Elektromagnetische Felder und Wellen: Klausur 2023-2 / PO23

Aufgabe 1:	Aufgabe 2:	Aufgabe 3:	$\sum$
Aufgabe 4:	Aufgabe 5:	Aufgabe 6:	$\sum$
Aufgabe 7:	Aufgabe 8:	Aufgabe 9:	$\sum$
Aufgabe 10:	Aufgabe 11:	Aufgabe 12:	$\sum$
			Gesamtpunktzahl:

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit Radius a, welche sich im ansonsten freien Raum befindet. Diese Kugel habe eine infinitesimal dünne, ideal leitfähige, geerdete Schicht an ihrer Oberfläche. Des weiteren befindet sich ein wiederum kugelförmiges Loch mit Radius $b << a$ und Abstand c vom Mittelpunkt vollständig innerhalb der Kugel. Berechnen sie die elektrische Feldstärke außerhalb der Kugel.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die x-Komponente der elektrische Feldstärke in einem Medium mit Brechungsindex $n = 2$ lautet

$$E_x = E_0 \exp\left\{i\left(k_0 x + k_y y - \omega t\right)\right\} \ . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die y-Komponente des elektrischen Feldes

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Im freien Raum befindet sich eine gleichseitige Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. An den Ecken der Basis befinden sich die Punktladungen Q, 5Q und -4Q. Wie groß muss eine Punktladung an der Spitze der Pyramide sein, damit das elektrostatische Potenzial im Mittelpunkt verschwindet?

Aufgabe 4 (3 Punkte)

In einem strom- und ladungsfreien Raum existiert die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = H_0 \left(\frac{a}{b} \sin\left\{3\pi \frac{x}{a}\right\} \cos\left\{\pi \frac{y}{b}\right\} \vec{e}_x - 3\cos\left\{3\pi \frac{x}{a}\right\} \sin\left\{\pi \frac{y}{b}\right\} \vec{e}_y \right) \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \quad .$$

Bei $x = a$ befindet sich eine ideal leitende Metallwand.
Welche Stromdichte existiert auf deren Oberfläche?

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Drei unendlich ausgedehnte, infinitesimal dünne Platten mit Flächenladungsdichte ϱ_0 seien so angeordnet, dass sie sich jeweils senkrecht schneiden. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke im gesamten Raum.

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Die magnetische Feldstärke einer Kugelwelle sei im freien Raum gegeben durch

$$\vec{H} = H_0 \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\theta \quad .$$

Wie lautet die zugehörige elektrische Feldstärke?

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Ein exemplarischer Strahlengang durch eine plankonkave Linse mit Brechzahl $n < 2$ und Krümmungsradius R ist in Abbildung 1 dargestellt.

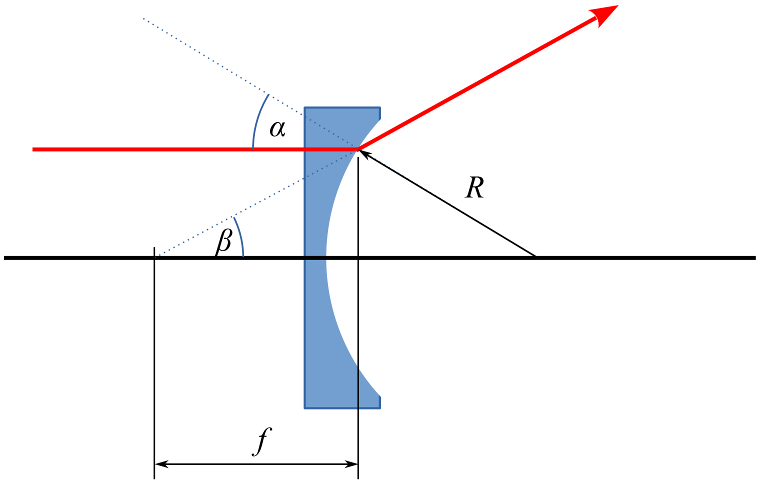

Abbildung 1: Strahlengang durch eine plankonkave Linse

- Berechnen Sie den Fokalabstand f unter Angabe der beiden eingetragenen Winkel α und β.

- Für achsnahe Strahlen kann angenommen werden, dass der Einfallswinkel α sehr klein gegen 1 ist. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung

$$f = \frac{R}{n-1}$$

gilt.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Bestimmen sie das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ auf der Mittelpunktachse einer Leiterschleife mit Radius a unter der Annahme, dass die Stromdichte entlang des Umfangs eine volle Periode eines Sinus durchläuft.

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Ein unendlich langer, homogen vom Gesamtstrom J in Richtung der Achse durchflossener Vollzylinder mit Radius a sei koaxial von einem infinitesimal dünnen, unendlich langen, zylinderförmigen Leiter mit Radius b umgeben. Durch diesen fließt in Richtung der Achse ebenfalls der Strom J, jedoch in entgegengesetzter Richtung zum Innenleiter. Diese Anordnung ist von einem weiteren koaxialen, infinitesimal dünnen, unendlich langen, zylinderförmigen Leiter mit Radius c umgeben, durch welchen ebenfalls der Gesamtstrom J in Richtung der Achse fließt, dieses mal in die gleiche Richtung wie der Strom im Innenleiter. Berechnen sie die magnetische Induktion im gesamten Raum.

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Ein Regenbogen entsteht dadurch, dass die Lichtstrahlen der Sonne in Wassertropfen eintreten und auf Grund der wellenlängenabhängigen Brechzahl an unterschiedlichen Orten aus dem Tropfen austreten. Der doppelte Regenbogen entsteht durch zweimalige Reflexion im Tropfen und steht daher „auf dem Kopf“. Als Modell soll der Wassertropfen hier als Kugel angenommen werden. Der Lichtstrahl verläuft gemäß Abbildung 2. Wie groß ist der Winkel γ zwischen eintreffendem und austretenden Strahl als Funktion des Einfallswinkels, wenn die Brechzahl des Wassers mit n angenommen werden kann?

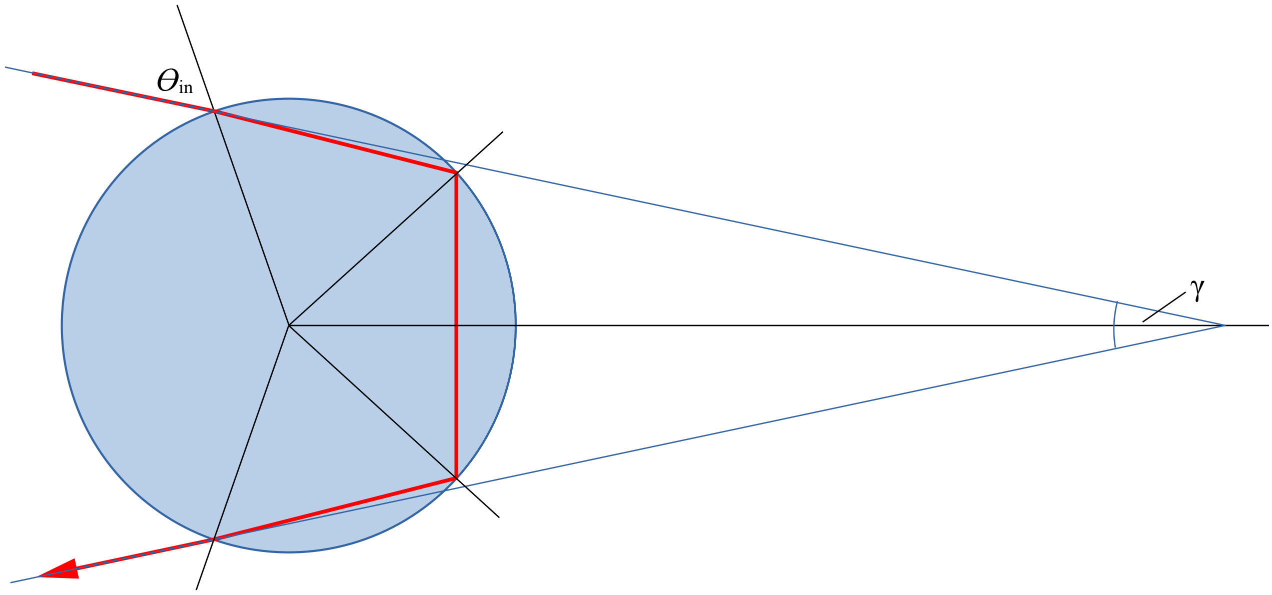

Abbildung 2: Modell des Durchlaufs eines Lichtstrahls durch einen Wassertropfen für den zweiten Regenbogen.

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Eine ebene Welle

$$\vec{H} = H_0(\vec{e}_z - 3\vec{e}_x) \exp\left\{ i \left(\frac{k_0}{\sqrt{14}} (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \circ \vec{r} - \omega t \right) \right\} \tag{2}$$

fällt auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit $\varepsilon = 4$, welche dadurch charakterisiert ist, dass die Vektoren $3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ und $2\vec{e}_x - \vec{e}_y$ in ihr liegen. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke der transmittierten Welle.

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Eine TE Welle wird an der Grenze $z = 0$ zwischen zwei unmagnetischen Medien mit dem Faktor $0,28$ reflektiert. Die elektrische Feldstärke der tansmittierten Welle lautet

$$\vec{E}_{\mathrm{tr}} = 1,28 E_0 \exp\{i(\omega t - k_0(1,2x - 0,9z))\}\vec{e}_y \quad .$$

Wie lautet die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle?

Hinweise

$$\int \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a}\arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{3}$$

$$\int \frac{t}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{4}$$

$$\int \frac{t^2}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = t - \arctan\left\{\frac{t}{a}\right\} \tag{5}$$

$$\int \frac{t^3}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{t^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln\left\{a^2+t^2\right\} \tag{6}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{7}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} \tag{8}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{2}\sqrt{a^2+t^2} + \frac{a^2}{2}\ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{9}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{a^2+t^2}^3}{3} - a^2\sqrt{a^2+t^2} \tag{10}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{11}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}}\,\mathrm{d}t = \frac{-\sqrt{a^2+t^2}}{a^2 t} \tag{12}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{t}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} \tag{13}$$

$$\int \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{14}$$

$$\int \frac{t^2}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-t}{\sqrt{a^2+t^2}} + \ln\{t+\sqrt{a^2+t^2}\} \tag{15}$$

$$\int \frac{t^3}{\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \sqrt{a^2+t^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2+t^2}} \tag{16}$$

$$\int \frac{1}{t\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2+t^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left\{\frac{a+\sqrt{a^2+t^2}}{t}\right\} \tag{17}$$

$$\int \frac{1}{t^2\sqrt{a^2+t^2}^3}\,\mathrm{d}t = \frac{-1}{a^4}\left(\frac{\sqrt{a^2+t^2}}{t} + \frac{t}{\sqrt{a^2+t^2}}\right) \tag{18}$$