Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2022-2

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$
Aufgabe 10:			$\sum$
			Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\sqrt{k_0^2 n_{\mathrm{tr}}^2 - ||\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2} = \sqrt{k_0^2 (n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2) + ||\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2} \tag{1}$$

gilt.

Lösung

Es folgt direkt durch die Quadrierung

$$k_0^2 n_{\mathrm{tr}}^2 - ||\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2 = k_0^2 (n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2) + ||\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2 \ ,$$

woraus sich direkt

$$k_0^2 n_{\mathrm{in}}^2 = ||\vec{n} \times \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2 + ||\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2$$

ergibt. Offensichtlich entspricht dies dem Satz des Pythagoras, womit die Behauptung geometrisch gezeigt ist.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die magnetische Feldstärke einer Kugelwelle sei im freien Raum gegeben durch

$$\vec{H} = H_0 \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\theta \quad .$$

Wie lautet die zugehörige elektrische Feldstärke?

Lösung

Eine Kugelwelle ist keine ebene Welle und daher kann hier der Zusammenhang $\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \vec{H} \times \vec{k}$ nicht herangezogen werden! Die Berechnung muss über die Maxwell-Gleichungen erfolgen.
Die elektrische Feldstärke folgt aus dem Zusammenhang

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

wobei hier $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ gilt.
In Kugelkoordinaten lautet die Rotation

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{H} = & \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin\{\theta\} H_\varphi) - \frac{\partial}{\partial \varphi} (r H_\theta) \right] \vec{e}_\text{r} \\ & + \frac{1}{r \sin\{\theta\}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} H_r - \frac{\partial}{\partial r} (r \sin\{\theta\} H_\varphi) \right] \vec{e_\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_\text{r} \right] \vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

was sich hier auf

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = ikH_0 \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\varphi$$

reduziert. Damit resultiert die elektrische Feldstärke zu

$$\vec{E} = \frac{-kH_0}{\varepsilon_0 \omega} \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\varphi \quad .$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Skizzieren Sie den Verlauf des Reflexionsfaktors einer TM polarisierten Welle in unmagnetischen Medien in Abhängigkeit vom Einfallswinkel unter der Voraussetzung, dass die Brechzahl für die einfallende Welle kleiner als die der transmittierten Welle ist.

Lösung

Für den Reflexionsfaktor von TM-Wellen gibt es drei wesentliche Punkte:

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{in}} = 0^\circ \qquad & r = \frac{n_{\text{tr}} - n_{\text{in}}}{n_{\text{tr}} + n_{\text{in}}} > 0 \\ \text{Brewsterwinkel} \qquad & r = 0 \\ \Theta_{\text{in}} = 90^\circ \qquad & r = -1 \quad . \end{aligned}$$

Daraus resultiert der Verlauf in Abbildung 1

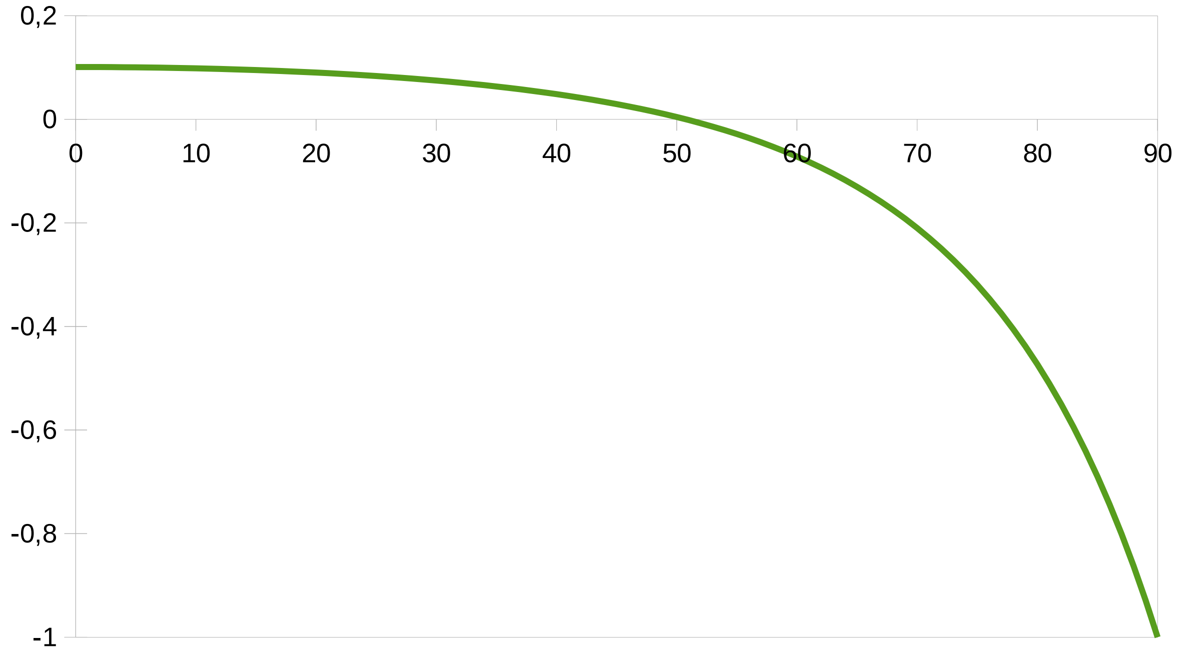

Abbildung 1: TM-Reflexionsfaktor in Abhängigkeit vom Einfallswinkelfür $n_{\text{in}} = 1$ und $n_{\text{tr}} = \sqrt{1,5}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Die magnetische Induktion im freien Raum sei durch

$$\vec{B} = B_0 R \frac{x\vec{e}_y - y\vec{e}_x}{x^2 + y^2}$$

gegeben. Wie groß ist der zugehörige Strom durch eine kreisförmige Fläche in der $x - y$-Ebene mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius R?

Lösung

Die Berechnung des Stroms durch eine Fläche erfolgt mit

$$J = \iint \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \quad .$$

In der Magnetostatik gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad ,$$

so dass

$$J = \frac{1}{\mu_0} \iint \vec{\nabla} \times \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{1}{\mu_0} \oint \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{r}$$

verwendet werden kann. In Zylinderkoordinaten ist

$$\vec{B} = B_0 \frac{R}{\rho} \vec{e}_\Phi$$

und das Linienelement für den angegebene Flächenrand wäre $\mathrm{d}\vec{r} = \rho\,\mathrm{d}\Phi\vec{e}_\Phi$ mit $\rho = R$. Das geschlossene Kurvenintegral ergibt also

$$J = 2\pi R B_0 \quad .$$

Hinweis: Wenn man die Rotation der magnetische Induktion berechnet, kommt Null heraus. Das stimmt auch, da es sich hier um das Magnetfeld eines Stromfadens handelt, dessen Stromdichte außer im Ursprung überall Null ist. Der Umweg über die Berechnung der Stromdichte kann also zu falschen Ergebnissen führen, wenn man die doppelte δ-Distribution nicht erkennt.

Aufgabe 5 (5 Punkte)

Zwei dünne, unendlich ausgedehnte, geerdete Metallplatten sind so angeordnet, dass sie sich im rechten Winkel schneiden. Eine Punktladung mit Ladung Q befinde sich im Abstand a von beiden Platten. Welche Kraft wirkt auf diese Punktladung?

Lösung

Das elektrische Feld der Punkladung muss auf beiden Platten senkrecht stehen. Dies führt direkt dazu, dass die Verteilung der Spiegelladungen der eines Quadupols entsprechen muss. Mit der Annahme, dass eine der Platten der x-z-Ebene und die andere Platte der y-z-Ebene entspricht führt dies zu folgenden Ortsvektoren und Ladungen:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_\mathrm{P} &= a\vec{e}_x + a\vec{e}_y & Q_\mathrm{P} &= Q \\
\vec{r}_\mathrm{S1} &= a\vec{e}_x - a\vec{e}_y & Q_\mathrm{S1} &= -Q \\
\vec{r}_\mathrm{S2} &= -a\vec{e}_x - a\vec{e}_y & Q_\mathrm{S2} &= Q \\
\vec{r}_\mathrm{S3} &= -a\vec{e}_x + a\vec{e}_y & Q_\mathrm{S3} &= -Q\ .
\end{aligned}$$

Die Kraft auf die Punktladung ergibt sich direkt als Summe der Einzelbeiträge:

$$\begin{aligned}
F_\mathrm{P} &= \sum_{i=1}^{3} \frac{Q_\mathrm{P} Q_{\mathrm{S}i}}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_{\mathrm{S}i}}{|\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_{\mathrm{S}i}|^3} \\
&= \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \left(\frac{\sqrt{2}}{16} - \frac{1}{4} \right) (\vec{e}_x + \vec{e}_y)
\end{aligned}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

An einer ebenen Grenzfläche zwischen zwei homogenen unmagnetischen Medien wird eine ebene, TE-polarisierte Welle mit dem Reflexionsfaktor $-0,5$ reflektiert. Die Medien haben die Brechzahlen $n_{\mathrm{in}} = 1,5$ und $n_{\mathrm{tr}} = 3$.
Wie groß ist der Einfallswinkel (es genügt die Angabe von $\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}$ oder $\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}$)?

Lösung

Der Reflektionsfakor lautet

$$r = \frac{\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} - \vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}}}{\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} + \vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}}} \quad .$$

Hier gilt jeweils

$$\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} = n_{\mathrm{in}} k_0 \cos\{\theta_{\mathrm{in}}\}$$

und

$$\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}} = \sqrt{k_0^2(n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2) + n_{\mathrm{in}}^2 k_0^2 \cos^2\{\theta_{\mathrm{in}}\}} \quad .$$

Hier muss der Kosinusterm extrahiert werden. Dafür wird zunächst r umgestellt, weil es ja bekannt ist:

$$\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}} = \vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} \frac{1-r}{1+r} = 3\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{in}}} \quad .$$

Einsetzen obiger Ausdrücke und quadrieren:

$$k_0^2(n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2) + n_{\mathrm{in}}^2 k_0^2 \cos^2\{\theta_{\mathrm{in}}\} = 9 n_{\mathrm{in}}^2 k_0^2 \cos^2\{\theta_{\mathrm{in}}\} \quad .$$

Damit resultiert

$$\cos\{\theta_{\mathrm{in}}\} = \sqrt{\frac{(n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2)}{8 n_{\mathrm{in}}^2}} = \sqrt{\frac{3}{8}} \quad .$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

In einem unmagnetischen Medium, welches sich in den Halbraum $x > 0$ erstreckt, wird die elektrische Feldstärke $\vec{E} = E_0 \exp\{i(\sqrt{7/2}k_0 x - \sqrt{1/2}k_0 y - \omega t)\}\vec{e}_z$ gemessen. Wie lautet das elektrische Feld im Halbraum $x < 0$ unter der Annahme, dass dieser durch $\varepsilon = \mu = 1$ charakterisiert ist?

Lösung

Die in der Aufgabenstellung gegebene Welle bewegt sich von der Grenzfläche weg, daher muss es sich dabei um die transmittierte Welle handeln. Der Wellenzahlvektor lässt sich direkt ablesen:

$$\vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\frac{7}{2}}k_0\vec{e}_x + \sqrt{\frac{1}{2}}k_0\vec{e}_y \ .$$

Der Brechungsindex des Halbraums $x > 0$ ergibt sich direkt aus dem Betrag des Wellenvektors:

$$n_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\frac{7}{2} + \frac{1}{2}} = 2$$

Da das E-Feld offensichtlich senkrecht zur Einfallsebene (x-y-Ebene) schwingt, handelt es sich bei der gegebenen Welle um eine TE-Welle. Die Normalkomponente der einfallenden Welle lässt sich mit

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{tr}} = \sqrt{\frac{7}{2}}k_0 = \sqrt{k_0^2(n_{\mathrm{tr}}^2 - n_{\mathrm{in}}^2) + ||\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2} = \sqrt{3k_0^2 + ||\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}}||^2}$$

$$\Rightarrow \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}} = \frac{k_0}{\sqrt{2}} \ .$$

Damit ergibt sich für den Wellenvektor der einfallenden Welle unter Ausnutzung der Stetigkeit der Tangentialkomponente

$$\vec{k}_{\mathrm{in}} = \frac{k_0}{\sqrt{2}}\vec{e}_x - \frac{k_0}{\sqrt{2}}\vec{e}_x$$

und aus der Geometrie direkt

$$\vec{k}_{\mathrm{ref}} = -\frac{k_0}{\sqrt{2}}\vec{e}_x - \frac{k_0}{\sqrt{2}}\vec{e}_x \ .$$

Die Reflektions und Transmissionskoeffizienten lassen sich direkt aus den Fresnellschen Formeln bestimmen:

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\mathrm{in}} - \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right)}{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\mathrm{in}} + \vec{k}_{\mathrm{tr}}\right)} = \frac{1 - \sqrt{7}}{1 + \sqrt{7}}$$

$$t_{\mathrm{TE}} = 1 + r_{\mathrm{TE}} = \frac{2}{1 + \sqrt{7}} \ .$$

Das Feld im Halbraum $x < 0$ lautet dann:

$$\vec{E} = \vec{E}_{\mathrm{in}} + \vec{E}_{\mathrm{ref}} = \frac{E_0 \vec{e}_z}{t_{\mathrm{TE}}} \exp\left\{ i \left(\vec{k}_{\mathrm{in}} \circ \vec{r} + \omega t \right) \right\} + \frac{E_0 \vec{e}_z}{t_{\mathrm{TE}}} r_{\mathrm{TE}} \exp\left\{ i \left(\vec{k}_{\mathrm{ref}} \circ \vec{r} + \omega t \right) \right\} \ .$$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Ein Zylinder mit Radius a wird in Richtung seiner Achse von einer homogenen Stromdichte $\vec{j}_0$ durchflossen. In dem Zylinder befinde sich parallel zur seiner Achse ein zylinderförmiges Loch mit Radius b, dessen Mittelpunkt um $c \neq 0$ gegenüber der Achse des Zylinders verschoben ist. Es gilt $b + c < a$. Bestimmen Sie die magnetische Induktion im gesamten Raum.

Lösung

Für einen homogen durchflossenen Vollzylinder mit Radius a ergibt sich aus dem Durchflutungssatz folgende magnetische Induktion in Zylinderkoordinaten:

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \vec{e}_\varphi \begin{cases} \frac{j_0 r}{2} & ; \; r < a \\ \frac{j_0 a^2}{2r} & ; \; r \geq a \; . \end{cases}$$

Es gilt

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{sowie} \quad \vec{e}_\varphi = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_x + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_y \; , \tag{2}$$

womit für die magnetische Induktion eines homogen durchflossenen Zylinders

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \frac{\vec{j}_0}{2} \begin{cases} -y\vec{e}_x + x\vec{e}_y & ; \; r < a \\ -\frac{ya^2}{x^2+y^2}\vec{e}_x + \frac{x^2}{x^2+y^2}\vec{e}_y & ; \; r \geq a \; . \end{cases}$$

in kartesischen Koordinaten folgt.
Der Zylinder mit Loch lässt sich als Superposition eines homogen durchflossenen Vollzylinders und einem verschobenen Zylinder mit umgekehrter Stromdichte darstellen, denn somit gleichen sich an der Stelle des Lochs die Ströme aus. Damit ergibt sich direkt die Lösung, wobei hier die drei Fälle:

- Fall 1: Im Zylinder außerhalb des Lochs
- Fall 2: Im Zylinder im Loch
- Fall 3: Außerhalb des Zylinders

unterschieden werden müssen.

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial von TM Wellen in einem ideal leitfähigen Rechteckhohlleiter mit Querschnittsabmessungen von $a \times b$ lautet

$$\vec{A} = A_0 \sin\{k_x x\} \sin\{k_y y\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_z \quad .$$

Eine Kante des Hohlleiters fällt mit der z-Achse zusammen, er liegt im ersten Quadranten des kartesischen Koordinatensystems. Wie groß muss die Kreisfrequenz ω mindestens sein, damit sich wenigstens eine Welle verlustlos ($\mathrm{Im}\{\beta\} = 0$) ausbreiten kann.
Hinweis: Überlegen Sie, wie groß k_x und k_y jeweils sein müssen.

Lösung

Aus der Wellengleichung folgt

$$k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + \beta^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$$

und damit

$$\beta = \sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 - k_\mathrm{x}^2 - k_\mathrm{y}^2} \quad .$$

Die Bedingung für verlustlose Ausbreitung erfordert

$$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \geq k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 \quad .$$

Nun muss eine Aussage zu der Größe der Wellenzahlen gefunden werden. Diese resultieren aus den Randbedingungen $\vec{E}_\mathrm{tan} = 0$ an den Hohlleiterwänden. Die Berechnung der elektrischen Feldstärke erfolgt über

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \mu_0 \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad .$$

Damit resultiert wegen $\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} &= (k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + \beta^2) \frac{A_0}{\varepsilon_0 \mu_0} \sin\{k_\mathrm{x} x\} \sin\{k_\mathrm{y} y\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_z \\ \vec{E} &= \frac{i}{\omega} \sin\{k_\mathrm{x} x\} \sin\{k_\mathrm{y} y\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_z \quad . \end{aligned}$$

Alternativ kann Lorentzeichung mit $\Phi_\mathrm{el} = 0$ vorausgesetzt werden und es resultiert obiges Ergebnis direkt aus $\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$.
Nimmt man nun an, dass die Breite des Hohlleiters (in x-Richtung) a ist und die Höhe (y-Richtung) b, müssen die Bedingungen $k_\mathrm{x} = m\frac{\pi}{a}$ und $k_\mathrm{y} = n\frac{\pi}{b}$ eingehalten werden, wobei $m > 0$ und $n > 0$ gelten. Somit resultiert für die kleinstmögliche Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0}} \sqrt{\left(\frac{\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{b}\right)^2} \quad .$$

Aufgabe 10 (13 Punkte)

Auf einem Substrat mit Brechzahl $n_3 = 3$ befindet sich eine Schicht mit optischer Dicke $\lambda/4$ und Brechzahl $n_2 = 2$. Berechnen Sie die Reflektivität einer senkrecht einfallenden TE-Welle an der Gesamtstruktur unter der Annahme, dass sich diese in Luft ($n = 1$) befindet und die Welle zuerst auf die Schicht und dann auf das Substrat trifft.
Hinweis: Die geometrische Schichtdicke entspricht der optischen Schichtdicke geteilt durch den Brechungsindex.

Lösung

Dieses Problem lässt sich mit der ausführlich in der Übung besprochenen Transfermatrix-Methode berechnen. Die Matrizen lauten bei senkrechtem Einfall:

$$\mathbf{D}_{ij} = \frac{1}{t_{ij}} \begin{pmatrix} 1 & r_{ij} \\ r_{ij} & 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$\mathbf{P}_j = \frac{1}{t_{ij}} \begin{pmatrix} \exp\{-ik_{z,j}d_j\} & 0 \\ 0 & \exp\{ik_{z,j}d_j\} \end{pmatrix} ,$$

wobei sich für letztere mit der gegebenen Schichtdicke direkt

$$\mathbf{P}_j = \frac{1}{t_{ij}} \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$$

ergibt.
Für die Wellenausbreitung in des gesamten Struktur ergibt sich damit die Matrix

$$\begin{aligned} \mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} &= \mathbf{D}_{12}\mathbf{P}_2\mathbf{D}_{23} \\ &= \frac{i}{t_{12}t_{23}} \begin{pmatrix} r_{12}r_{23} - 1 & r_{12} - r_{23} \\ r_{23} - r_{12} & 1 - r_{12}r_{23} \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

Die beiden TE-Reflektionskoeffizienten ergeben sich zu

$$r_{12} = \frac{1-2}{1+2} = -\frac{1}{3} , \qquad r_{23} = \frac{2-2}{2+3} = -\frac{1}{5} .$$

Daraus folgt für die Reflektivität der Gesamtstruktur für eine senkrecht einfallende TE-Welle

$$r_{\text{ges}} = \frac{m_{21}}{m_{11}} = \frac{r_{23} - r_{12}}{r_{12}r_{23} - 1} = -\frac{1}{7}$$

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{5}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{8}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{9}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2t} \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{14}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{15}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{18}$$

$$\int \cos^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \tag{19}$$

$$\int \sin^2\{t\}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\sin\{2t\}\right) \tag{20}$$