Aufgabe 1 (3 Punkte)

Gegeben sei eine homogen geladene Kugel mit Radius a, welche sich im ansonsten freien Raum befindet. Diese Kugel habe eine infinitesimal dünne, ideal leitfähige, geerdete Schicht an ihrer Oberfläche. Des weiteren befindet sich ein wiederum kugelförmiges Loch mit Radius $b << a$ und Abstand c vom Mittelpunkt vollständig innerhalb der Kugel. Berechnen sie die elektrische Feldstärke außerhalb der Kugel.

Lösung

Geerdete Schicht an Oberfläche $\Rightarrow \vec{E}_{\text{außen}} = 0$

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Die x-Komponente der elektrische Feldstärke in einem Medium mit Brechungsindex $n = 2$ lautet

$$E_x = E_0 \exp\left\{i\left(k_0 x + k_y y - \omega t\right)\right\} \ . \tag{1}$$

Bestimmen Sie die y-Komponente des elektrischen Feldes

Lösung

$$\vec{k} = 2k_0 = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{k_0^2 + k_y^2} \Rightarrow k_y^2 = 3k_0^2 \Rightarrow k_y = \sqrt{2}\,k_0$$

$$\vec{E} \cdot \vec{k} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow E_x k_x + E_y k_y \overset{!}{=} 0 \Rightarrow E_y = -\frac{E_x k_x}{k_y} = -\frac{E_x}{\sqrt{3}}$$

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Im freien Raum befindet sich eine gleichseitige Pyramide mit dreieckiger Grundfläche. An den Ecken der Basis befinden sich die Punktladungen Q, 5Q und -4Q. Wie groß muss eine Punktladung an der Spitze der Pyramide sein, damit das elektrostatische Potenzial im Mittelpunkt verschwindet?

Lösung

Das Potenzial von mehreren Punktladungen resultiert aus

$$V\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} \frac{Q_i}{|\vec{r} - \vec{r_i}|} \quad .$$

Hier soll das Potenzial in der Mitte der Pyramide verschwinden. An diesem Punkt sind alle Abstände $|\vec{r} - \vec{r_i}|$ gleich groß, so dass

$$\sum_{i=1}^{4} Q_i = 0$$

gefordert wird. Mit den angegebenen Ladungen resultiert für die gesuchte Ladung $Q_4 = -2Q$.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

In einem strom- und ladungsfreien Raum existiert die magnetische Feldstärke

$$\vec{H} = H_0 \left(\frac{a}{b} \sin\left\{3\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_x - 3\cos\left\{3\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_y \right) \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \quad .$$

Bei $x = a$ befindet sich eine ideal leitende Metallwand.
Welche Stromdichte existiert auf deren Oberfläche?

Lösung

Der Flächenstrom hängt mit dem magnetischen Feld an der Grenzfläche gemäß

$$\vec{j}_\mathrm{S} = \vec{n} \times \left(\vec{H}_2 - \vec{H}_1 \right)\Big|_\mathrm{Grenze}$$

zusammen. In einer ideal leitfähigen Metallwand wird das Feld zu Null, weil dort keine elektrischen Felder existieren und in der Folge auch keine dynamischen Magnetfelder. Es gilt also $\vec{H}_2 = 0$ und $\vec{H}_1 = \vec{H}$. Der Normalenvektor ist hier $\vec{n} = \vec{e}_x$. Damit resultiert

$$\begin{aligned}
\vec{j}_\mathrm{S} &= -\vec{e}_x \times \left(H_0 \left(\frac{a}{b} \sin\left\{3\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_x - 3\cos\left\{3\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_y \right)\right)\Bigg|_{x=a} \\
&\quad \cdot \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \\
&= -3H_0 \sin\left\{\pi\frac{y}{b}\right\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_z \quad .
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)

Drei unendlich ausgedehnte, infinitesimal dünne Platten mit Flächenladungsdichte ϱ_0 seien so angeordnet, dass sie sich jeweils senkrecht schneiden. Berechnen Sie die elektrische Feldstärke im gesamten Raum.

Lösung

Platte 1: $x = 0$

Platte 2: $y = 0$

Platte 3: $z = 0$

E-Feld einer geladenen Platte: $\vec{E} = \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0}\vec{n}$

Superpositionsprinzip: $\vec{E}_{ges} = \vec{E}_{P1} + \vec{E}_{P2} + \vec{E}_{P3}$

$$= \frac{\varrho_0}{2\varepsilon_0}\left(\mathrm{sgn}\{x\}\,\vec{e}_x + \mathrm{sgn}\{y\}\,\vec{e}_y + \mathrm{sgn}\{z\}\,\vec{e}_z\right)$$

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Die magnetische Feldstärke einer Kugelwelle sei im freien Raum gegeben durch

$$\vec{H} = H_0 \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\theta \quad .$$

Wie lautet die zugehörige elektrische Feldstärke?

Lösung

Eine Kugelwelle ist keine ebene Welle und daher kann hier der Zusammenhang $\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} = \vec{H} \times \vec{k}$ nicht herangezogen werden! Die Berechnung muss über die Maxwell-Gleichungen erfolgen.

Die elektrische Feldstärke folgt aus dem Zusammenhang

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}$$

wobei hier $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ gilt.

In Kugelkoordinaten lautet die Rotation

$$\begin{aligned} \mathrm{rot}\vec{H} = & \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(r \sin\{\theta\} H_\varphi \right) - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(r H_\theta \right) \right] \vec{e}_\mathrm{r} \\ & + \frac{1}{r \sin\{\theta\}} \left[\frac{\partial}{\partial \varphi} H_r - \frac{\partial}{\partial r} \left(r \sin\{\theta\} H_\varphi \right) \right] \vec{e_\theta} \\ & + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r H_\theta \right) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_\mathrm{r} \right] \vec{e_\varphi} \end{aligned}$$

was sich hier auf

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = ikH_0 \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\varphi$$

reduziert. Damit resultiert die elektrische Feldstärke zu

$$\vec{E} = \frac{-kH_0}{\varepsilon_0 \omega} \frac{r_0}{r} \exp\{i(kr - \omega t)\} \vec{e}_\varphi \quad .$$

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Ein exemplarischer Strahlengang durch eine plankonkave Linse mit Brechzahl $n < 2$ und Krümmungsradius R ist in Abbildung 1 dargestellt.

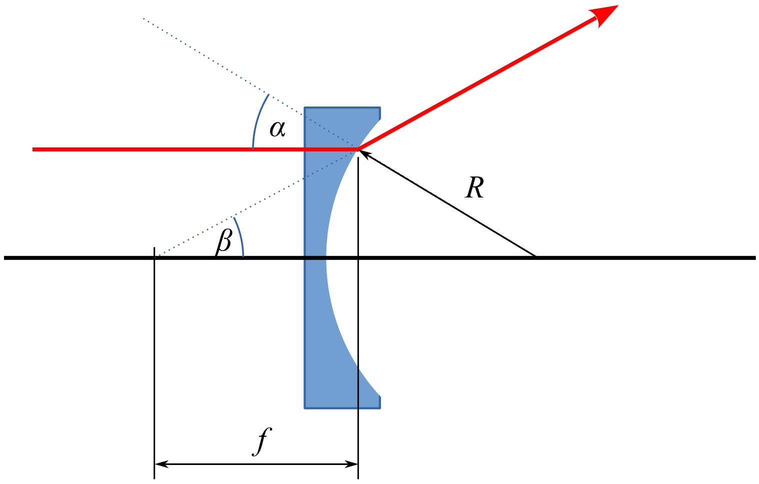

Abbildung 1: Strahlengang durch eine plankonkave Linse

- Berechnen Sie den Fokalabstand f unter Angabe der beiden eingetragenen Winkel α und β.
- Für achsnahe Strahlen kann angenommen werden, dass der Einfallswinkel α sehr klein gegen 1 ist. Zeigen Sie, dass unter dieser Voraussetzung

$$f = \frac{R}{n-1}$$

gilt.

Lösung

Zur Lösung wird der Abstand h zwischen dem Strahl und der Achse bestimmt:

$$h = R \sin\{\alpha\} \quad .$$

Ausgedrückt mit der Fokallänge lautet sie

$$h = f \tan\{\beta\} \quad .$$

Zusammengefasst resultiert

$$f = R\frac{\sin\{\alpha\}}{\tan\{\beta\}} \quad .$$

Für die Berechnung der Näherung muss β durch α ausgedrückt werden. Dazu wird der Winkel γ in Abbildung 2 benötigt. Er bestimmt sich aus dem Snelliusgesetz zu

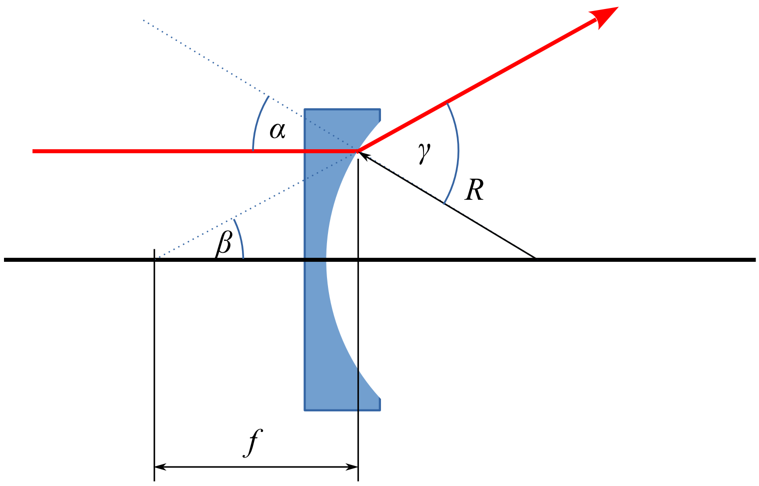

Abbildung 2: Erweiterung der obigen Skizze um den Winkel γ.

$$n\sin\{\alpha\} = \sin\{\gamma\}$$

und ist für kleine Einfallswinkel mit $\sin\{\alpha\} \simeq \alpha$

$$n\alpha \simeq \gamma \quad .$$

Mit

$$\pi = \alpha + \beta + (\pi - \gamma)$$

resultiert

$$\tan\{\beta\} = \tan\{\gamma - \alpha\} \simeq (n-1)\alpha$$

und damit das gesuchte Ergebnis.

Aufgabe 8 (6 Punkte)

Bestimmen sie das magnetische Vektorpotential $\vec{A}$ auf der Mittelpunktachse einer Leiterschleife mit Radius a unter der Annahme, dass die Stromdichte entlang des Umfangs eine volle Periode eines Sinus durchläuft.

Lösung

Parametrisierung: $\vec{j} = j_0 \delta\{\rho - a\}\ \delta\{z\}\ \sin\{\varphi\}\ \vec{e}_\varphi$

$$\vec{A} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_v\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, d^3r'$$

$$= \int_{\rho=0}^{\infty}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{z=-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0 j_0}{4\pi} \frac{\delta\{\rho'-a\}\ \delta\{z'\}\ \sin\{\varphi'\}\ \vec{e}_{\varphi'}}{(\rho^2+\rho'^2-2\rho\rho'\cos\{\varphi-\varphi'\}+(z-z')^2)^{1/2}}\ \rho' d\rho' d\varphi' dz'$$

$$\overset{\rho=0}{\downarrow}{=} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{\mu_0 j_0 a}{4\pi} \frac{\sin\{\varphi'\}\ (-\sin\{\varphi'\}\vec{e}_x + \cos\{\varphi'\}\vec{e}_y)}{(a^2+z^2)^{1/2}}\ d\varphi'$$

$$= \frac{\mu_0 j_0 a}{4\pi\ (a^2+z^2)^{1/2}} \left(-\underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin^2\{\varphi'\}\,d\varphi\,\vec{e}_x}_{=\pi} + \underbrace{\int_{\varphi=0}^{2\pi}\sin\{\varphi'\}\cdot\cos\{\varphi'\}\,d\varphi\,\vec{e}_y}_{=0}\right)$$

$$= -\frac{\mu_0 j_0 a\, \vec{e}_x\, \cancel{\pi}}{4\cancel{\pi}\,(a^2+z^2)^{1/2}}$$

Aufgabe 9 (6 Punkte)

Ein unendlich langer, homogen vom Gesamtstrom J in Richtung der Achse durchflossener Vollzylinder mit Radius a sei koaxial von einem infinitesimal dünnen, unendlich langen, zylinderförmigen Leiter mit Radius b umgeben. Durch diesen fließt in Richtung der Achse ebenfalls der Strom J, jedoch in entgegengesetzter Richtung zum Innenleiter. Diese Anordnung ist von einem weiteren koaxialen, infinitesimal dünnen, unendlich langen, zylinderförmigen Leiter mit Radius c umgeben, durch welchen ebenfalls der Gesamtstrom J in Richtung der Achse fließt, dieses mal in die gleiche Richtung wie der Strom im Innenleiter. Berechnen sie die magnetische Induktion im gesamten Raum.

Lösung

$$\underbrace{\oint_C \vec{B}[\vec{r}] \circ d\vec{r}}_{\rho\, 2\cdot\pi\cdot B_\varphi} = \mu_0 J_c$$

$$J_c = \begin{cases} J \cdot \frac{\rho^2}{a^2} & \rho \le a \\ J & a \le \rho \le b \\ 0 & b \le \rho \le c \\ J & c \le \rho \end{cases}$$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0}{\rho\, 2\pi}\, \vec{e}_\varphi \cdot \begin{cases} J \cdot \frac{\rho^2}{a^2} & \rho \le a \\ J & a < \rho \le b \\ 0 & b < \rho \le c \\ J & c \le \rho \end{cases}$$

Aufgabe 10 (6 Punkte)

Das magnetische Vektorpotenzial der TM_{11} Welle in einem Rechteckhohlleiter mit Querschnitts-abmessungen $a \times b$ lautet

$$\vec{A} = A_0 \sin\left\{2\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{2\pi\frac{y}{b}\right\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\vec{e}_z$$

wenn man annimmt, dass die z-Achse mit der Mitte des Hohlleiters zusammenfällt und dessen Kanten parallel zu x und y orientiert sind.

- Wie lautet das zugehörige skalare elektrische Potenzial unter der Voraussetzung, dass Lorentzeichung vorliegt?
- Wie lautet der elektrische Feldstärkevektor der Welle?

Lösung

Die Lorentzeichung lautet

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0 \quad .$$

Durch Umstellen und Auswerten erhält man das skalare elektrische Potenzial zu

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathrm{el}} &= -\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\int i\beta A_0 \sin\left\{2\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{2\pi\frac{y}{b}\right\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\mu_0} A_0 \sin\left\{2\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{2\pi\frac{y}{b}\right\} \exp\{i(\beta z - \omega t)\} \quad .
\end{aligned}$$

Die elektrische Feldstärke ergibt sich aus

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= -\left(\vec{\nabla} \circ \Phi_{\mathrm{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}\right) \\
&= -A_0\left(\frac{\beta}{\omega\varepsilon_0\mu_0}\left(\frac{2\pi}{a}\cos\left\{2\pi\frac{x}{a}\right\}\sin\left\{2\pi\frac{y}{b}\right\}\vec{e}_x + \frac{2\pi}{b}\sin\left\{2\pi\frac{x}{a}\right\}\cos\left\{2\pi\frac{y}{b}\right\}\vec{e}_y\right)\right. \\
&\qquad \left. -i\omega\sin\left\{2\pi\frac{x}{a}\right\}\sin\left\{2\pi\frac{y}{b}\right\}\vec{e}_z\right)\exp\{i(\beta z - \omega t)\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 11 (8 Punkte)

Eine ebene Welle

$$\vec{H} = H_0(\vec{e}_z - 3\vec{e}_x)\exp\left\{i\left(\frac{k_0}{\sqrt{14}}(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z)\circ\vec{r} - \omega t\right)\right\} \tag{2}$$

fällt auf eine Grenzfläche zu einem Medium mit $\varepsilon = 4$, welche dadurch charakterisiert ist, dass die Vektoren $3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z$ und $2\vec{e}_x - \vec{e}_y$ in ihr liegen. Berechnen Sie die magnetische Feldstärke der transmittierten Welle.

Lösung

$\vec{a} = 3\vec{e}_y - 2\vec{e}_z \quad ; \quad \vec{b} = 2\vec{e}_x - \vec{e}_y$

$\Rightarrow \vec{n} = \frac{\pm(\vec{a}\times\vec{b})}{\| \cdot \|} = \pm\frac{\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z}{\sqrt{14}}$

$\vec{k}_{in} = \frac{k_0}{\sqrt{14}}(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z) \Rightarrow$

- Vorzeichen von $\vec{n}$ ist positiv
- Welle fällt senkrecht auf Grenzfläche
- $n_{in} = 1 \Rightarrow \varepsilon_{in} = 1$

$n_{tr} = \sqrt{\varepsilon_{tr}} = 2$

$\Rightarrow \vec{k}_{tr} = 2\vec{k}_{in}$

$r_{TM} = \frac{\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_{in}}{\varepsilon_{in}} - \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_{tr}}{\varepsilon_{tr}}}{\text{''} + \text{''}} = \frac{1 - \frac{2}{4}}{1 + \frac{2}{4}} = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow t_{TM} = \frac{4}{3} = 1 + r_{TM}$

$\Rightarrow \vec{H}_{tr} = \frac{4}{3}H_0(\vec{e}_z - 3\vec{e}_x)\exp\left\{i\left(\frac{2k_0}{\sqrt{14}}(\vec{e}_x + 2\vec{e}_y + 3\vec{e}_z)\cdot\vec{r} - \omega t\right)\right\}$

Aufgabe 12 (8 Punkte)

Eine TE Welle wird an der Grenze $z = 0$ zwischen zwei unmagnetischen Medien mit dem Faktor $0,28$ reflektiert. Die elektrische Feldstärke der tansmittierten Welle lautet

$$\vec{E}_{\text{tr}} = 1,28E_0 \exp\{i(\omega t - k_0(1,2x - 0,9z))\}\vec{e}_y \quad .$$

Wie lautet die elektrische Feldstärke der reflektierten Welle?

Lösung

Die Grenzfläche ist bei $z = 0$, also kann $\vec{n} = \pm\vec{e}_z$ angenommen werden.
Der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle lautet

$$\vec{k}_{\text{tr}} = (1,2\vec{e}_x - 0,9\vec{e}_z)k_0 \quad .$$

Die Normalkomponente ist definitionsgemäß positiv, damit ist $\vec{n} = -\vec{e}_z$ festzulegen.
Für die reflektierte Welle wird deren Wellenzahlvektor benötigt. Aus dem Snelliusgesetz resultiert

$$\vec{k}_{\text{p}} = 1,2\vec{e}_x \quad .$$

Die Normalkomponente verbirgt sich im Reflexionsfaktor

$$r = \frac{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{in}} - \vec{k}_{\text{tr}})}{\vec{n} \circ (\vec{k}_{\text{in}} + \vec{k}_{\text{tr}})}$$

woraus nach umstellen und einsetzen

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}} = \left(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}}\right) \frac{1+r}{1-r} = 0,9k_0 \frac{1,28}{0,72} = k_0 \frac{1,28}{8} = 1,6k_0$$

resultiert.
Die Amplituden der transmittierten und einfallenden Welle hängen über $\hat{E}_{\text{tr}} = t\hat{E}_{\text{in}} = (1+r)\hat{E}_{\text{in}}$ zusammen und die Amplitude der reflektierten Welle ergibt sich aus

$$\hat{E}_{\text{ref}} = r\hat{E}_{\text{in}} = \frac{r}{1+r}\hat{E}_{\text{tr}} = 0,28E_0 \quad .$$

Der Wellenzahlvektor der reflektierten Wellen ist

$$\vec{k}_{\text{ref}} = \vec{k}_{\text{p}} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})\vec{n} = (1,2\vec{e}_x + 1,6\vec{e}_z)k_0$$

und damit resultiert

$$\vec{E}_{\text{ref}} = 0,28E_0 \exp\{i\,(\omega t - (1,2\vec{e}_x + 1,6\vec{e}_z)k_0)\}\vec{e}_y \quad .$$