Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei das elektrodynamische Feld in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E} = E_0 2zt\vec{e}_\rho \ .$$

Bestimmen Sie die Stromdichte im gesamten Raum.

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_V + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \vec{j}_V = - \frac{1}{\mu_0} \underbrace{\int \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} \, dt}_{= \frac{E_0 t^2}{\rho} \vec{e}_z} - \varepsilon_0 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \vec{E}}_{= 2 E_0 z \vec{e}_\rho}$$

$$= - \frac{E_0 t^2}{\mu_0 \rho} \vec{e}_z - 2 \varepsilon_0 E_0 z \vec{e}_\rho$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die magnetische Induktion in einem Zylinder mit Durchmesser d beträgt

$$\vec{B} = B_0 \frac{2\rho}{d} \left(\cos\{2\Phi\}\vec{e}_\rho + \sin\{2\Phi\}\vec{e}_\Phi\right) \quad .$$

Der Zylinder hat die relative Permeabilität μ, seine Achse fällt mit der z-Achse des Koordinatensystems zusammen.
Welche magnetische Induktion herrscht außerhalb des Zylinders auf seiner stromlosen Oberfläche?

Lösung

Aus den Stedigkeitsbedingungen an der Oberfläche

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{j}_\mathrm{S} \\ \vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \end{aligned}$$

resultiert mit $\vec{n} = \vec{e}_\rho$ wegen $\vec{j}_\mathrm{S} = 0$ für $\rho = d/2$

$$\begin{aligned} \vec{B}_2 &= (\vec{n} \circ \vec{B}_2)\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{B}_2) \times \vec{n} \\ &= (\vec{n} \circ \vec{B}_1)\vec{n} + \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_2) \times \vec{n} \\ &= (\vec{n} \circ \vec{B}_1)\vec{n} + \mu_0(\vec{n} \times \vec{H}_1) \times \vec{n} \\ &= (\vec{n} \circ \vec{B}_1)\vec{n} + \frac{1}{\mu}(\vec{n} \times \vec{B}_1) \times \vec{n} \\ &= B_0 \left(\cos\{2\Phi\}\vec{e}_\rho + \frac{1}{\mu}\sin\{2\Phi\}\vec{e}_\Phi\right) \end{aligned}$$

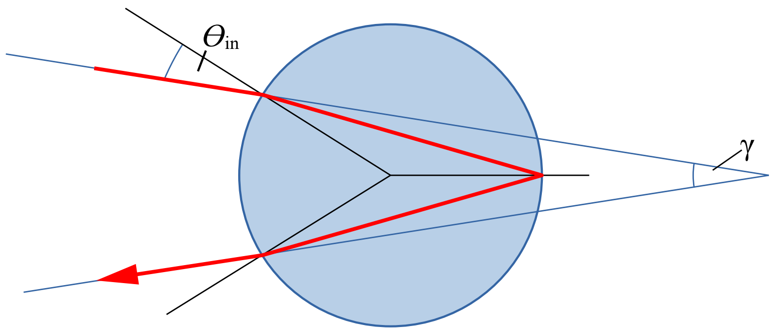


Abbildung 1: Modell des Durchlaufs eines Lichtstrahls durch einen Wassertropfen

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Regenbogen entsteht dadurch, dass die Lichtstrahlen der Sonne in Wassertropfen eintreten und auf Grund der wellenlängenabhängigen Brechzahl an unterschiedlichen Orten aus dem Tropfen austreten. Als Modell soll der Wassertropfen hier als Kugel angenommen werden. Der Lichtstrahl verläuft gemäß Abbildung 1. Wie groß ist der Winkel γ zwischen eintreffendem und austretenden Strahl als Funktion des Einfallswinkels, wenn die Brechzahl des Wassers mit n angenommen werden kann?

Lösung

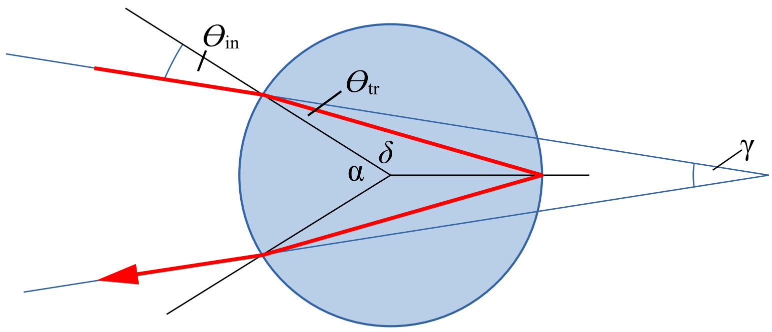


Abbildung 2: Modell des Durchlaufs eines Lichtstrahls durch einen Wassertropfen mit Winkeln für die Berechnung

Der Winkel γ ergibt sich zu

$$\gamma = \alpha - 2\theta_{\text{in}} \quad ,$$

wobei

$$\alpha = 2\pi - 2\delta$$

und

$$\delta = \pi - 2\theta_{\mathrm{tr}}$$

zu nehmen ist. Insgesamt resultiert also

$$\begin{aligned}
\gamma &= 4\theta_{\mathrm{tr}} - 2\theta_{\mathrm{in}} \\
&= 4\arcsin\left\{\frac{1}{n}\sin\{\theta_{\mathrm{in}}\}\right\} - 2\theta_{\mathrm{in}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Medium sei in Kugelkoordinaten durch

$$\varepsilon = 1 + \frac{r_0}{r}\,, \qquad \mu = 1$$

charakterisiert. In diesem befindet sich das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 r \cot\theta \vec{e}_\theta\ .$$

Bestimmen Sie die Ladung innerhalb einer Kugel mit beliebigem Radius r_1.

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho = \vec{\nabla}\cdot(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}) = \vec{\nabla}\cdot\left(\left(1+\frac{r_0}{r}\right)E_0 r\cot\theta\,\vec{e}_\theta\right)$$

$$\cancel{= \vec{\nabla}\cdot\left(E_0 r\cot\theta\,\vec{e}_\theta + E_0 r_0\cot\theta\,\vec{e}_\theta\right)}$$

$$= \frac{1}{\cancel{r}\sin\theta}\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\cancel{r}\cdot\cancel{\sin\theta}\left(1+\frac{r_0}{r}\right)E_0\cancel{r}\,\overset{\cos\theta}{\cancel{\cot\theta}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{\sin\theta}}\varepsilon_0\left(1+\frac{r_0}{r}\right)E_0\left(-\overset{1}{\cancel{\sin\theta}}\right)$$

$$= -E_0\varepsilon_0\left(1+\frac{r_0}{r}\right)$$

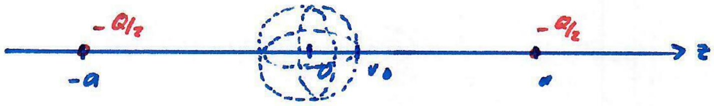
$$Q = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{r_1} -\left(1+\frac{r_0}{r}\right)\varepsilon_0 E_0\, r^2\sin\theta\, dr\, d\varphi\, d\theta$$

$$= -2\,\varepsilon_0 E_0\cdot 2\pi\int_0^{r_1}(r^2+r_0 r)\,dr$$

$$= -4\pi\,\varepsilon_0 E_0\left(\frac{1}{3}r_1^3 - \frac{1}{2}r_0 r_1^2\right)$$

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Eine homogene, nicht leitfähige Kugel mit Radius r_0 und $\varepsilon = 1$ besitzt die Gesamtladung Q. Auf einer Achse, welche den Mittelpunkt der Kugel schneidet, befinden sich zwei Punktladung mit jeweils der Ladung $-Q/2$ im Abstand $a > r_0$ vom Mittelpunkt der Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.



$$\vec{E}_{Punktladungen} = -\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z-a)\vec{e}_z}{(x^2+y^2+(z-a)^2)^{3/2}} + \frac{x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + (z+a)\vec{e}_z}{(x^2+y^2+(z+a)^2)^{3/2}}\right)$$

$$\vec{E}_{Kugel} = \frac{Q_{ein}}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} = \begin{cases} \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\cancel{|\vec{r}|^3}}{r_0^{\,3}}\cdot\dfrac{\vec{r}}{\cancel{|\vec{r}|^3}} & r \leq r_0 \\[2ex] \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\,\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3} & r \geq r_0 \end{cases}$$

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_{Punktladungen} + \vec{E}_{Kugel}$$

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Eine ebene Welle mit Kreisfrequenz ω trifft auf die Ebene $y = 0$. Sie verläuft in der $x-y$-Ebene in einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl $1,5$. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke ist $E_0(3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)$. Wie groß ist der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle, wenn diese in einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 2 läuft?

Lösung

Die Welle läuft in der x-y-Ebene, also gilt $\vec{k} = k_\mathrm{x}\vec{e}_x + k_\mathrm{y}\vec{e}_y$ und wegen $n = 1,5$ für die Länge von $\vec{k}$ $\|\vec{k}\|^2 = k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 = (1,5k_0)^2$.
Aus $\vec{k} \circ \vec{E} = 0$ ergibt sich $3k_\mathrm{x} - 4k_\mathrm{y} = 0$ und damit $\left(1 + \left(\frac{3}{4}\right)^2\right) k_\mathrm{x}^2 = (1,5k_0)^2$, also $k_\mathrm{x} = 1,2k_0$, $k_\mathrm{y} = 0,9$.
Mit $\vec{n} = \vec{e}_y$ ist $\vec{e}_p = \vec{e}_x$ ist $\vec{e}_p \circ \vec{k_\mathrm{tr}} = k_\mathrm{tr,p} = 1,2k_0$.
Für die Normalkomponente von $\vec{k_\mathrm{tr}}$ ergibt sich $\vec{n} \circ \vec{k_\mathrm{tr}} = \sqrt{(2k_0)^2 - (1,2k_0)^2} = 1,6k_0$.

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Eine strom- und ladungsfreie Grenzfläche wird dadurch beschrieben, dass sie den Ursprung schneidet und die beiden Vektoren $\vec{e}_x - \vec{e}_y$ sowie $\vec{e}_y - \vec{e}_z$ in dieser liegen. Eine Welle $\vec{E} = E_0 \exp\{i(k_0 x - \omega t)\}\,\vec{e}_z$ bewege sich auf diese Grenzfläche zu. Bestimmen Sie den Wellenvektor der transmittierten Welle unter der Annahme, dass die Brechzahl im transmittierten Bereich 2 beträgt.

$$\vec{n} = \frac{(\vec{e}_x - \vec{e}_y) \times (\vec{e}_y - \vec{e}_z)}{\|\cdot\|} = \frac{\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{3}}$$

$$\vec{k}_{in} = k_0 \vec{e}_x$$

$$\vec{e}_p = \frac{(\vec{n} \times \vec{k}_{in}) \times \vec{n}}{\|\vec{n} \times \vec{k}_{in}\|} = \frac{2\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z}{\sqrt{6}}$$

$$\vec{k}_{tr} = (\vec{e}_p \circ \vec{k}_{in})\,\vec{e}_p + \sqrt{k_0^2 n_{tr}^2 - k_0^2 n_{in}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{in})^2}\;\vec{n}$$

$$= \frac{k_0}{3}(2\vec{e}_x - \vec{e}_y - \vec{e}_z) + \frac{k_0\sqrt{10}}{3}(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$$

$$= \frac{k_0}{3}\left((2+\sqrt{10})\,\vec{e}_x + (\sqrt{10}-1)\,\vec{e}_y + (\sqrt{10}-1)\,\vec{e}_z\right)$$

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Eine ebene Welle fällt aus Luft senkrecht auf die ebene Grenzfläche zu einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 9. Die Amplitude der magnetischen Feldstärke der einfallenden Welle ist H_0. Berechnen Sie die komplexen Poyntingvektoren $\vec{S}_\mathrm{c} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen.

Lösung

Bei senkrechtem Einfall kann willkürlich angenommen werden, das es sich um eine TM-Welle handelt. Dann ist der Reflexionsfaktor für die hier vorliegenden unmagnetischen Medien durch

$$r = \frac{9-1}{9+1} = 0,8$$

gegeben. Nimmt man nun die Grenzfläche z.B. bei $z = 0$ an, heißt das, dass die Ausbreitungsrichtung der einfallenden Welle $\vec{e}_z$ und das magnetische Feld

$$\vec{H}_\mathrm{in} = H_0 \vec{e}_y$$

sein könnte. Das zugehörige magnetische Feld wäre dann

$$\vec{E}_\mathrm{in} = E_0 \vec{e}_x = \frac{k_0}{\omega \varepsilon_0} H_0 \vec{e}_x = Z_0 H_0 \vec{e}_x \quad .$$

Für beide Feldstärken gilt der Ausbreitungsterm $\exp\{i(\vec{k}_\mathrm{in} \circ \vec{r} - \omega t)\}$. Der komplexe Poyntingvektor ist entsprechend

$$\vec{S}_\mathrm{c,in} = Z_0 H_0^2 \vec{e}_z \quad .$$

Die reflektierte Welle hat eine um den Reflektionsfaktor kleinere Amplitude. Außerdem ist die Ausbreitungsrichtung und das elektrische Feld umgekehrt. Damit resultiert dann

$$\vec{S}_\mathrm{c,ref} = -r^2 Z_0 H_0^2 \vec{e}_z = -0,64 Z_0 H_0^2 \vec{e}_z \quad .$$

Die magnetische Feldstärke der transmittierten Welle hat die Amplitude

$$\vec{H}_\mathrm{tr} = t \vec{H}_\mathrm{in} = 1,8 H_0 \vec{e}_y \quad .$$

Die zugehörige elektrische Feldstärke hat mit $\vec{k}_\mathrm{tr} = 9 k_0 \vec{e}_z$ die Amplitude

$$\vec{E}_\mathrm{tr} = \frac{1}{n_\mathrm{tr}} t Z_0 H_0 \vec{e}_x = 0,2 Z_0 H_0 \vec{e}_x \quad .$$

Damit resultiert der Poyntingvektor zu

$$\vec{S}_{\mathrm{c,tr}} = t^2 \frac{z_0}{n_{\mathrm{tr}}} H_0^2 \vec{e}_z = 0,36 Z_0 H_0^2 \vec{e}_z \quad .$$

Anmerkung:
Die massive Vergrößerung der transmittierten magnetischen Feldstärke wird durch die gleichzeitige Verringerung der elektrischen Feldstärke kompensiert. Die Annahme, dass ein großes Feld auch gleichzeitig viel Leistung transportiert, kann irreführend sein.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Das magnetische Vektorpotential in einem ideal leitfähigen Rechteckhohlleiter mit Querschnitt $a \cdot b$ laute

$$\vec{A} = A_0 \left(\sin\{k_x x\} \, sin\{k_y y\} \exp\{i(\omega t - k_z z)\}\right) \vec{e}_z \, .$$

Bestimmen Sie k_x, k_y und k_z. Im Hohlleiter gelte $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma = 0$, außerdem liege eine Ecke des Hohhleiters im Ursprung.

Hinweis: Was muss für die Stetigkeit des elektrischen Feldes an den Grenzflächen gelten?

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} A_0 \sin\{k_x x\} \, k_y \cos\{k_y y\} \exp\{\cdot\} \\ -A_0 \, k_x \cos\{k_x x\} \sin\{k_y y\} \exp\{\cdot\} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} = \begin{pmatrix} A_0 k_x \cos\{\cdot\} \sin\{\cdot\} (-ik_z) \exp\{\cdot\} \\ A_0 \sin\{\cdot\} \, k_y \cos\{\cdot\} \, (-ik_z) \exp\{\cdot\} \\ A_0 k_x^2 \sin\{\cdot\} \sin\{\cdot\} \exp\{\cdot\} + A_0 k_y^2 \sin\{\cdot\} \sin\{\cdot\} \exp\{\cdot\} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{E} = -\frac{A_0}{\varepsilon \varepsilon_0 \, \omega} \begin{pmatrix} k_x k_z \cos\{\cdot\} \sin\{\cdot\} \exp\{\cdot\} \\ k_y k_z \sin\{\cdot\} \cos\{\cdot\} \exp\{\cdot\} \\ i \cdot \sin\{\cdot\} \sin\{\cdot\} \exp\{\cdot\} (k_x^2 + k_y^2) \end{pmatrix}$$

$$E_{tan} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad E_x\{y=b\} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad k_x \cos\{k_x x\} \sin\{k_y b\} \, k_z \exp\{\cdot\} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad k_y b = \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad E_y\{x=a\} \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad \sin\{k_x a\} \, k_y \cos\{k_y y\} \, k_z \exp\{\cdot\} \overset{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad k_x a = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \quad k_x = \frac{\pi m}{a}, \quad m \in \mathbb{Z}$$

$$k_y = \frac{\pi n}{b}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$k_z = \sqrt{k_0^2 - k_x^2 - k_y^2}$$

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{1}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{2}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{5}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{6}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2 t} \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{11}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{12}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{13}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{16}$$