitt ergibt sich in der Magnetostatik aus der Stromdichte

$$\vec{j_\mathrm{V}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B}$$

mittels Integration zu

$$J_\mathrm{S} = \iint \vec{j_\mathrm{V}} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iint \left(\frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \times \vec{B} \right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{r} \quad .$$

Im vorliegenden Fall ist das geschlossene Linienintegral durch vier einzelne Integrale darzustellen:

$$\begin{array}{ll}
x \in [-a/2, a/2], z = +b/2, y = y_0 & \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e}_x \\
z \in [b/2, -b/2], x = +a/2, y = y_0 & \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}z\vec{e}_z \\
x \in [a/2, -a/2], z = -b/2, y = y_0 & \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{e}_x \\
z \in [-b/2, b/2], x = -a/2, y = y_0 & \mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}z\vec{e}_z
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
J \;=\;& \int_{-a/2}^{a/2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin\{\pi/2\}\,\mathrm{d}x + \int_{b/2}^{-b/2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin\{3\pi/2\}\,\mathrm{d}z + \\
& \int_{a/2}^{-a/2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin\{-\pi/2\}\,\mathrm{d}x + \int_{-b/2}^{b/2} \frac{B_0}{\mu_0} \sin\{-3\pi/2\}\,\mathrm{d}z = \frac{B_0}{\mu_0}(2a + 2b) \quad .
\end{aligned}$$

Die Alternative Lösung geht über die Berechnung der Stromdichte

$$\vec{j_\mathrm{V}} = \frac{B_0}{\mu_0} \left(\frac{\pi}{b} \cos\{\pi z/b\} - \frac{3\pi}{a} \cos\{3\pi x/a\} \right) \vec{e}_y$$

und anschließende Integration über die Querschnittsfläche mit $\mathrm{d}^2\vec{r} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\vec{e}_y$.

Aufgabe 7 (6 Punkte)

Die ebene Grenzfläche zwischen zwei Medien schneidet die x-Achse bei a, die y-Achse bei b und die z-Achse im unendlichen. Eine ebene Welle mit $\vec{H} = \exp\{i(k_0 y - \omega t)\}(H_x \vec{e}_x + H_y \vec{e}_y + H_z \vec{e}_z)$ läuft auf die Grenzfläche zu. Bestimmen Sie den TE- und den TM- Anteil.

Lösung

Aus den Schnittpunkten mit den Achsen ergibt sich die Ebenengleichung

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{\infty} = 1$$

und damit der Normalenvektor

$$\vec{n} = \frac{b\vec{e}_x + a\vec{e}_y}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad .$$

Die Welle breitet sich in y-Richtung aus. Daraus ergibt sich der Normalenvektor auf die Einfallsebene aus $\vec{n} \times \vec{e}_y$ zu

$$\vec{e}_s = \vec{e}_z \quad .$$

Da $\vec{H}$ und $\vec{k}$ senkrecht zueinander stehen, muss $H_y = 0$ sein. Die TM-Komponente von $\vec{H}$ ist

$$\vec{H_{\mathsf{TM}}} = (\vec{e}_s \circ \vec{H})\vec{e}_s = \exp\{i(k_0 y - \omega t)\} H_z \vec{e}_z$$

und der TE-Anteil ist der Rest

$$\vec{H_{\mathsf{TE}}} = \vec{H} - \vec{H_{\mathsf{TM}}} = \exp\{i(k_0 y - \omega t)\} H_x \vec{e}_x \quad .$$

Aufgabe 8 (8 Punkte)

Welche Ladung befindet sich in einem kugelförmigen Bereich vom Radius A, dessen Mittelpunkt sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet, wenn das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 \frac{r}{A} \sin\{\varphi/2\} \sin\{\theta\} \vec{e}_r$$

lautet?

Lösung

Die Ladung kann aus der Raumladungsdichte

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\rho_\mathrm{V}}{\varepsilon_0}$$

durch Integration über das fragliche Volumen ermittelt werden:

$$Q_\mathrm{Volumen} = \iiint\limits_\mathrm{Volumen} \rho_\mathrm{V}\, \mathrm{d}^3 r = \varepsilon_0 \iiint\limits_\mathrm{Volumen} \vec{\nabla} \circ \vec{E}\, \mathrm{d}^3 r = \varepsilon_0 \oiint\limits_\mathrm{Volumen} \vec{E} \circ \mathrm{d}^2 \vec{r} \quad .$$

Im vorliegenden Fall resultiert

$$\begin{aligned}
Q_\mathrm{Kugel} &= \varepsilon_0 \oiint\limits_{\mathrm{Kugel}, r=A} \left(E_0 \frac{r}{A} \sin\{\varphi/2\} \sin\{\theta\} \vec{e}_r \right) \circ \left(r^2 \sin\{\theta\}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta \vec{e}_r \right) \\
&= \varepsilon_0 E_0 A^2 \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \sin\{\varphi/2\} \sin^2\{\theta\}\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\theta \\
&= \varepsilon_0 E_0 A^2 \left[-2\cos\{\varphi/2\} \right]_0^{2\pi} \left[\frac{\theta}{2} - \sin\{2\theta\} \right]_0^\pi = 2\pi \varepsilon_0 E_0 A^2 \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 9 (9 Punkte)

Berechnen Sie die komplexen Poyntingvektoren $\vec{S_0} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ der einfallenden, reflektierten und transmittierten ebenen Wellen an der Grenzfläche für den Grenzwinkel der Totalreflexion. Es soll die TE-Polarisation betrachtet werden.

Lösung

Beim Grenzwinkel der Totalreflexion gilt

$$\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}} = 0$$

und damit werden die Reflektionsfaktoren $r = 1$. Bei TE-Wellen nimmt man die elektrische Feldstärke $\vec{E_{\mathrm{in}}} = E_{\mathrm{in}} \exp\{i(\vec{k_{\mathrm{in}}} \circ \vec{r} - \omega t)\}\vec{e}_s$ als Ausgangsgröße. Die jeweils zugehörige magnetische Feldstärke lautet bei ebenen Wellen

$$\omega\mu\mu_0\vec{H} = \vec{k} \times \vec{E}$$

und damit der jeweilige komplexe Poyntingvektor

$$S_0 = \vec{E} \times \left(\frac{\vec{k} \times \vec{E}}{\omega\mu\mu_0}\right)^*$$

und mit $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b})$ wegen $\vec{k} \circ \vec{E} = 0$

$$S_0 = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}|\vec{E}|^2\vec{k}^*$$

Mit den reellen Wellenzahlvektoren

$$\begin{aligned}
\vec{k_{\mathrm{in}}} &= k_{\mathrm{p}}\vec{e}_p + k_{\mathrm{n}}\vec{n} \\
\vec{k_{\mathrm{ref}}} &= k_{\mathrm{p}}\vec{e}_p - k_{\mathrm{n}}\vec{n} \\
\vec{k_{\mathrm{tr}}} &= k_{\mathrm{p}}\vec{e}_p
\end{aligned}$$

und $E_{\mathrm{ref}} = E_{\mathrm{in}}$, $E_{\mathrm{tr}} = 2E_{\mathrm{in}}$ resultiert

$$\begin{aligned}
S_{0,\mathrm{in}} &= \frac{1}{\omega\mu_{\mathrm{in}}\mu_0}E_{\mathrm{in}}^2\vec{k_{\mathrm{in}}} \\
S_{0,\mathrm{ref}} &= \frac{1}{\omega\mu_{\mathrm{in}}\mu_0}E_{\mathrm{in}}^2\vec{k_{\mathrm{ref}}} \\
S_{0,\mathrm{tr}} &= \frac{4}{\omega\mu_{\mathrm{tr}}\mu_0}E_{\mathrm{in}}^2\vec{k_{\mathrm{tr}}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 10 (9 Punkte)

In einem Zylinderkoordinatensystem fließt in der Ebene $z = z_0$ im Bereich $0 \leq \rho \leq R$ die Stromdichte $\vec{j} = j_0 \sin\{\phi\}\vec{e}_\phi$. Wie groß ist die magnetische Induktion auf der z-Achse?

Lösung

Biot-Savart:

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \vec{j}\{r'\} \times \frac{\vec{r} - \vec{r'}}{|\vec{r} - \vec{r'}|^3}\, \mathrm{d}^3 r$$

Auf der z-Achse ist $\rho = 0$. Damit resultiert

$$\begin{aligned}
\vec{B}\{\vec{r}\} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^R \int_0^{2\pi} \\
&\quad j_0 \sin\{\phi'\}\delta\{z' - z_0\}\vec{e}_{\phi'} \times \frac{\rho\vec{e}_\rho - \rho'\vec{e}_{\rho'} + (z - z')\vec{e}_z}{\left(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\{\phi - \phi'\} + (z - z')^2\right)^{3/2}} \rho'\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\rho'\, \mathrm{d}z' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} j_0 \sin\{\phi'\}\vec{e}_{\phi'} \times \frac{-\rho'\vec{e}_{\rho'} + (z - z_0)\vec{e}_z}{\left(\rho'^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} \rho'\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} j_0 \sin\{\phi'\} \frac{\rho'\vec{e}_z + (z - z_0)\vec{e}_{\rho'}}{\left(\rho'^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} \rho'\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} j_0 \sin\{\phi'\} \frac{\rho'\vec{e}_z + (z - z_0)(\cos\{\phi'\}\vec{e}_x + \sin\{\phi'\}\vec{e}_y)}{\left(\rho'^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} \rho'\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R \int_0^{2\pi} j_0 \frac{\rho'\vec{e}_z \sin\{\phi'\} + (z - z_0)(\cos\{\phi'\}\sin\{\phi'\}\vec{e}_x + \sin^2\{\phi'\}\vec{e}_y)}{\left(\rho'^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} \rho'\, \mathrm{d}\phi'\, \mathrm{d}\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^R j_0 \frac{\pi\rho'(z - z_0)}{\left(\rho'^2 + (z - z_0)^2\right)^{3/2}} \vec{e}_y\, \mathrm{d}\rho' \\
&= \frac{\mu_0}{4} j_0 \left. \frac{-(z - z_0)}{\left(\rho'^2 + (z - z_0)^2\right)^{1/2}} \right|_0^R \vec{e}_y \\
&= \frac{\mu_0}{4} j_0 \left(\frac{(z - z_0)}{|z - z_0|} - \frac{z - z_0}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} \right) \vec{e}_y \\
&= \frac{\mu_0}{4} j_0 \left(\operatorname{sign}\{z - z_0\} - \frac{z - z_0}{\sqrt{R^2 + (z - z_0)^2}} \right) \vec{e}_y \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass für den senkrechten Einfall einer TE-Welle die Reflexion an einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl n_3 aus Luft ($n_1 = 1$) verschwindet, wenn sich auf diesem eine Schicht mit der optischen Dicke $\lambda/4$ und der Brechzahl $n_2 = \sqrt{n_3}$ befindet.

Lösung

Die Aufgabe lässt sich am einfachsten mit den in der Übung ausführlich besprochenen Transfermatrizen lösen. Die Matrix für Reflexion und Brechung lautet

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{t_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & r_{ij} \\ r_{ij} & 1 \end{pmatrix} , \tag{5}$$

die für Ausbreitung in z-Richtung

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} \exp\{-ik_{z,j}d_j\} & 0 \\ 0 & \exp\{+ik_{z,j}d_j\} \end{pmatrix} . \tag{6}$$

Es gilt

$$k_{z,j} = \frac{2\pi n_j}{\lambda} , \tag{7}$$

womit unter Zuhilfenahme der geometrischen Dicke $d_j = \frac{\lambda}{4n_j}$ der Schicht

$$\exp\{\pm ik_{z,j}d_j\} = \exp\left\{\pm i\frac{2\pi n_j}{\lambda}\frac{\lambda}{4n_j}\right\} = \exp\left\{\pm i\frac{\pi}{2}\right\} = \pm i \tag{8}$$

und damit

$$\mathbf{P}_j = \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \tag{9}$$

folgt. Für das Gesamtsystem ergibt sich damit

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \mathbf{D}_{12}\mathbf{P}_2\mathbf{D}_{23} = \frac{i}{t_{12}t_{23}} \begin{pmatrix} -1 + r_{12}r_{23} & -r_{23} + r_{12} \\ -r_{12} + r_{23} & -r_{12}r_{23} + 1 \end{pmatrix} . \tag{10}$$

Die Reflektivität des Gesamtsystems lautet

$$r = \frac{m_{21}}{m_{22}} = \frac{-r_{12} + r_{23}}{r_{12}r_{23} - 1} , \tag{11}$$

wobei die Reflexionskoeffizienten für den vorliegenden, senkrechten Einfall mit Hilfe der Fresnelgleichungen

$$r_{12} = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = \frac{1 - \sqrt{n_3}}{1 + \sqrt{n_3}} \qquad ; \qquad r_{23} = \frac{n_2 - n_3}{n_2 + n_3} = \frac{\sqrt{n_3} - n_3}{\sqrt{n_3} + n_3} \tag{12}$$

lauten. Einsetzen des Ergebnisse aus Gleichung (12) in den Zähler von Gleichung (11) ergibt Null, was die Behauptung der Aufgabenstellung bestätigt.

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{13}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{14}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{15}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{17}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{18}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{19}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{20}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{21}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2t} \tag{22}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{23}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{24}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{25}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{26}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{27}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{28}$$

$$\int \cos^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \tag{29}$$

$$\int \sin^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \tag{30}$$