Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2022-2

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$
Aufgabe 10:			$\sum$
			Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{k_0^2 n_{\mathrm{tr}}^2 - ||\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{tr}}||^2} = \sqrt{k_0^2 (n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2) + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}})^2} \tag{1}$$

gilt.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die magnetische Feldstärke einer Kugelwelle sei im freien Raum gegeben durch

$$\vec{H} = H_0 \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\theta \quad .$$

Wie lautet die zugehörige elektrische Feldstärke?

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Skizzieren Sie den Verlauf des Reflexionsfaktors einer TM polarisierten Welle in unmagnetischen Medien in Abhängigkeit vom Einfallswinkel unter der Voraussetzung, dass die Brechzahl für die einfallende Welle kleiner als die der transmittierten Welle ist.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die magnetische Induktion im freien Raum sei durch

$$\vec{B} = B_0 R \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2 + y^2}$$

gegeben. Wie groß ist der zugehörige Strom durch eine kreisförmige Fläche in der $x - y$-Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R?

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Zwei dünne, unendlich ausgedehnte, geerdete Metallplatten sind so angeordnet, dass sie sich im rechten Winkel schneiden. Eine Punktladung mit Ladung Q befinde sich im Abstand a von beiden Platten. Welche Kraft wirkt auf diese Punktladung?

Aufgabe 6 (6 Punkte)

An einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei homogenen unmagnetischen Medien wird eine ebene, TE-polarisierte Welle mit dem Reflexionsfaktor $-0,5$ reflektiert. Die Medien haben die Brechzahlen $n_{\mathrm{in}} = 1,5$ und $n_{\mathrm{tr}} = 3$.
Wie groß ist der Einfallswinkel (es genügt die Angabe von $\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}$ oder $\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}$)?

Aufgabe 7 (8 Punkte)

In einem unmagnetischen Medium, welches sich in den Halbraum $x > 0$ erstreckt, wird die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E_0 \exp\{i(\sqrt{7/2}k_0 x - \sqrt{1/2}k_0 y - \omega t)\}\vec{e}_z$ gemessen. Wie lautet das elektrische Feld im Halbraum $x < 0$ unter der Annahme, dass dieser durch $\varepsilon = \mu = 1$ charakterisiert ist?

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Ein Zylinder mit Radius a wird in Richtung seiner Achse von einer homogenen Stromdichte $\vec{j}_0$ durchflossen. In dem Zylinder befinde sich parallel zur seiner Achse ein zylinderförmiges Loch mit Radius b, dessen Mittelpunkt um $c \neq 0$ gegenüber der Achse des Zylinders verschoben ist. Es gilt $b + c < a$. Bestimmen Sie die magnetische Induktion im gesamten Raum.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial von TM Wellen in einem ideal leitfähigen Rechteckhohlleiter mit Querschnittsabmessungen von $a \times b$ lautet

$$\vec{A} = A_0 \sin\{k_x x\} \sin\{k_y y\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \quad .$$

Eine Kante des Hohlleiters fällt mit der z-Achse zusammen, er liegt im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Wie groß muss die Kreisfrequenz ω mindestens sein, damit sich wenigstens eine Welle verlustlos ($\mathrm{Im}\{\beta\} = 0$) ausbreiten kann.
Hinweis: Überlegen Sie, wie groß k_x und k_y jeweils sein müssen.

Aufgabe 10 (13 Punkte)

Auf einem Substrat mit Brechzahl $n_3 = 3$ befindet sich eine Schicht mit optischer Dicke $\lambda/4$ und Brechzahl $n_2 = 2$. Berechnen Sie die Reflektivität einer senkrecht einfallenden TE-Welle an der Gesamtstruktur unter der Annahme, dass sich diese in Luft ($n = 1$) befindet und die Welle zuerst auf die Schicht und dann auf das Substrat trifft.

Hinweis: Die geometrische Schichtdicke entspricht der optischen Schichtdicke geteilt durch den Brechungsindex.

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \quad (2)$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \quad (3)$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \quad (4)$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \quad (5)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \quad (6)$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \quad (7)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2} + \frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \quad (8)$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3} - a^2\sqrt{a^2+t^2} \quad (9)$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \quad (10)$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2 t} \quad (11)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \quad (12)$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \quad (13)$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}} + \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \quad (14)$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \quad (15)$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \quad (16)$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t} + \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \quad (17)$$

$$\int \cos^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \quad (18)$$

$$\int \sin^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t - \frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \quad (19)$$