Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2023-1

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$

Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Gegeben sei das elektrodynamische Feld in Zylinderkoordinaten

$$\vec{E} = E_0 2zt\vec{e}_\rho \ .$$

Bestimmen Sie die Stromdichte im gesamten Raum.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Die magnetische Induktion in einem Zylinder mit Durchmesser d beträgt

$$\vec{B} = B_0 \frac{2\rho}{d} \left(\cos\{2\Phi\} \vec{e}_\rho + \sin\{2\Phi\} \vec{e}_\Phi \right) \quad .$$

Der Zylinder hat die relative Permeabilität μ, seine Achse fällt mit der z-Achse des Koordinatensystems zusammen.
Welche magnetische Induktion herrscht außerhalb des Zylinders auf seiner stromlosen Oberfläche?

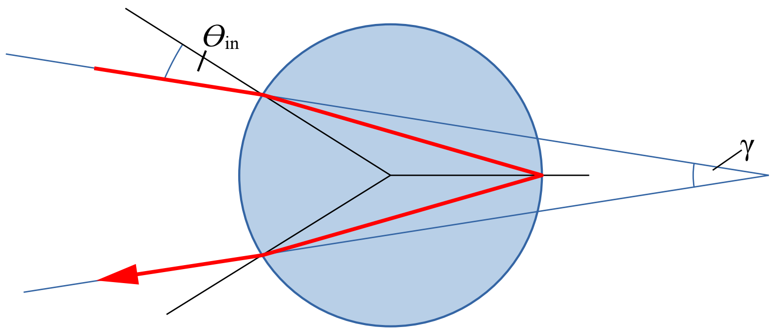

Abbildung 1: Modell des Durchlaufs eines Lichtstrahls durch einen Wassertropfen

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Ein Regenbogen entsteht dadurch, dass die Lichtstrahlen der Sonne in Wassertropfen eintreten und auf Grund der wellenlängenabhängigen Brechzahl an unterschiedlichen Orten aus dem Tropfen austreten. Als Modell soll der Wassertropfen hier als Kugel angenommen werden. Der Lichtstrahl verläuft gemäß 1. Wie groß ist der Winkel γ zwischen eintreffendem und austretenden Strahl als Funktion des Einfallswinkels, wenn die Brechzahl des Wassers mit n angenommen werden kann?

Aufgabe 4 (6 Punkte)

Ein Medium sei in Kugelkoordinaten durch

$$\varepsilon = 1 + \frac{r_0}{r} \,, \qquad \mu = 1$$

charakterisiert. In diesem befindet sich das elektrische Feld

$$\vec{E} = E_0 r \cot\theta \vec{e}_\theta \ .$$

Bestimmen Sie die Ladung innerhalb einer Kugel mit beliebigem Radius r_1.

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Eine homogene, nicht leitfähige Kugel mit Radius r_0 und $\varepsilon = 1$ besitzt die Gesamtladung Q. Auf einer Achse, welche den Mittelpunkt der Kugel schneidet, befinden sich zwei Punktladung mit jeweils der Ladung $-Q/2$ im Abstand $a > r_0$ vom Mittelpunkt der Kugel. Berechnen Sie das elektrische Feld im gesamten Raum.

Aufgabe 6 (6 Punkte)

Eine ebene Welle mit Kreisfrequenz ω trifft auf die Ebene $y = 0$. Sie verläuft in der $x - y$-Ebene in einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl $1,5$. Die Amplitude der elektrischen Feldstärke ist $E_0(3\vec{e}_x - 4\vec{e}_y)$. Wie groß ist der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle, wenn diese in einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 2 läuft?

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Eine strom- und ladungsfreie Grenzfläche wird dadurch beschrieben, dass sie den Ursprung schneidet und die beiden Vektoren $\vec{e}_x - \vec{e}_y$ sowie $\vec{e}_y - \vec{e}_z$ in dieser liegen. Eine Welle $\vec{E} = E_0 \exp\left\{i\left(k_0 x - \omega t\right)\right\} \vec{e_z}$ bewege sich auf diese Grenzfläche zu. Bestimmen Sie den Wellenvektor der transmittierten Welle unter der Annahme, dass die Brechzahl im transmittierten Bereich 2 beträgt.

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Eine ebene Welle fällt aus Luft senkrecht auf die ebene Grenzfläche zu einem unmagnetischen Medium mit Brechzahl 9. Die Amplitude der magnetischen Feldstärke der einfallenden Welle ist H_0. Berechnen Sie die komplexen Pointingvektoren $\vec{S}_\mathrm{c} = \vec{E} \times \vec{H}^*$ der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen.

Aufgabe 9 (12 Punkte)

Das magnetische Vektorpotential in einem ideal leitfähigen Rechteckhohlleiter mit Querschnitt $a \cdot b$ laute

$$\vec{A} = A_0 \left(\sin\{k_x x\}\, sin\{k_y y\} \exp\{i(\omega t - k_z z)\}\right) \vec{e}_z \ .$$

Bestimmen Sie k_x, k_y und k_z. Im Hohlleiter gelte $\varepsilon = \mu = 1$ und $\sigma = 0$, außerdem liege eine Ecke des Hohhleiters im Ursprung.

Hinweis: Was muss für die Stetigkeit des elektrischen Feldes an den Grenzflächen gelten?

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{1}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{2}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t-\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2}-\frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{5}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{6}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3}-a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{8}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{9}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2t} \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{11}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{12}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}}+\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{13}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2}+\frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{14}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}}-\frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{15}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t}+\frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{16}$$