Elektromagnetische Felder und Wellen

K.J. Ebeling
J. Mähnß

Stand: 24. Juni 2022

Inhaltsverzeichnis

1 Grundlegende Gesetze der Elektrostatik 13

1.1 Das Coulombsche Gesetz und die elektrische Ladung 13

1.2 Die elektrische Feldstärke 15

1.3 Felder kontinuierlicher Ladungsverteilungen 18

1.4 Das Gaußsche Gesetz für das elektrische Feld 24

1.4.1 Der Gaußsche Integralsatz 24

1.4.2 Integralform des Gaußschen Gesetzes 29

1.4.3 Differentialform des Gaußschen Gesetzes 30

1.4.4 Verallgemeinerung des Gaußschen Gesetzes 31

1.4.5 Interpretation des Gaußschen Gesetzes 32

1.5 Der elektrische Strom 32

1.5.1 Die elektrische Stromdichte 33

1.5.2 Die Kontinuitätsgleichung 34

2 Elektrostatik 39

2.1 Energie und Potenzial 39

2.1.1 Potentielle Energie im elektrischen Feld 39

2.1.2 Potenzialdifferenz und Potenzial 42

2.1.3 Energiedichte im elektrostatischen Feld 47

2.2 Elektrische Leiter und Dielektrika 49

2.2.1 Elektrische Leiter 51

2.2.2 Stetigkeitsbedingungen an Leiteroberflächen 52

2.2.3 Dipole in Dielektrika 55

2.2.4 Die dielektrische Verschiebung 59

2.2.4.1 Nichtlineare Polarisation 63

2.2.5 Stetigkeitsbedingungen für Dielektrika 64

2.2.6 Elektrostatische Energie im Dielektrikum 68

2.3 Stromdichte und Ladungsdichte 70

2.3.1 Ladungsdichte im statischen Fall 70

2.3.1.1 Grenzfläche zwischen Isolator und nicht idealem Leiter . 72

2.3.2 Ladungsdichte im nichtstatischen Fall 73

2.4 Poisson- und Laplace- Gleichung und Kapazität 74

2.4.1 Die Potenzialgleichung 74

2.4.2 Randbedingungen für das Potenzial 76

2.4.3 Die Kapazität 79

2.5 Widerstände und Kondensatoren 82

3 Grundlegende Gesetze der Magnetostatik **85**

3.1 Magnetfelder von Strömen 85

3.1.1 Das Biot-Savartsche Gesetz 85

3.1.2 Konzept des Stromfadens 87

3.1.3 Vektorpotenzial und Divergenz des statischen Magnetfeldes 91

3.1.4 Das Ampèresche Gesetz in Differentialform 92

3.1.5 Das Ampèresche Gesetz in Integralform 94

3.2 Kräfte magnetischer Felder 97

3.2.1 Magnetische Kräfte auf Ströme 97

3.2.2 Kräfte zwischen zwei linienförmigen Stromkreisen 102

4 Magnetostatik **105**

4.1 Magnetisches Vektorpotenzial 106

4.2 Magnetfelder begrenzter Stromverteilungen 108
4.2.1 Magnetische Kraftflussdichte außerhalb einer Stromverteilung . . . 113
4.3 Magnetisierbare Materie 114
4.3.1 Einführung des Magnetfeldes $\vec{H}$ 117
4.3.2 Linear magnetisierbare Materie 119
4.4 Stetigkeitsbedingungen für magnetische Felder 121
4.5 Randwertprobleme der Magnetostatik 124
4.5.1 Randwertprobleme bei verschwindender freier Stromdichte 124

5 Spezielle Lösungsmethoden 129
5.1 Orthogonalentwicklung 130
5.1.1 Zur Lösung der Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten . . 131
5.1.1.1 Ein- und zweidimensionale Orthogonalentwicklung . . . 134
5.1.1.2 Spezialfall: Potenzial in einem quaderförmigen Gebiet . 134
5.1.2 Verallgemeinerung der Orthogonalentwicklung 139
5.1.2.1 Spezialfall: Fourierentwicklung 144
5.1.3 Allgemeine dreidimensionale Orthogonalentwicklung 145
5.1.3.1 Kartesische Koordinaten: Quaderförmiges Gebiet 150
5.1.4 Lösung der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten 151
5.1.4.1 Ein- und zweidimensionale Orthogonalentwicklung . . . 156
5.1.4.2 Spezialfall: Zylindrischer Bereich 157
5.1.5 Zur Lösung der Laplacegleichung in Polarkoordinaten 164
5.1.5.1 Ein- und zweidimensionale polare Orthogonalentwicklung 169
5.1.5.2 Entelektrisierung 176
5.1.6 Multipolentwicklung 179
5.2 Spiegelungsmethode 180
5.2.1 Die Spiegelungsmethode für ebene Flächen 181
5.2.2 Die Spiegelungsmethode für Kugelflächen 183
5.2.2.1 Spiegelung einer achsparallelen Linienladung am Zylinder 186

5.3 Greensche Funktion . . . 186
5.3.1 Lösung der Poissongleichung mit der Greenschen Funktion . . . 187
5.3.2 Allgemeine Lösung der Poissongleichung . . . 191
5.4 Konforme Abbildungen . . . 193
5.4.1 Zweidimensionale Potenzialprobleme . . . 194
5.4.2 Lösung mit konformen Abbildungen . . . 199

6 Zeitabhängige Felder **207**
6.1 Elektromagnetische Gesetze für zeitabhängige Felder . . . 207
6.1.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz . . . 207
6.1.2 Coulomb- und Gauß-Gesetz . . . 208
6.1.3 Biot-Savart und Ampère-Gesetz . . . 209
6.1.4 Divergenz der magnetischen Kraftflussdichte . . . 210
6.2 Die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum . . . 210

7 Maxwell Gleichungen und Wellengleichung **213**
7.1 Die Maxwell Gleichungen in polarisierbarer Materie . . . 213
7.2 Stetigkeitsbedingungen elektrodynamischer Felder . . . 217
7.3 Energiesatz der Elektrodynamik . . . 218
7.4 Reziprozität . . . 222
7.5 Potenziale und Eichtransformationen . . . 226
7.5.0.1 Eichinvarianz . . . 228
7.5.0.2 Eindeutigkeit . . . 229
7.5.1 Coulomb Eichung . . . 229
7.5.2 Lorenz Eichung . . . 231
7.6 Lösung der ungedämpften Wellengleichung im freien Raum . . . 233
7.7 Allgemeine Lösungen der ungedämpften Wellengleichung . . . 235
7.7.1 Allgemeine Lösung der ungedämpften inhomogenen Wellengleichung 235
7.7.2 Lösung der ungedämpften homogenen Wellengleichung . . . 236

7.7.3 Eindeutigkeit der Lösung 240
7.8 Lösungen der gedämpften Wellengleichung 244
7.8.1 Lösung der gedämpften homogenen Wellengleichung 244
7.9 Wellengleichungen für die Felder 245

8 Wellenausbreitung in Dielektrika 249
8.1 Ebene elektromagnetische Wellen 249
8.1.1 Transversaler Charakter ebener elektromagnetischer Wellen 249
8.1.2 Monochromatische ebene Wellen und Polarisation 253
8.1.3 Überlagerung von Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung 255
8.1.4 Überlagerung von Wellen unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung . 259
8.1.5 Energiedichte und Energieflussdichte 264
8.1.6 Verlustfreie Medien 270
8.1.7 Reziprozität für zeitharmonische Felder 272
8.2 Reflexion und Brechung 273
8.2.1 Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche zweier Dielektrika . . . 274
8.2.2 Brechungs- und Reflektionsgesetz 274
8.2.3 TE- und TM- Wellen 283
8.2.4 Amplituden bei Reflexion und Brechung für TE-Wellen 285
8.2.5 Amplituden bei Reflexion und Brechung für TM-Wellen 290
8.2.6 Diskussion der Reflexionsfaktoren 294
8.2.6.1 Brewster-Winkel 296
8.2.7 Intensitätsreflexions- und Intensitätstransmissionsfaktoren 298
8.2.8 Totalreflexion 300
8.2.8.1 Totalreflexion in unmagnetischen Medien 303
8.2.8.2 Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche 304
8.2.8.3 Totalreflexion in magnetischen Medien 305
8.2.8.4 Bemerkung zur Kausalität 306
8.2.9 Zusammenfassung 307

8.3 Skalare Beugungstheorie 308
8.3.1 Monochromatische Wellen 309
8.3.2 Bestimmung des Raumfrequenzspektrums 310
8.3.3 Ausbreitung des Raumfrequenzspektrums 311
8.3.4 Exakte Form des Beugungsintegrals und Fresnel-Näherung 315
8.3.5 Beugung in Fraunhofernäherung 317
8.3.6 Allgemeine Formulierung der skalaren Beugungstheorie 321
8.4 Paraxiale Näherung der Wellengleichung 327
8.4.1 Hermite-Gauß-Wellen 330
8.4.2 Laguerre-Gauß-Wellen 338

9 Wellenausbreitung in elektrischen Leitern 343

9.1 Die Wellengleichung für homogene leitfähige Medien 344
9.2 Lösungen der Telegraphengleichung 345
9.3 elektr. und magn. Feld und Energiefluss 349
9.4 Eindringtiefe und Skineffekt 351

10 Wellenausbreitung in Wellenleitern 355

10.1 Grundgleichungen für Wellenleiter 356
10.1.1 TE-Wellen in Wellenleitern 359
10.1.2 TM-Wellen in Wellenleitern 359
10.1.3 TEM-Wellen in Wellenleitern 360
10.2 Rechteckhohlleiter 361
10.2.1 TE-Wellen im Rechteckhohlleiter 361
10.2.2 TM-Wellen im Rechteckhohlleiter 366
10.2.3 TEM-Wellen 368
10.3 Orthogonalität, Feldentwicklung und Störungen 370
10.3.1 Feldentwicklung in verlustlosen Medien 372
10.3.2 Feldentwicklung in verlustbehafteten Medien 374

10.4 Felder aus Vektorpotenzialen 376
10.4.1 TM- Wellen 376
10.4.2 TE- Wellen 379
10.5 Rundhohlleiter 381
10.5.1 TM-Eigenwellen 382
10.5.2 TE-Eigenwellen 384
10.6 Hohlraumresonatoren 386
10.6.1 TE-Eigenschwingungen des Rechteckhohlraumresonators 388
10.6.2 TM-Eigenschwingungen des Rechteckhohlraumresonators 390

11 Abstrahlung harmonischer Quellen **393**
11.1 Abstrahlung eng begrenzter oszillierender Quellen 396
11.1.1 Nahzone 397
11.1.2 Fernzone 397
11.2 Felder in der Strahlungszone 399

12 Fernzone spezieller Quellverteilungen **401**
12.1 Dünne lineare Antenne 401
12.1.1 Fernfeld einer dünnen linearen Antenne 401
12.1.2 Abstrahlung einer dünnen linearen Antenne 405
12.2 Dipole 408
12.2.1 Elektrischer Dipol 409
12.2.2 Magnetischer Dipol 411
12.3 Hertzsche Vektoren 413
12.4 Multipole 418
12.4.1 Allgemeine sphärische Lösung der homogenen Wellengleichung . . 418
12.4.2 Multipolentwicklung 424
12.4.3 Quellen der Multipolfelder 428

13 Störungen **433**

13.1 Störungstheorie für Streuung 433

13.2 Rayleigh Streuung 437

A Häufig verwendete Begriffe **439**

B In der Vorlesung häufig benutzte Rechenregeln **441**

B.1 Differentialoperationen 441

B.2 Stokesscher Integralsatz 442

B.3 Gaußscher Integralsatz 443

B.4 Gaußscher Integralsatz in zwei Dimensionen 443

C Spezielle Koordinatensysteme **445**

C.1 Generelles 445

C.2 Ebene Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten) 448

C.3 Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten) 451

D Symmetrien **457**

D.1 Symmetrieangaben 457

D.2 Vereinfachungen bei kontinuierlichen Symmetrieoperationen 457

D.3 Spezielle Symmetrien 458

E Abkürzende Schreibweisen für ϱ **461**

F Lösungsansätze für Differentialgleichungen **463**

F.1 DGL mit Abl. nach nur einer Variablen 463

F.1.1 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}V\{x\} = f\{x\}$ 463

F.1.2 $\sum\limits_i k_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i}V\{x\} = f\{x\}$ 464

F.1.3 Lösung der Besselschen Differentialgleichung 464

F.1.3.1 Fourier-Bessel Reihen 466

F.1.4 Lösung der Legendreschen Differentialgleichung 470

F.2 DGL mit Abl. nach mehreren Variablen 475

F.2.1 Separation mit Summenansatz für $\vec{\nabla}\vec{E} = f\{\vec{r}\}$ 475

F.2.2 Separation mit Produktansatz für $\Delta V = g$ 476

G Polarisation von Materie 477

H Diskussion der Potenziale 479

H.1 Potenziale in inhomogenen Medien 479

H.2 Potenziale in homogenen Medien 482

H.3 Ebene Wellen 483

H.4 Skalares magn. Potenzial und elektr. Vektorpotenzial 485

I Spezielle Funktionen: Distributionen 487

I.1 Die Dirac-Funktion 487

I.1.1 Definition 487

I.1.2 Heuristische Eigenschaften 487

I.1.3 Symmetrie 487

I.1.4 Ableitung 487

I.1.5 Dehnung 488

I.1.6 Quadrat 488

I.1.7 Abkürzende Schreibweise 488

I.1.8 Fouriertransformation 488

I.1.9 Einheit 488

I.1.10 Übergang auf andere Koordinatensysteme 489

I.1.10.1 Eindimensional 489

I.1.10.2 Zwei- und Dreidimensional 489

I.2 Die Heaviside-Sprungfunktion 490

I.2.1 Definition 490

I.2.2 Heuristische Eigenschaften 490

I.3 Die Rechteck-Funktion 490

I.3.1 Definition 490
I.3.2 Heuristische Eigenschaften 490

J Reflexion und Brechung mit Verlusten **493**

K Personenverzeichnis **497**

L Formelzeichen **503**

Index **507**

Kapitel 1

Grundlegende Gesetze der Elektrostatik

Die klassischen Eigenschaften elektromagnetischer Felder und Wellen lassen sich in aller Strenge mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen beschreiben. Hierzu ist jedoch im allgemeinen eine gewisse Übung und auch Erfahrung im Umgang mit partiellen Differentialgleichungen erforderlich, um eine tiefere Einsicht in die physikalischen Zusammenhänge zu erhalten. Wir wollen in diesem Kapitel einen anderen Weg gehen und ausgehend von einigen Grundprinzipien wie dem Coulombschen Gesetz, der Lorentzkraft, dem Biot-Savartschen Gesetz oder dem Faradayschen Induktionsgesetz zunächst die Bedeutung und Tragweite der Maxwellschen Gleichungen erläutern, aus denen umgekehrt alle genannten Gesetze gewonnen werden können. Wir werden uns in diesem Kapitel auf elektrische Ladungen und Ströme im Vakuum beschränken.

1.1 Das Coulombsche Gesetz und die elektrische Ladung

Anfang des siebzehnten Jahrhunderts fand der Franzose Charles Coulomb, dass zwei ruhende elektrische Punktladungen Q_1 und Q_2 im Abstand R die Kraft

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{R^2} \tag{1.1}$$

aufeinander ausüben. Die Kraft nimmt ähnlich wie beim Gravitationsgesetz umgekehrt proportional mit dem Quadrat des Abstands R ab. Q_1 und Q_2 sind positive oder negative Ladungsmengen. Die Proportionalitätskonstante k ist im internationalen Maßsystem durch

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \tag{1.2}$$

gegeben. Die neue Konstante ε_0 wird als **Dielektrizitätskonstante** oder **Permittivität** des Vakuums bezeichnet. Sie ist definiert als

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{c_0^2 \mu_0} \quad , \tag{1.3}$$

wobei die Vakuumlichtgeschwindigkeit $c_0 := 299792458\,\mathsf{m/s}$ und die Permeabilitätskonstante $\mu_0 := 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathsf{Vs/(Am)}$ Verwendung finden. Ihr Wert beträgt

$$\varepsilon_0 \approx 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{\mathsf{As}}{\mathsf{Vm}} \approx \frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9} \frac{\mathsf{As}}{\mathsf{Vm}} \quad . \tag{1.4}$$

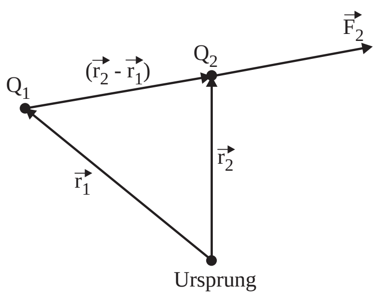
Die Kraft zwischen zwei Punktladungen zeigt in Richtung der Verbindungslinie zwischen den beiden Ladungen. Der Kraftvektor der Kraft F_2 auf die Ladung Q_2 ist nach Abbildung 1.1 durch das

Coulombsche Gesetz

$$\vec{F_2} = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r_2} - \vec{r_1}|^2} \frac{\vec{r_2} - \vec{r_1}}{|\vec{r_2} - \vec{r_1}|} \tag{1.5}$$

gegeben.

Abbildung 1.1: Kraftvektor $\vec{F_2}$ auf eine Ladung $Q_2\{\vec{r_2}\}$, hervorgerufen durch eine Ladung $Q_1\{\vec{r_1}\}$ gleichen Ladungsvorzeichens.



Durch Vertauschung der Indices 1 und 2 wird die Kraft, die Q_2 auf Q_1 ausübt, bestimmt. Sie ist von gleicher Größe aber entgegengesetzter Richtung

$$-\vec{F}_1 = +\vec{F}_2 = +\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^2} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} \quad . \tag{1.6}$$

Sind mehrere Ladungen vorhanden, etwa $Q_0, Q_1, \ldots Q_N$ an den Orten $\vec{r}_0, \vec{r}_1, \ldots, \vec{r}_N$, so setzt sich die Gesamtkraft auf die Probeladung Q_0 nach dem Superpositionsprinzip vektoriell additiv aus der Summe der Einzelkräfte zusammen

$$\vec{F}_0 \{\vec{r}_0\} = +\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i (\vec{r}_0 - \vec{r}_i)}{|\vec{r}_0 - \vec{r}_i|^3} \quad . \tag{1.7}$$

Elektrische Ladungen treten stets als ganzzahlige Vielfache der Elementarladung

$$e \simeq 1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathsf{C} \tag{1.8}$$

auf. Definitionsgemäß ist die Ladung eines Protons $+e$ und diejenige eines Elektrons $-e$. Die elektrische Ladung ist stets an massebehaftete Teilchen gebunden. Sie hat Substanzcharakter.

1.2 Die elektrische Feldstärke

Wir betrachten eine feste Ladung Q' am Ort $\vec{r}\,'$. Bewegen wir eine zweite Ladung Q langsam in der Umgebung $\vec{r}$ von $\vec{r}\,'$, so wird sie überall eine Kraft erfahren, die durch das Coulombsche Gesetz (1.5) gegeben ist. Die Kraft ist proportional zur Größe der Testladung Q. Der Quotient

$$\boxed{\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{\vec{F}\{\vec{r}\}}{Q\{\vec{r}\}} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}} \tag{1.9}$$

wird als **elektrische Feldstärke** am Ort $\vec{r}$ definiert. Gestrichene Vektoren $\vec{r}\,'$ kennzeichnen Ladungsorte, ungestrichene Größen $\vec{r}$ Aufpunkte, an denen die Feldstärke berechnet werden soll. Geht die Kraftwirkung von einer Ladungsverteilung aus, wird das Feld entsprechend (1.7) die Form

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{\vec{F}_Q\{\vec{r}\}}{Q\{\vec{r}\}} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i(\vec{r}-\vec{r}_i)}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|^3} = \sum_{i=1}^{N} \vec{E}_i(\vec{r}) \tag{1.10}$$

annehmen, wobei $\vec{E}_i\{\vec{r}\}$ das Feld einer Einzelladung bezeichnet. Wir setzen immer voraus, dass es sich um eine ruhende Ladungsverteilung handelt. Wenn die Kraft bedingende Ladungsverteilung beweglich ist, definiert man die elektrische Feldstärke zweckmäßigerweise über die Kraft auf eine infinitesimal kleine Testladung

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \lim_{Q\to 0} \frac{\vec{F}_Q\{\vec{r}\}}{Q\{\vec{r}\}} \quad , \tag{1.11}$$

um die Rückwirkung der Testladung auf die Ladungsverteilung vernachlässigen zu können. Bei positiver Testladung weist die Feldstärke in Richtung des Kraftfeldes. Die Feldstärke wird in Newton/Coulomb oder praktischer in Volt/Meter gemessen. Als Beispiel untersuchen wir das Feld einer Punktladung Q im Ursprung $\vec{r}' = \vec{0}$ des Koordinatensystems

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}|^3} \quad . \tag{1.12}$$

Das Feld hat offenbar nur eine radiale Komponente $(r = |\vec{r}|)$

$$E_\mathrm{r}\{\vec{r}\} = \vec{E}\{\vec{r}\} \circ \vec{e}_\mathrm{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \qquad (E_\theta = E_\varphi = 0) \quad , \tag{1.13}$$

die für positive Ladungen nach außen weist. In kartesischen Koordinaten $\vec{r} = (x, y, z)$ lautet das Feld

$$\begin{aligned} \vec{E}\{x,y,z\} &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)} \cdot \\ &\cdot \left(\frac{x\vec{e}_\mathrm{x}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{y\vec{e}_\mathrm{y}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} + \frac{z\vec{e}_\mathrm{z}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \quad , \end{aligned} \tag{1.14}$$

wobei $\vec{e}_\mathrm{x}, \vec{e}_\mathrm{y}$ und $\vec{e}_\mathrm{z}$ Einheitsvektoren in Richtung der Koordinatenachsen bezeichnen. Der Ausdruck (1.14) lässt die einfache Radialsymmetrie des Feldes nicht mehr so einfach erkennen wie beispielsweise (1.12) oder (1.13). Es treten alle drei kartesischen Komponenten des Feldes auf

$$\vec{E}\{x,y,z\} = E_{\mathrm{x}}\{x,y,z\}\cdot\vec{e}_{\mathrm{x}} + E_{\mathrm{y}}\{x,y,z\}\cdot\vec{e}_{\mathrm{y}} + E_{\mathrm{z}}\{x,y,z\}\cdot\vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{1.15}$$

mit

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{x}}\{x,y,z\} &= \frac{Qx}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad , \\
E_{\mathrm{y}}\{x,y,z\} &= \frac{Qy}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad , \\
E_{\mathrm{z}}\{x,y,z\} &= \frac{Qz}{4\pi\varepsilon_0(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \quad .
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Das Vektorfeld der elektrischen Feldstärke lässt sich durch Feldlinien veranschaulichen. Die Feldlinien gehen von einer Ladung aus und weisen an jedem Ort $\vec{r}$ in Richtung des Feldes $\vec{E}\{\vec{r}\}$. Eine kleine positive Testladung würde in Richtung der Feldlinien beschleunigt. Feldlinien geben zunächst nur die Richtung des Feldes an. Je dichter die Feldlinien zusammenliegen, desto stärker ist das Feld.

Die Feldlinien und das elektrische Feld liegen zueinander parallel. Für ein infinitesimales Stück der Feldlinie und das Feld an dem Punkt muss also gelten

$$\vec{E} \times \mathrm{d}\vec{r} = 0 \quad . \tag{1.17}$$

Daraus ergeben sich die drei Gleichungen

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\vec{E}\circ\vec{e}_{\mathrm{x}}} = \frac{\mathrm{d}y}{\vec{E}\circ\vec{e}_{\mathrm{y}}} = \frac{\mathrm{d}z}{\vec{E}\circ\vec{e}_{\mathrm{z}}}} \tag{1.18}$$

Feldlinien lassen sich üblicherweise nur in einer Ebene zeichnen. Deshalb betrachtet man in einer Ebene $z = const$ zum Beispiel die Feldkomponenten E_{x} und E_{y}. Am Ort (x, y) ist die Richtung der Feldlinie definitionsgemäß aus (1.18) durch

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{E_\mathrm{y}\left\{x, y, z = const.\right\}}{E_\mathrm{x}\left\{x, y, z = const.\right\}} = \text{Steigung der Feldlinien} \tag{1.19}$$

gegeben, wie es in Abbildung 1.2 veranschaulicht ist.

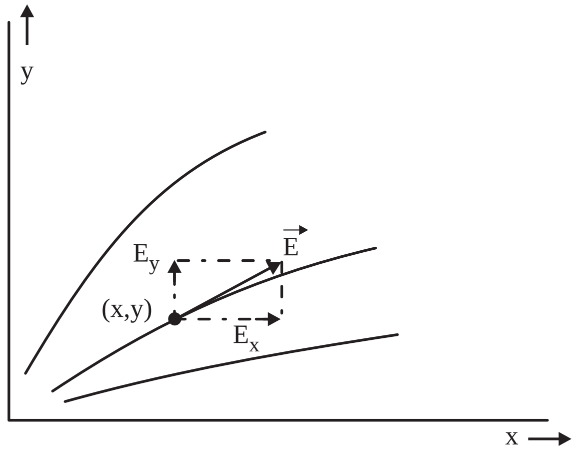


Abbildung 1.2: Feldlinien in einer Ebene $z = const$

Nach (1.16) ergibt sich für die Feldlinien einer Punktladung in der Ebene $z = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x} \quad \text{oder} \quad \frac{\mathrm{d}y}{y} = \frac{\mathrm{d}x}{x} \tag{1.20}$$

mit der Lösung

$$\ln\left\{|y|\right\} = \ln\left\{|x|\right\} + C \quad \text{oder} \quad y = C'x \tag{1.21}$$

mit Integrationskonstanten $C = \ln\left\{C'\right\}$. In jeder Ebene $z = const.$ ist das Feldlinienbild einer Punktladung als eine radial aus- bzw. einlaufende Geradenschar zu zeichnen, wie es in Abbildung 1.3 dargestellt ist. Die Feldlinien besitzen bei $(x, y) = 0$ auf der z-Achse ihre größte räumliche Dichte, wo für festes vorgegebenes $z = const.$ auch die Feldstärke am größten ist.

1.3 Felder kontinuierlicher Ladungsverteilungen

Oft sind Ladungsverteilungen aus einer riesig großen Zahl von Elementarladungen aufgebaut, und der Abstand der Elementarladungen ist zudem mikroskopisch klein. In diesem Fall

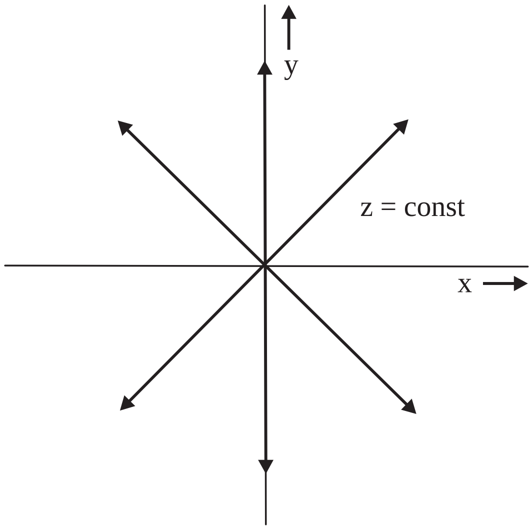


Abbildung 1.3: Feldlinien einer positiven Punktladung im Ursprung

empfiehlt es sich, ähnlich wie bei der Einführung einer Massendichte für aus diskreten Atomen aufgebauten Körpern eine Raumladungsdichte $\varrho_V \{\vec{r}\}$ zu definieren. Hierbei betrachtet man die infinitesimale Ladung $\mathrm{d}^3Q\{\vec{r}\}$ in einem Volumenelement d^3r um $\vec{r}$ herum und setzt

$$\varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\} = \frac{\mathrm{d}^3Q\{\vec{r}\}}{\mathrm{d}^3r} = \frac{\mathrm{d}^3Q\{\vec{r}\}}{\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z} \tag{1.22}$$

als ortsabhängige Ladungsdichte an. Ihre Maßeinheit ist C/m^3. Beim Arbeiten mit der Raumladungsdichte vernachlässigt man Schwankungen auf atomarer Skala und mittelt räumlich über eine ausreichende Anzahl von Elektronen und Protonen. Dieses Konzept hat sich als äußerst praktikabel erwiesen. Die Gesamtladung eines Volumens V ergibt sich durch Integration

$$Q = \iiint\limits_\mathrm{V} \mathrm{d}^3Q = \iiint\limits_\mathrm{V} \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}'\}\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{1.23}$$

Das elektrische Feld einer kontinuierlichen Ladungsverteilung findet man mit $\mathrm{d}^3Q\{\vec{r}'\} = \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}'\}\ \mathrm{d}^3r'$ durch Grenzübergang von der Summe zum Integral in (1.10)

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_\mathrm{V} \frac{\varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}'\}(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3r'} \tag{1.24}$$

Hierbei bezeichnet $\vec{r}$ den Ort, an dem das Feld $\vec{E}$ bestimmt wird. Der Vektor $\vec{r}\,'$ kennzeichnet den Ort, an dem sich das Quellenladungselement $\varrho_{\mathrm{V}}\left\{\vec{r}\,'\right\} \mathrm{d}^3 r'$ befindet. Abstand und Richtung zwischen Aufpunkt und Quellelement sind durch $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ bzw. $(\vec{r}-\vec{r}\,')/|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ gegeben. Der Ausdruck (1.24) steht für das sogenannte **Coulombfeld**.

Beispiel 1.3.1: Grenzfall einer Punktladung

Mit der Diracschen δ-Funktion

$\delta^{(3)}\left\{\vec{r}\right\} = \delta\left\{x\right\}\delta\left\{y\right\}\delta\left\{z\right\}$

lässt sich einer Punktladung Q am Ort $\vec{r}\,''$ die Raumladungsdichte

$$\varrho_{\mathrm{V}}\left\{\vec{r}\right\} = Q\delta^{(3)}\left\{\vec{r}-\vec{r}\,''\right\} \tag{1.25}$$

zuschreiben. Nach (1.23) ist die Ladung

$$Q = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \varrho_{\mathrm{V}}\left\{\vec{r}\right\} \mathrm{d}^3 r = \iiint\limits_{\mathrm{V}} Q\delta^{(3)}\left\{\vec{r}-\vec{r}\,''\right\} \mathrm{d}^3 r = Q\{\vec{r}\,''\} \quad , \tag{1.26}$$

wie es die Definition der δ-Funktion verlangt. Die Feldstärke berechnet sich nach (1.24) zu

$$\begin{aligned}
\vec{E}\left\{\vec{r}\right\} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\mathrm{V}} \varrho_{\mathrm{V}}\left\{\vec{r}\,'\right\} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, \mathrm{d}^3 r' \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{\mathrm{V}} \delta^{(3)}\left\{\vec{r}\,'-\vec{r}\,''\right\} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\, \mathrm{d}^3 r' \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{(\vec{r}-\vec{r}\,'')}{|\vec{r}-\vec{r}\,''|^3}
\end{aligned} \tag{1.27}$$

in vollkommener Übereinstimmung mit (1.9) oder (1.12).

Beispiel 1.3.2: Feld einer Linienladung

Beispiele von Linienladungen sind haarfeine Elektronenstrahlen in Braunschen Röhren oder

Ladungsansammlungen auf dünnen Drähten. Natürlich interessieren wir uns hier für ruhende Ladungsverteilungen und beschreiben eine geradlinige Linienladung auf der z-Achse durch die Raumladungsdichte

$$\varrho_{\mathrm{V}}\left\{\vec{r}\right\} = \varrho_{\mathrm{L}}\left\{z\right\}\delta\left\{x\right\}\delta\left\{y\right\} \quad , \tag{1.28}$$

wobei wir die Linienladungsdichte $\varrho_{\mathrm{L}}\left\{z\right\}$ mit der Maßeinheit C/m eingeführt haben. Für das Feld ergibt sich bei konstanter Linienladungsdichte $\varrho_{\mathrm{L}} = \varrho_{\mathrm{L}}\left\{z\right\} = const$

$$\begin{aligned}
\vec{E}(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_V \frac{\varrho_{\mathrm{L}}\,\delta\left\{x'\right\}\,\delta\left\{y'\right\}\,(x-x',y-y',z-z')^T}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(x,y,z-z')^T}{\left(x^2+y^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}z' \\
&= \left(E_{\mathrm{x}}\left\{\vec{r}\right\}, E_{\mathrm{y}}\left\{\vec{r}\right\}, E_{\mathrm{z}}\left\{\vec{r}\right\}\right)^T \quad .
\end{aligned} \tag{1.29}$$

Da der Integrand für die z-Komponente des Feldes antisymmetrisch in z ist, folgt

$$E_{\mathrm{z}} = 0 \quad . \tag{1.30}$$

Für die x-Komponente des Feldes ergibt sich

$$\begin{aligned}
E_{\mathrm{x}}\left\{\vec{r}\right\} &= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{4\pi\varepsilon_0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\left(x^2+y^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}z' \\
&= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{x}{x^2+y^2}\,\frac{z'}{\sqrt{x^2+y^2+z'^2}}\right]_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \\
&= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}\,x}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)} \quad .
\end{aligned} \tag{1.31}$$

Die y-Komponente ist entsprechend

$$E_{\mathrm{y}}(\vec{r}) = \frac{\varrho_{\mathrm{L}} y}{2\pi\varepsilon_0(x^2+y^2)} \quad . \tag{1.32}$$

Ausgedrückt in Zylinderkoordinaten lautet das Feld für die Radialkomponente

$$\boxed{E_\rho = E_\mathrm{x}\cos\{\varphi\} + E_\mathrm{y}\sin\{\varphi\} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0\rho} \quad ,} \tag{1.33}$$

wobei $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$, $\cos\varphi = x/\sqrt{x^2+y^2}$ *und* $\sin\varphi = y/\sqrt{x^2+y^2}$ *berücksichtigt wurden. Die Azimutalkomponente*

$$E_\varphi = -E_\mathrm{x}\sin\{\varphi\} + E_\mathrm{y}\cos\{\varphi\} = 0 \tag{1.34}$$

verschwindet (aus Symmetriegründen) ebenso wie die z*-Komponente. Das Feld einer homogenen unendlich langen Linienladung fällt nach außen zylindersymmetrisch mit dem Abstand* $1/\rho$ *ab.*

Beispiel 1.3.3: Feld einer ebenen Flächenladung

Eine weitere grundlegende Ladungsverteilung ist eine unendlich ausgedehnte ebene Flächenladung, wie sie näherungsweise beim Plattenkondensator auftritt. Die Ladungsverteilung einer Flächenladung in der Ebene $z=0$ *wird beschrieben durch*

$$\varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\} = \varrho_\mathrm{S}\delta\{z\} \quad . \tag{1.35}$$

Das Feld ist

$$\begin{aligned}\vec{E}\{\vec{r}\} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_\mathrm{S}\,\delta\{z'\}\,(x-x', y-y', z-z')^T}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y'\,\mathrm{d}z' \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S}}{4\pi\varepsilon_0}\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-x', y-y', z)^T}{\left((x-x')^2+(y-y')^2+z^2\right)^{3/2}}\,\mathrm{d}x'\,\mathrm{d}y' \quad .\end{aligned} \tag{1.36}$$

Die weitere Integration über die x'*- bzw.* y'*-Komponente liefert für die* E_x*- und die* E_y*-Komponente einen verschwindenden Beitrag, da der Integrand antisymmetrisch ist. Dieses Ergebnis,*

$$E_\mathrm{x} = E_\mathrm{y} \equiv 0 \quad , \tag{1.37}$$

folgt auch sofort durch Variablensubstitution x-x'$\rightarrow$u und y-y'$\rightarrow$v. Für die z-Komponente erhält man

$$\begin{aligned} E_\mathrm{z} &= \frac{\varrho_\mathrm{S}}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{(u^2+v^2+z^2)^{3/2}}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S} z}{4\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{u}{(v^2+z^2)\sqrt{u^2+v^2+z^2}} \right]_{u=-\infty}^{u=\infty} \mathrm{d}v \\ &= \frac{\varrho_\mathrm{S} z}{2\pi\varepsilon_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^2+z^2} = \frac{\varrho_\mathrm{S} z}{2\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{z} \arctan\left\{\frac{v}{z}\right\} \right]_{v=-\infty}^{v=\infty} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\,\frac{z}{|z|} \quad . \end{aligned} \tag{1.38}$$

Das Feld der Flächenladung ist also überall konstant und ist von einer positiven Flächenladung weg gerichtet. Für $\varrho_\mathrm{S} > 0$ ist $E_\mathrm{z} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}$ für $z > 0$ und $E_\mathrm{z} = -\frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}$ für $z < 0$. Die Schwierigkeiten mit dem Vorzeichen sind sofort erledigt, wenn man einen Einheitsvektor $\vec{n}$ definiert, der senkrecht auf der Schicht steht und nach außen bzw. von der Schicht weg weist. Man bekommt

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}\vec{n} \quad .} \tag{1.39}$$

Ist neben der Ladungsschicht bei $z = 0$ eine zweite Flächenladungsschicht mit der Ladungsdichte $-\varrho_\mathrm{S}$ in einer parallelen Ebene $z = d$ vorhanden, dann addieren sich die Einzelfelder. Für $z < 0$ ist

$$E_{\mathrm{z}^+} = -\frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0} \quad , E_{\mathrm{z}^-} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}$$

und damit

$$E_\mathrm{z} = E_{\mathrm{z}^+} + E_{\mathrm{z}^-} = 0 \quad .$$

Für $z > d$ ist

$$E_{\mathrm{z}^+} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0} \quad , E_{\mathrm{z}-} = -\frac{\varrho_\mathrm{S}}{2\varepsilon_0}$$

und damit ebenfalls

$$E_\mathrm{z} = E_{\mathrm{z}^+} + E_{\mathrm{z}^-} = 0 \quad .$$

Im Zwischenraum zwischen beiden Schichten $0 < z < d$ *gilt* $E_{z+} = \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0}$ *und* $E_{z-} = \frac{\varrho_S}{2\varepsilon_0}$ *und folglich*

$$E_z = E_{z+} + E_{z-} = \frac{\varrho_S}{\varepsilon_0} \quad . \tag{1.40}$$

Das Feld zwischen beiden Schichten ist homogen und besitzt nur eine z*-Komponente.* ϱ_S *bezeichnet den Absolutwert der Flächenladungsdichte einer Schicht. Im Außenraum verschwindet das Feld. Die Analogie zum Plattenkondensator ist evident.*

1.4 Das Gaußsche Gesetz für das elektrische Feld

Ziel dieses Abschnitts ist die Herleitung des Gaußschen Gesetzes aus dem Coulombschen Gesetz. Im Gaußschen Gesetz wird der Zusammenhang zwischen dem integralen Anteil des elektrischen Feldes, das durch eine geschlossene Oberfläche tritt, und den darin befindlichen Ladungen hergestellt. Dies bedeutet, dass das Oberflächenintegral auf beiden Seiten von (1.24) berechnet werden muss. Zur Vorbereitung erinnern wir an den Gaußschen Integralsatz und wenden ihn auf das Vektorfeld $(\vec{r} - \vec{r_0})/|\vec{r} - \vec{r_0}|^3$ an.

1.4.1 Der Gaußsche Integralsatz

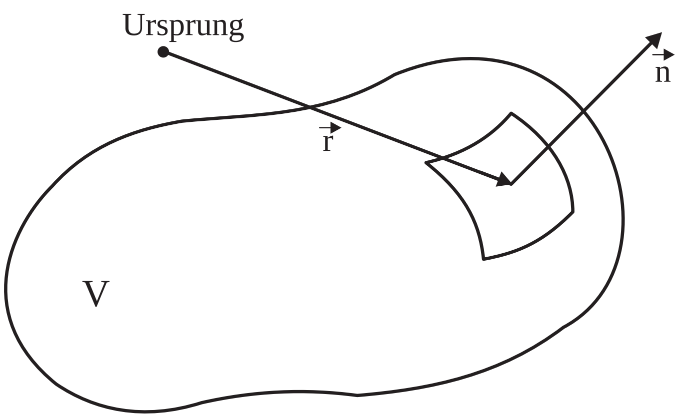


Abbildung 1.4: Volumenbereich V, Oberflächenelement d^2r und nach außen weisend Normalen-Einheitsvektor $\vec{n}$ auf der Oberfläche S.

Zur Herleitung des Gaußschen Integralsatzes wollen wir das elektrische Feld auf der gesamten Oberfläche eine beliebigen Körpers, wie er in Bild 1.4 dargestellt ist, integrieren.

Man kann sich den Körper aus lauter kleinen Elementarzellen von der Gestalt eines Würfels zusammengesetzt denken. Die Gesamtfläche von zwei an einer Fläche exakt aneinanderstoßenden Würfeln ist genau die Summe der äußere Flächen, da die Oberflächenelemente immer nach außen zeigen und sich die aneinanderstoßenden Flächen kompensieren. Es genügt zunächst einmal den Würfel nach Bild 1.5 zu betrachten.

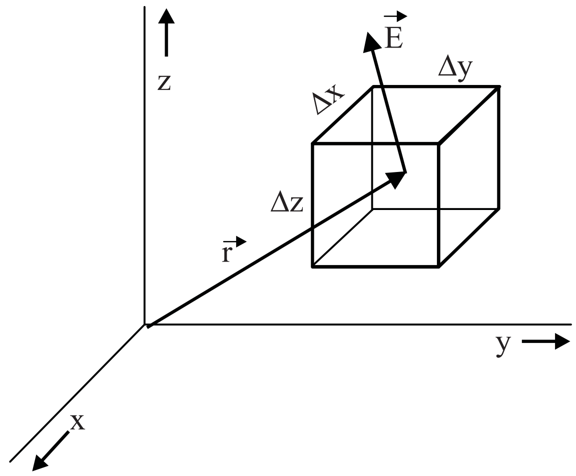


Abbildung 1.5: Zur Berechnung des Flusses aus einem infinitesimalen Würfel

Der Würfel hat die Kantenlängen $\Delta x, \Delta y, \Delta z$, und daher kann

$$\begin{aligned}
\lim_{\Delta V \to 0} \oiint_{S_{\Delta \mathrm{V}}} & \vec{E}\left\{\vec{r}\right\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \\
& \lim_{\Delta V \to 0} \iint_{\mathrm{vorn}} E_{\mathrm{x}} \left\{\vec{r} + \frac{\Delta x}{2}\vec{e}_{\mathrm{x}}\right\} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z - \lim_{\Delta V \to 0} \iint_{\mathrm{hinten}} E_{\mathrm{x}} \left\{\vec{r} - \frac{\Delta x}{2}\vec{e}_{\mathrm{x}}\right\} \mathrm{d}y\ \mathrm{d}z \\
+ & \lim_{\Delta V \to 0} \iint_{\mathrm{rechts}} E_{\mathrm{y}} \left\{\vec{r} + \frac{\Delta y}{2}\vec{e}_{\mathrm{y}}\right\} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z - \lim_{\Delta V \to 0} \iint_{\mathrm{links}} E_{\mathrm{y}} \left\{\vec{r} - \frac{\Delta y}{2}\vec{e}_{\mathrm{y}}\right\} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}z \\
+ & \lim_{\Delta V \to 0} \iint_{\mathrm{oben}} E_{\mathrm{z}} \left\{\vec{r} + \frac{\Delta z}{2}\vec{e}_{\mathrm{z}}\right\} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y - \lim_{\Delta V \to 0} \iint_{\mathrm{unten}} E_{\mathrm{z}} \left\{\vec{r} - \frac{\Delta z}{2}\vec{e}_{\mathrm{z}}\right\} \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \quad ,
\end{aligned} \tag{1.41}$$

notiert werden, wobei offensichtliche Abkürzungen für die Bezeichnungen der Seitenflächen des infinitesimalen Würfels eingeführt wurden. Durch die Minuszeichen wurden die unterschiedlichen Orientierungen der Oberflächenelemente berücksichtigt. Die Einheitsvektoren in Achsenrichtung sind $\vec{e}_\mathrm{x}, \vec{e}_\mathrm{y}, \vec{e}_\mathrm{z}$. Setzt man die Taylorentwicklung der Feldstärke $\big($zum Beispiel $E_\mathrm{x}\left\{\vec{r} + \frac{\Delta x}{2}\vec{e}_\mathrm{x}\right\} = E_\mathrm{x}\left\{\vec{r}\right\} + \frac{\partial E_\mathrm{x}}{\partial x}\big|_{\vec{r}}\frac{\Delta x}{2}\big)$ in (1.41) ein so ergibt sich

$$\lim_{\Delta V \to 0} \oiint_{S_{\Delta \mathrm{V}}} \vec{E}\left\{\vec{r}\right\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{\partial E_\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial y} + \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial z}\right)\bigg|_{\vec{r}} \Delta x \, \Delta y \, \Delta z \quad .$$

Die Erweiterung auf den Gesamtkörper erfolgt durch aufintegrieren über das Gesamtvolumen, so dass

$$\oiint_{S_V} \vec{E}\left\{\vec{r}\right\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint_V \left(\frac{\partial E_\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial y} + \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial z}\right)\bigg|_{\vec{r}} \mathrm{d}^3 r \tag{1.42}$$

resultiert. Die Orientierung des Oberflächenelementes in (1.42) ist immer nach außen, wie in Bild 1.4 dargestellt ist. Abkürzend wird

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E}\left\{\vec{r}\right\} = \left(\frac{\partial E_\mathrm{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_\mathrm{y}}{\partial y} + \frac{\partial E_\mathrm{z}}{\partial z}\right)\bigg|_{\vec{r}} \quad ,$$

aus (1.43) mit dem Nabla-Operator

$$\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)^T = \vec{e}_\mathrm{x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_\mathrm{y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.43}$$

geschrieben. Dies ist der Ausdruck für die Divergenz in kartesischen Koordinaten. Zur Verallgemeinerung ersetzen wir $\vec{E}$ durch ein Vektorfeld $\vec{C}\left\{\vec{r}\right\} = \left(C_\mathrm{x}\left\{\vec{r}\right\}, C_\mathrm{y}\left\{\vec{r}\right\}, C_\mathrm{z}\left\{\vec{r}\right\}\right)^T$ mit stetigen partiellen Ableitungen. Nach Einsetzen resultiert der **Gaußsche Integralsatz**

Gaußscher Integralsatz

$$\iiint_V \vec{\nabla} \circ \vec{C}\left\{\vec{r}\right\} \, \mathrm{d}^3 r = \oiint_{S_V} \vec{C}\left\{\vec{r}\right\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{1.44}$$

Als Beispiel wenden wir den Gaußschen Integralsatz auf das Vektorfeld

$$\vec{C}\{\vec{r}\} = \frac{\vec{r}-\vec{r_0}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3} \tag{1.45}$$

an und berechnen das Oberflächenintegral $\oiint\limits_{S_\mathrm{V}} \vec{C}\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}$ für die Oberfläche S_V eines beliebigen Volumenbereiches V.

1. Fall: $\vec{r_0}$ liege außerhalb von V

$\vec{C}\{\vec{r}\}$ ist überall in V stetig differenzierbar und Ausdifferentiation in kartesischen Koordinaten liefert

$$\vec{\nabla} \circ \frac{\vec{r}-\vec{r_0}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3} = \frac{3}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3} - 3\frac{|\vec{r}-\vec{r_0}|^2}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^5} = 0 \quad , \tag{1.46}$$

denn nach der Produktregel ist zum Beispiel $(\vec{r} = (x, y, z)^T, \vec{r_0} = (x_0, y_0, z_0)^T)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{x-x_0}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3} = \frac{\partial}{\partial x}\Big((x-x_0)\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{-3/2}\Big)$$

$$= \left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{-3/2} +$$

$$+(x-x_0)\left(-\tfrac{3}{2}\right)2\,(x-x_0)\left((x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right)^{-5/2}$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3} - \frac{3(x-x_0)^2}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^5} \quad , \tag{1.47}$$

und die Addition der drei Ableitungen $\frac{\partial C_\mathrm{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial C_\mathrm{y}}{\partial y}$ und $\frac{\partial C_\mathrm{z}}{\partial z}$ ergibt offenbar das Ergebnis (1.46). Damit gilt für $\vec{r_0}$ außerhalb V

$$\oiint\limits_{S_\mathrm{V}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint\limits_{V} \vec{\nabla} \circ \vec{C}\ \mathrm{d}^3 r = 0 \quad . \tag{1.48}$$

2. Fall: $\vec{r}_0$ liege innerhalb V

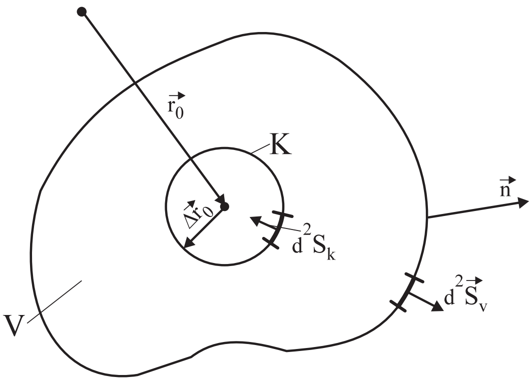


Abbildung 1.6: Geometrie zur Integralberechnung

Wir legen gemäß Abbildung 1.6 eine Kugel K mit Radius Δr_0 um den Aufpunkt $\vec{r}_0$, so dass die Kugel vollkommen in V liegt. Wir untersuchen das neue Volumen $V' = V - K$ mit der Oberfläche $S_{\mathrm{V}'} = S_{\mathrm{V}} \cup S_{\mathrm{K}}$. Da $\vec{r}_0$ außerhalb von V' liegt, gilt nach Fall 1

$$0 = \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{V}'}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{V}}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} + \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{K}}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \quad , \tag{1.49}$$

also

$$\oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{V}}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = - \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{K}}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{1.50}$$

wobei die Gleichheit auf der rechten Seite für alle Integrale, insbesondere Flächenintegrale gültig ist. Das Integral über die Kugeloberfläche lässt sich einfach auswerten. Für Punkte auf der Kugeloberfläche gilt $|\vec{r} - \vec{r}_0| = \Delta r_0$ und $(\vec{r} - \vec{r}_0) \circ \mathrm{d}^2\vec{r}_{\mathrm{K}} = -\Delta r_0 \, \mathrm{d}^2 r_{\mathrm{K}}$, da der Normalenvektor auf der Kugeloberfläche nach innen auf den Kugelmittelpunkt gerichtet ist. Damit ist

$$\begin{aligned} \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{K}}} \frac{(\vec{r} - \vec{r}_0)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} &= \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{K}}} \frac{-\Delta r_0}{\Delta r_0^3} \, \mathrm{d}^2 r = -\frac{\Delta r_0}{(\Delta r_0)^3} \oint\!\!\!\oint_{S_{\mathrm{K}}} \mathrm{d}^2 r \\ &= -\frac{\Delta r_0}{(\Delta r_0)^3} \, 4\pi (\Delta r_0)^2 = -4\pi \quad , \end{aligned} \tag{1.51}$$

da das Integral über die Kugeloberfläche $4\pi(\Delta r_0)^2$ beträgt. Nach (1.50) folgt damit für $\vec{r_0}$ innerhalb V

$$\oiint_{S_\mathrm{V}} \vec{C} \circ \mathrm{d}^2\vec{r_V} = 4\pi \quad , \tag{1.52}$$

vollkommen unabhängig von der Gestalt von V. Fassen wir (1.48) und (1.52) zusammen, erhalten wir das wichtige Ergebnis

$$\boxed{\oiint_{S_\mathrm{V}} \frac{\vec{r}-\vec{r_0}}{|\vec{r}-\vec{r_0}|^3} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \begin{cases} 4\pi & \text{für } \vec{r_0} \text{ innerhalb V} \\ 0 & \text{für } \vec{r_0} \text{ außerhalb V} \end{cases} \quad .} \tag{1.53}$$

1.4.2 Die Integralform des Gaußschen Gesetzes für das elektrische Feld

Nach (1.27) ist das Feld einer Punktladung Q_i bei $\vec{r_i}$ durch

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r_i}}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^3} \tag{1.54}$$

gegeben. Das Feld mehrerer Punktladungen baut sich durch vektorielle Superposition der Einzelfelder auf

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \sum_{i=1}^{N} \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}-\vec{r_i}}{|\vec{r}-\vec{r_i}|^3} \quad . \tag{1.55}$$

Sei nun V ein Volumen, in dem $M \leq N$ der Punktladungen enthalten seien und S_V die zugehörige Oberfläche. Nach (1.53) folgt unmittelbar

$$\oiint_{S_V} \vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{M} Q_i = \frac{Q_\mathrm{ges}}{\varepsilon_0} \quad , \tag{1.56}$$

wobei Q_{ges} die von der Fläche S_{V} eingeschlossene Ladung bezeichnet. Die außerhalb befindlichen Ladungen haben keinen Einfluss auf die Größe des Integrals. Dieser Sachverhalt gilt auch für eine kontinuierliche Ladungsverteilung, deren Feld durch (1.24) bestimmt ist. Man erhält nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge

$$\begin{aligned}
\oiint\limits_{S_{\text{V}}} \vec{E}\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \oiint\limits_{S_{\text{V}}} \left\{ \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho_{\text{V}}\{\vec{r}'\} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\, \mathrm{d}^3r' \right\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho_{\text{V}}\{\vec{r}'\} \left\{ \oiint\limits_{S_{\text{V}}} \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \right\} \mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} 4\pi\varrho_{\text{V}}\{\vec{r}'\}\, \mathrm{d}^3r' = \frac{Q_{\text{V}}}{\varepsilon_0} \quad .
\end{aligned} \tag{1.57}$$

Hierbei ist Q_{V} die gesamte im Volumen V befindliche Ladung. In (1.57) ist die letzte Integration auf das Volumen V zu beschränken, da das Oberflächenintegral über S_{V} für außerhalb befindliche Ladungen verschwindet. Man bezeichnet

$$\oiint\limits_{S_{\text{V}}} \vec{E}\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} 4\pi\varrho_{\text{V}}\{\vec{r}'\}\, \mathrm{d}^3r' \tag{1.58}$$

als **Integralform des Gaußschen Gesetzes**.

Es besagt, dass das Oberflächenintegral über die Feldstärke bis auf den Faktor ε_0^{-1} gleich der eingeschlossenen Ladungsmenge ist.

1.4.3 Die Differentialform des Gaußschen Gesetzes für die elektrische Feldstärke

Die Differentialform des Gaußschen Gesetzes folgt durch Anwendung des Gaußschen Integralsatzes auf (1.57). Hiernach erhält man

$$\oiint\limits_{S_\mathrm{V}} \vec{E}\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint\limits_{V} \vec{\nabla} \circ \vec{E}\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint\limits_{V} \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r \quad . \tag{1.59}$$

Da diese Beziehung für alle Volumen V, also insbesondere auch für infinitesimal kleine Bereiche gilt, muss nach dem Mittelwertsatz der Integralrechnung gelten

$$\boxed{\varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{E}\{\vec{r}\} = \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\} \quad ,} \tag{1.60}$$

damit (1.59) immer richtig bleibt. Die Beziehung (1.60) wird als **Differentialform des Gaußschen Gesetzes** bezeichnet. Offenbar ist gemäß der Herleitung das Coulombfeld eine Lösung von (1.60). Aber es gibt auch noch andere Lösungen von (1.60), die Ausdruck für die größere Allgemeinheit des Gaußschen Gesetzes sind.

1.4.4 Verallgemeinerung des Gaußschen Gesetzes

Setzt man das Coulombfeld (1.24) in (1.60) ein, folgt

$$\varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \varrho_\mathrm{V} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \mathrm{d}^3 r' \right) = \varrho_\mathrm{V} \quad .$$

Mit Ersetzen von ϱ_V durch eine beliebige (stetig differenzierbare) Funktion f resultiert der allgemeine Zusammenhang

$$\boxed{\vec{\nabla} \circ \iiint\limits_{V} f\{\vec{r}\,'\} \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \mathrm{d}^3 r' = 4\pi f\{\vec{r}\} \quad ,} \tag{1.61}$$

den wir später noch häufiger benötigen.

Da der $\vec{\nabla}$- Operator nur auf die ungestrichenen Koordinaten wirkt, kann er in das Integral gezogen werden.

$$\iiint\limits_V f\{\vec{r}'\}\vec{\nabla}\circ\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3r' = 4\pi f\{\vec{r}\} \quad , \tag{1.62}$$

Der Vergleich der linken und der rechten Seite legt nahe, dass $\vec{\nabla}\circ\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} = \delta\{\vec{r}-\vec{r}'\}$ identifiziert werden kann, weil in beiden Fällen das gleiche Ergebnis für alle $\vec{r}$ aus dem Integral resultiert.

1.4.5 Interpretation des Gaußschen Gesetzes

Durch Anwendung des Gaußschen Satzes auf ein kleines Volumen $\Delta V = \Delta x\Delta y\Delta z$ lässt sich zum Beispiel nach (1.59) schreiben

$$\vec{\nabla}\circ\vec{E}\{\vec{r}\} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{\oiint\limits_{S_{\Delta\mathrm{V}}}\vec{E}\{\vec{r}\}\circ\mathrm{d}^2\vec{r}}{\Delta V} = \frac{\varrho_{\mathrm{V}}\{\vec{r}\}}{\varepsilon_0} \tag{1.63}$$

Fasst man $\oiint\limits_{S_{\Delta\mathrm{V}}}\vec{E}\{\vec{r}\}\circ\mathrm{d}^2\vec{r}$ als Fluss durch die Oberfläche $S_{\Delta\mathrm{V}}$ auf, so ist $\vec{\nabla}\circ\vec{E}\{\vec{r}\}$ als Fluss pro Volumen am Ort $\vec{r}$ zu interpretieren, der aus dem infinitesimalen Volumen ΔV um $\vec{r}$ heraus erfolgt. Dieser Fluss ist aber nach (1.60) gerade der, der die vorherrschende Ladungsdichte bestimmt. Die Flussdichte als Fluss pro Fläche ist in dieser Vorstellung proportional zur elektrischen Feldstärke. Aus einem Volumenelement, das keine Ladung enthält, erfolgt kein Fluss. Das Feld ist an solchen Stellen, wie man sagt, divergenz- oder quellenfrei, d. h. $\vec{\nabla}\circ\vec{E}\{\vec{r}\} = 0$.

1.5 Der elektrische Strom

In diesem Abschnitt werden wir bewegte elektrische Ladungen untersuchen, die bekanntlich zu einem elektrischen Strom führen. Experimentell stellt man fest, dass die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System konstant ist. Die Gesamtladung ist also eine Erhaltungsgröße. Zum Beispiel sind Elektronen in Metallen relativ frei beweglich, die positiv geladenen Atome des Kristallgitters dagegen ortsfest. Die Gesamtladung als Summe der positiven und negativen Ladungen ist null. Bewegliche negative Ladungen, d. h. Elektronen, bewirken einen elektrischen Strom, die ortsfesten positiven Ladungen geben keinen Beitrag zum Strom.

1.5.1 Die elektrische Stromdichte

Einer mit der Geschwindigkeit $\vec{v}\,\{\vec{r}\}$ bewegten Ladungsdichte ϱ_V am Ort $\vec{r}$ ordnet man gemäß

$$\boxed{\vec{j}_\mathrm{V}\,\{\vec{r}\} = \varrho_\mathrm{V}\,\{\vec{r}\}\;\vec{v}\,\{\vec{r}\}} \tag{1.64}$$

eine Stromdichte $\vec{j}_\mathrm{V}\,\{\vec{r}\}$ zu. Anschaulich hat man sich nach Abbildung 1.7 vorzustellen, dass sich ein infinitesimales Ladungspaket $\mathrm{d}^3Q = \varrho_\mathrm{V}\,\mathrm{d}^3r$ mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ fortbewegt.

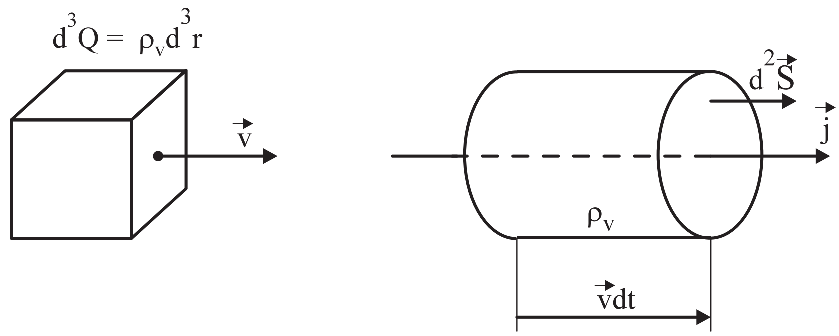


Abbildung 1.7: Bewegtes Ladungspaket und Ladungsdurchtritt durch ein orientiertes Flächenelement $\mathrm{d}^2\vec{r}$

Durch ein Flächenelement $\mathrm{d}^2\vec{r}$ tritt in der Zeit $\mathrm{d}t$ die Ladungsmenge

$$\mathrm{d}^3Q_\mathrm{S} = \varrho_\mathrm{V}\,\vec{v} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}\;\mathrm{d}t \tag{1.65}$$

hindurch, die sich in einem Zylinder der Höhe $\vec{v}\,\mathrm{d}t$ vor dem Flächenelement befindet. Das Ladungsflusselement bzw. Stromelement

$$\mathrm{d}^2 J = \frac{\mathrm{d}^3 Q}{\mathrm{d}t} = \varrho_{\mathrm{V}}\, \vec{v} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \vec{j}_{\mathrm{V}} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{1.66}$$

gibt die Ladung an, die pro Zeiteinheit durch $\mathrm{d}^2\vec{r}$ hindurchtritt. Das Flächenintegral

$$I = \iint\limits_S \mathrm{d}^2 J = \iint\limits_S \varrho_{\mathrm{V}}\, \vec{v} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iint\limits_S \vec{j}_{\mathrm{V}} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{\mathrm{d}Q_{\mathrm{S}}}{\mathrm{d}t} \tag{1.67}$$

bezeichnet die Ladung $\mathrm{d}Q_{\mathrm{S}}$, die in der Zeit $\mathrm{d}t$ durch die Fläche S hindurchtritt. Diese Größe ist als elektrische Stromstärke zu identifizieren, wie sie experimentell z. B. mit einem Ampèremeter gemessen wird. Ihre Maßeinheit ist das Ampère, abgekürzt A. Es ist $\mathsf{A} = \mathsf{C}/\mathsf{s}$, wobei C = Coulomb die Maßeinheit für die elektrische Ladung bezeichnet.

1.5.2 Die Kontinuitätsgleichung

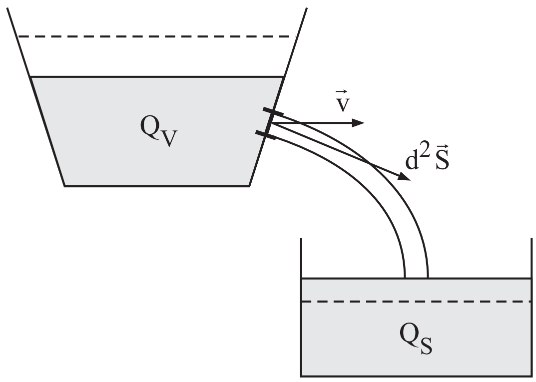


Abbildung 1.8: Zur Ladungserhaltung

Das Prinzip der Ladungserhaltung besagt, dass in einem abgeschlossenen System die Gesamtladung konstant ist. Gleich große Mengen positiver und negativer Ladungen können simultan durch Ladungstrennung erzeugt oder durch Rekombination vernichtet werden. Die Gesamtladung eines Volumenbereiches nimmt nur durch Ladungsfluss aus dem Volumen ab. Vergleicht man nach Abbildung 1.8 die Gesamtladung $Q_{\mathrm{V}}\,\{t\}$ des Volumens zur Zeit t mit der zur früheren Zeit t_0, so ist die Differenz durch das Zeitintegral des ausgeflossenen Stromes zu interpretieren. Dabei muss berücksichtigt werden, dass der Strom irgendwo durch die Oberfläche des Volumens fließen kann:

$$\begin{aligned} Q_\mathrm{V}\{t\} &= Q_\mathrm{V}\{t_0\} - \int\limits_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t} Q\bigg|_{S_\mathrm{V}} \,\mathrm{d}t \\ &= Q_\mathrm{V}\{t_0\} - \int\limits_{t_0}^{t} I \,\mathrm{d}t \\ &= Q_\mathrm{V}\{t_0\} - \int\limits_{t_0}^{t} \oiint\limits_{S_\mathrm{V}} \vec{j}_\mathrm{V} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}\,\mathrm{d}t \quad . \end{aligned} \tag{1.68}$$

Die Ladungsänderung pro Zeiteinheit ist also

$$\frac{\partial}{\partial t} Q_\mathrm{V} = - \oiint\limits_{S_\mathrm{V}} \vec{j}_\mathrm{V} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}\,\mathrm{d}t \quad . \tag{1.69}$$

Das Minuszeichen in (1.69) tritt auf, weil sich durch austretende Ladung die Gesamtladung des Volumens verringert. Schreibt man für die Ladung des Volumens

$$Q_\mathrm{V}\{t\} = \iiint\limits_{V} \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r},t\}\,\mathrm{d}^3r \tag{1.70}$$

und für die Stromstärke aus dem Volumen nach dem Gaußschen Integralsatz

$$J = \oiint\limits_{S} \vec{j}_\mathrm{V} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint\limits_{V} \vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V}\,\mathrm{d}^3r \quad , \tag{1.71}$$

dann folgt aus (1.69) für die Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}Q_\mathrm{V}}{\mathrm{d}t} = \iiint\limits_{V} \frac{\partial}{\partial t} \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r},t\}\,\mathrm{d}^3r = - \iiint\limits_{V} \vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V}\{\vec{r},t\}\,\mathrm{d}^3r \quad . \tag{1.72}$$

Da diese Beziehung für alle Volumen V gilt, müssen die Integranden gleich sein, so dass

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} \varrho_\mathrm{V}\{\vec{r},t\} + \vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V}\{\vec{r},t\} = 0 \quad .} \tag{1.73}$$

Dies ist die **Kontinuitätsgleichung für elektrische Ladungen**. Sie ist vollkommen äquivalent zur Ladungserhaltung, denn offenbar folgt aus (1.73) die Erfahrungstatsache (1.69). Die Kontinuitätsgleichung gilt an jedem Punkt im gesamten Raum. Sprachlich wird zwischen ruhenden und bewegten Ladungsträgern unterschieden, wobei ruhende Ladungsträger zur Ladungsträgerdichte und bewegte Ladungsträger zur Stromdichte zählen. Die Kontinuitätsgleichung erfasst gerade diese örtliche Umwandlung, die aus dem Sprachgebrauch folgt. Wird ein Ladungsträger aus der Ruhe heraus beschleunigt, nimmt die Ladungsträgerdichte ab und die Stromdichte zu, beim Abbremsen bis zum Stillstand erhöht sich die Ladungsträgerdichte auf Kosten der Stromdichte. Wenn die Stromdichte in ihrer üblichen Darstellung (1.64) in die Kontinuitätsgleichung eingesetzt wird, verschwindet auch die scheinbare Verletzung der Ladungserhaltung:

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\} + \vec{\nabla}\circ\left(\varrho_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\}\,\vec{v}\,\{\vec{r},t\}\right) = 0 \quad . \tag{1.74}$$

Wird zusätzlich die lokale Generation bzw. ihre Rekombination von Ladungsträgern berücksichtigt, muss die Kontinuitätsgleichung um die Generations- und Rekombinationsrate $G\{\vec{r},t\}$ und $R\{\vec{r},t\}$ erweitert werden:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\} + \vec{\nabla}\circ\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\} = G\{\vec{r},t\} - R\{\vec{r},t\}} \tag{1.75}$$

Vollkommen ausgeschrieben ergibt sich mit Ersetzung der Stromdichte durch (1.64)

$$\frac{\partial}{\partial t}\varrho_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\} + (\vec{\nabla}\varrho_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\})\circ\vec{v}\,\{\vec{r},t\} + \varrho_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r},t\}\,(\vec{\nabla}\circ\vec{v}\,\{\vec{r},t\}) = G\{\vec{r},t\} - R\{\vec{r},t\} \quad . \tag{1.76}$$

Der erste Term links beschreibt die zeitliche Veränderung der Ladungsdichte, die anderen stehen für örtliche Veränderungen (Inhomogenitäten). Im zweiten Term ist eine räumliche Veränderung der Ladungsträgerdichte erfasst, die wegen ihrer Bewegung mit $\vec{v}$ auch als **Generations- bzw. Rekombinationsstromdichte** bezeichnet wird. Im dritten Term steht die oben diskutierte räumliche Veränderung der Geschwindigkeit, also ein Beschleunigen oder Abbremsen in einem bestimmten Bereich.

Kapitel 2

Elektrostatik

Elektrostatische Probleme sind gekennzeichnet durch verschwindende Zeitableitungen $\partial/\partial t = 0$. Häufig genügt aber auch die Bedingung $\vec{j} = 0$. Damit gilt auch $\partial\varrho/\partial t = 0$ und $\vec{B} = \vec{0}$. Die Maxwellschen Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0 \tag{2.1}$$

und

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\varrho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0} \quad . \tag{2.2}$$

Die Lorentzkraft reduziert sich zu

$$\vec{F} = Q\,\vec{E} \tag{2.3}$$

bzw.

$$\vec{f} = \varrho_{\mathrm{V}}\vec{E} \quad . \tag{2.4}$$

2.1 Energie und Potenzial

2.1.1 Potentielle Energie im elektrischen Feld

Wirkt auf eine Ladung die vom elektrischen Feld erzeugte Kraft (2.3), so ist ihre Kraftkomponente F_{l} in Richtung eines Einheitsvektors $\vec{e}_\ell$ gegeben durch $F_{\mathrm{l}} = Q\vec{E} \circ \vec{e}_\ell$. Um die

Ladung in Richtung des Einheitsvektors $\vec{e}_l$ zu bewegen, müssen wir also eine äußere Kraft $\vec{F}_\mathrm{a}$ mit $\vec{F}_\mathrm{a} = -\vec{F}_\mathrm{l}$ aufwenden um die Kraftwirkung des Feldes zu überwinden. Die von außen zu verrichtende Arbeit für eine Verschiebung um die differentielle Strecke $\mathrm{d}\vec{l} = \vec{e}_l\,\mathrm{d}l$ ist

$$\mathrm{d}W_\mathrm{pot} = \vec{F}_\mathrm{a}\,\mathrm{d}\ell = -Q\vec{E} \circ \mathrm{d}\ell \quad . \tag{2.5}$$

Die Verschiebung entlang einer Kurve C mit Anfangspunkt $\vec{r}_\mathrm{i}$ und Endpunkt $\vec{r}_\mathrm{e}$ erfordert die Arbeit

$$W_\mathrm{pot} = -Q\sum_i \vec{E}\left\{\ell_i\right\} \circ \Delta\ell_i = -Q\int\limits_{\vec{r}_\mathrm{i}}^{\vec{r}_\mathrm{e}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell \quad . \tag{2.6}$$

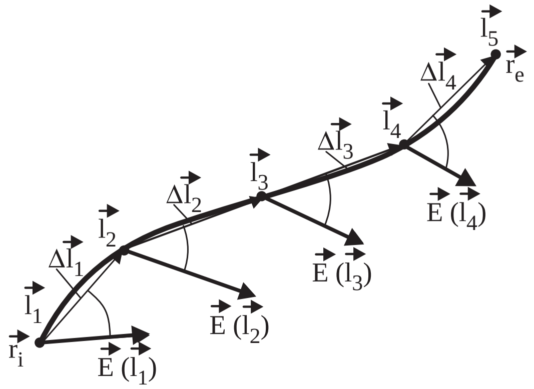


Abbildung 2.1: Zum Kurvenintegral

Hierbei sind nach Abbildung 2.1 $\Delta\vec{\ell}_i$ Vektorabschnitte der Kurve C und $\vec{\ell}_i$ Punkte auf der Kurve. Ist in (2.6) $W_\mathrm{pot} > 0$, dann wird von außen Arbeit zugeführt und die Energie des Systems wächst. Für $W_\mathrm{pot} < 0$ wird Arbeit nach außen abgegeben und die Systemenergie sinkt.

Im Grenzfall sehr kleiner $\Delta\vec{\ell}_i$ geht die Summe in ein Kurvenintegral über.

Im elektrostatischen Feld ist die zu verrichtende Arbeit nur abhängig vom Anfangspunkt $\vec{r}_\mathrm{i}$ und Endpunkt $\vec{r}_\mathrm{e}$ der Kurve. Seien nämlich C_1 und C_2 zwei verschiedene Kurven mit denselben Anfangs- und Endpunkten, dann ist die Differenz der Kurvenintegrale $\Delta W_\mathrm{pot} = W_{\mathrm{pot}\ 1} - W_{\mathrm{pot}\ 2}$ ein Kurvenintegral über eine geschlossene Kurve $C = C_1 \cup C_2$ mit

$$\Delta W_{\mathrm{pot}} = W_{\mathrm{pot}\ 1} - W_{\mathrm{pot}\ 2} = -Q \int\limits_{C_1} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell + Q \int\limits_{C_2} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell$$
$$= -Q \oint\limits_{C} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell = -Q \iint\limits_{S} \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = 0 \quad . \tag{2.7}$$

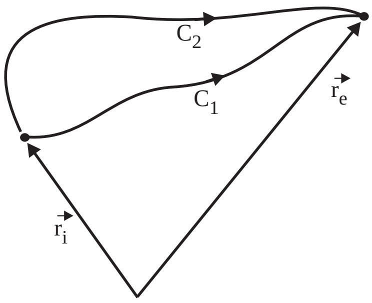


Abbildung 2.2: Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals

Hierbei haben wir den **Stokesschen Integralsatz**

$$\iint\limits_{S} (\vec{\nabla} \times \vec{T}) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \oint\limits_{C_{\mathrm{S}}} \vec{T} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad . \tag{2.8}$$

und $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ benutzt. Wegen der Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals definiert man bei festgehaltenem Anfangspunkt $\vec{r_{\mathrm{a}}}$ die Größe

$$W_{\mathrm{pot}}\left\{\vec{r}\right\} = W_{\mathrm{pot}}\left\{\vec{r}_{\mathrm{a}}\right\} - Q \int\limits_{\vec{r}_{\mathrm{a}}}^{\vec{r}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell \tag{2.9}$$

als potentielle Energie der Ladung im Feld $\vec{E}$. Oft setzt man $\vec{r_{\mathrm{a}}} \to \infty$ als Bezugspunkt mit $W\{\infty\} = 0$ fest. In kartesischen Koordinaten ist $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{e}_{\mathrm{x}}\,\mathrm{d}x + \vec{e}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{d}y + \vec{e}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{d}z$ und

$$W_{\mathrm{pot}}\left\{\vec{r}\right\} = W_{\mathrm{pot}}\left\{\vec{r}_{\mathrm{a}}\right\} - Q \int\limits_{\vec{r}_{\mathrm{a}}}^{\vec{r}} \left(E_{\mathrm{x}}\vec{e}_{\mathrm{x}} + E_{\mathrm{y}}\vec{e}_{\mathrm{y}} + E_{\mathrm{z}}\vec{e}_{\mathrm{z}}\right) \circ \left(\vec{e}_{\mathrm{x}}\,\mathrm{d}x + \vec{e}_{\mathrm{y}}\,\mathrm{d}y + \vec{e}_{\mathrm{z}}\,\mathrm{d}z\right) \tag{2.10}$$

Bei der Auswertung des Integrals hat man noch die Integrationsgrenzen in x-, y- und z-Richtung einzusetzen.

2.1.2 Potenzialdifferenz und Potenzial

Als potentielle Energie definiert man die von einer äußeren Kraft an einer positiven Einheitsladung Q zu verrichtende Arbeit W_{pot}, um die Ladung von einem Anfangspunkt $\vec{r_{\mathrm{a}}}$ an einen Endpunkt $\vec{r}$ zu bringen. Die potentielle Energie W_{pot} eines Systems mit einer Ladung Q nimmt gemäß

$$\boxed{V_{\vec{r}_{\mathrm{a}},\vec{r}} = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{d}Q} = V\left\{\vec{r}_{\mathrm{a}}\right\} - \int\limits_{\vec{r}_{\mathrm{a}}}^{\vec{r}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell}} \tag{2.11}$$

um $\mathrm{d}W_{\mathrm{pot}}$ bei Zuführung der Ladung $\mathrm{d}Q$ zu.

Die Potenzialdifferenz zwischen zwei Punkten ist wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ offenbar unabhängig vom Weg. Als Bezugspunkt wählt man häufig einen Punkt auf der sogenannten **Fernkugel** mit $|\vec{r_{\mathrm{a}}}| \to \infty$, die als geerdet $(V\left\{|\vec{r_{\mathrm{a}}}| = \infty\right\} = 0)$ angenommen wird, und definiert das **Potenzial** als

$$V\left\{\vec{r}\right\} = -\int\limits_{|r_{\mathrm{a}}|=\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int^{\vec{r}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad . \tag{2.12}$$

$V\left\{\vec{r}\right\}$ ist positiv, wenn Arbeit verrichtet werden muss, um eine positive Einheitsladung von $|\vec{r}| = \infty$ an den Punkt $\vec{r}$ zu bringen.

Wenn $V\left\{\vec{r}\right\} = 0$ ist, sagt man, der Punkt $\vec{r}$ ist geerdet. Messbar sind nur Potenzialdifferenzen als elektrische Spannungen, nicht dagegen das Potenzial selbst. Man braucht offenbar einen endlichen Bezugspunkt.

Beispiel 2.1.1: Potenzial einer Punktladung im Ursprung

Das elektrische Feld einer Punktladung im Ursprung ist durch

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\vec{e}_{\mathrm{r}} \tag{2.13}$$

gegeben und wir wählen einen radialen Weg vom Unendlichen nach r mit $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{e}_\mathrm{r}\,\mathrm{d}r$. *Das Potenzial ergibt sich dann aus*

$$V = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = -\int_{\infty}^{r} \left(\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r'^2} \vec{e}_\mathrm{r} \right) \circ \vec{e}_\mathrm{r}\,\mathrm{d}r' = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{\mathrm{d}r'}{r'^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r} \qquad (2.14)$$

Befindet sich die Punktladung nicht mehr im Ursprung, wird die Berechnung etwas aufwändiger, wie im folgenden Beispiel ersichtlich wird.

Beispiel 2.1.2: Potenzial einer Punktladung am Ort $\vec{r}_1$

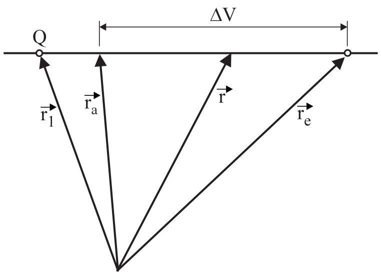


Abbildung 2.3: Integrationsweg zur Berechnung des Potenzials einer Punktladung

Das elektrische Feld der Punktladung, die sich am Ort $\vec{r}_1$ *befindet, lautet nach (1.9)*

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}_1|^3} \qquad (2.15)$$

Zur Berechnung des Potenzials am Punkt $\vec{r}$ *muss* $\vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell}$ *entlang eines Weges* ℓ_c *auf der Kurve C von der Fernkugel bis* $\vec{r}$ *integriert werden. Da erfahrungsgemäß immer viele Fehler bei der Bestimmung des Weges auftreten, soll hier eine zwar umständliche, dafür aber richtige Bestimmung des Integrationsweges beschrieben werden.*
Wir wählen eine Parametrisierung so, dass die Kurve durch

$$C: \quad \vec{r} = \vec{r}\{\ell\} = \vec{r}_1 + \ell \vec{e}_\ell \qquad (2.16)$$

mit

$$\begin{aligned} \ell &= |\vec{r} - \vec{r}_1| \qquad \in [\ell_\mathrm{a}, \ell_\mathrm{e}] \\ \vec{e}_\ell &= \frac{\vec{r} - \vec{r}_1}{|\vec{r} - \vec{r}1|} \end{aligned}$$

beschrieben wird. Für das elektrische Feld resultiert damit

$$\vec{E}\{\vec{r}\} = \vec{E}\{\ell\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{e}_\ell}{\ell^2} \quad . \tag{2.17}$$

Das vektorielle Weginkrement $\mathrm{d}\vec{\ell}$ *ergibt sich aus (2.16) zu*

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \left(\frac{\partial}{\partial \ell}\vec{r}\right) \mathrm{d}\ell = \vec{e}_\ell \, \mathrm{d}\ell \tag{2.18}$$

und Anfang und Ende der Kurve mit $\vec{r}_\mathrm{a} = \vec{r}\{\ell_\mathrm{a}\}$ *bzw.* $\vec{r}_\mathrm{e} = \vec{r}\{\ell_\mathrm{e}\}$. *Für das Potenzial resultiert*

$$\begin{aligned} V\{\vec{r}_e\} &= V\{\vec{r}_\mathrm{a}\} - \int_{\vec{r}_\mathrm{a}}^{\vec{r}_\mathrm{e}} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = V\{\vec{r}_\mathrm{a}\} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\ell_\mathrm{a}}^{\ell_\mathrm{e}} \frac{\vec{e}_\ell}{\ell^2} \circ \vec{e}_\ell \, \mathrm{d}\ell = V\{\vec{r}_\mathrm{a}\} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\ell_\mathrm{a}}^{\ell_\mathrm{e}} \frac{\mathrm{d}\ell}{\ell^2} \\ &= V\{\vec{r}_\mathrm{a}\} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{\ell_\mathrm{e}} - \frac{1}{\ell_\mathrm{a}}\right) \end{aligned} \tag{2.19}$$

Legt man nun den Anfangspunkt wieder ins Unendliche, so resultiert mit $\ell_\mathrm{a} \to \infty$, $\ell_\mathrm{e} = |\vec{r}_\mathrm{e} - \vec{r}_1|$ und mit dem Übergang in die übliche Darstellung $\vec{r}_1 \to \vec{r}\,'$ und $\vec{r}_\mathrm{e} \to \vec{r}$ das

Potenzial einer Punktladung

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{2.20}$$

die sich am Ort $\vec{r}\,'$ befindet.

Beispiel 2.1.3: Potenzial einer konstanten Linienladung auf der z-Achse

Für das elektrische Feld einer konstanten Linienladung entlang der z-Achse findet man nach (1.33)

$$\vec{E} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho. \tag{2.21}$$

Damit resultiert mit $\mathrm{d}\vec{\ell} = \vec{e}_\rho\,\mathrm{d}\rho$ *und Substitution* $\rho \to t$ *das*

Potenzial der Linienladung

$$V = V\{\rho_0\} - \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\int\limits_{\rho_0}^{\rho}\frac{1}{t}\vec{e}_\rho \circ \mathrm{d}(\vec{e}_\rho t) = V\{\rho_0\} + \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{\rho_0}{\rho}\right\} \tag{2.22}$$

Das Potenzial mehrerer Punktladungen Q_i an den Orten $\vec{r}_i$ ergibt sich durch Superposition zu

$$V\{\vec{r}\} = \sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} \quad . \tag{2.23}$$

Für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\varrho_V\{\vec{r}\,'\} = \lim_{\Delta V\to 0} Q_i|_{\vec{r}_i=\vec{r}\,'}\,\Delta V_i$ folgt entsprechend das

Coulombpotenzial

$$V\{\vec{r}\} = \sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i\Delta V_i}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}_i|} = \iiint\limits_{\mathrm{Vol}}\frac{\varrho_\mathrm{V}\{\vec{r}\,'\}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{2.24}$$

Die Orte $\vec{r}$, für die $V\{\vec{r}\} = const$ gilt, bezeichnet man als **Äquipotenzialfläche**. Aus den Eigenschaften vom Gradienten $\vec{\nabla}V$, der in Richtung des stärksten Anstiegs von $V\{\vec{r}\}$ zeigt, folgt, dass $\vec{E}\{\vec{r}\}$ und damit die Feldlinien von $\vec{E}$ senkrecht auf den Äquipotenzialflächen stehen. Der Vektor $\vec{E}$ zeigt von Flächen mit hohem Potenzial auf solche mit kleinerem Potenzial. Abbildung 2.3 illustriert die Zusammenhänge.

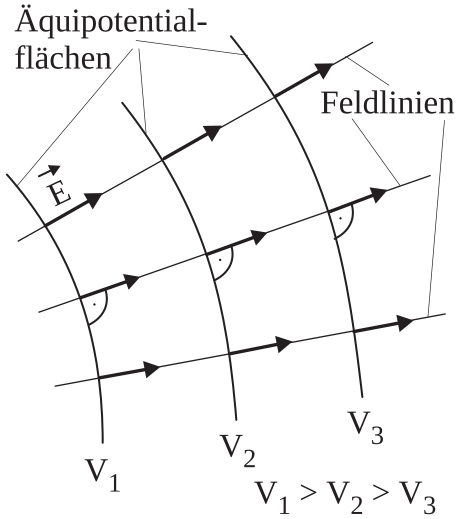


Abbildung 2.4: Feldlinien und Äquipotenzialflächen

In der Gleichung (2.24) können Probleme in der Lösung des Integrals auftreten. Als Beispiel sei hier die Berechnung des Linienladungspotenzials genannt. Häufig ist es hilfreich, einen Bezugspunkt $\vec{r}_0$ mit Potenzial $V_0 = V\{\vec{r}_0\}$ einzuführen und (2.24) mit diesem Potenzial zu erweitern. Im Coulombpotenzial resultiert dann für eine Raumladung

$$\boxed{V\{\vec{r}\} = V\{\vec{r}_0\} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{\text{Vol}} \frac{\varrho_{\text{V}}\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{\varrho_{\text{V}}\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r}_0-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r'. \qquad (2.25)}$$

Mit diesem Ansatz lässt sich das Linienladungspotenzial relativ einfach, direkt aus $\varrho_{\text{V}} = \varrho_{\text{L}}\delta\{x\}\,\delta\{y\}$ berechnen. Allerdings ist der im Beispiel 2.1.3 gezeigte Weg in diesem Fall deutlich eleganter.

Für die Potenzialdifferenz zwischen zwei infinitesimal benachbarten Punkten $\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r} = (x + \mathrm{d}x, y + \mathrm{d}y, z + \mathrm{d}z)^T$ und $\vec{r} = (x, y, z)^T$ hat man

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= V\{\vec{r} + \mathrm{d}\vec{r}\} - V\{\vec{r}\} = -\vec{E}\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}\ell \\
&= -\left(E_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + E_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y} + E_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}\right) \circ \left(\vec{e}_\mathrm{x}\,\mathrm{d}x + \vec{e}_\mathrm{y}\,\mathrm{d}y + \vec{e}_\mathrm{z}\,\mathrm{d}z\right) \\
&= -(E_\mathrm{x}\,\mathrm{d}x + E_\mathrm{y}\,\mathrm{d}y + E_\mathrm{z}\,\mathrm{d}z) \quad .
\end{aligned} \tag{2.26}$$

Andererseits gilt für das totale Differential

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial V}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial V}{\partial z}\,\mathrm{d}z \tag{2.27}$$

für alle $\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z$. Somit folgt $E_\mathrm{x} = -\partial V/\partial x$, $E_\mathrm{y} = -\partial V/\partial y$ und $E_\mathrm{z} = -\partial V/\partial z$ oder

$$\boxed{\vec{E}\{\vec{r}\} = -\operatorname{grad} V\{\vec{r}\} = -\vec{\nabla} V\{\vec{r}\} \quad .} \tag{2.28}$$

Diese Beziehung ist auch als Satz aus der Differentialgeometrie bekannt:
Wenn die Rotation eines Vektorfeldes $\vec{E}$ verschwindet $\left(\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0\right)$, existiert ein skalares Potenzial V, dessen Gradient das Vektorfeld $\vec{E}$ ergibt (also $\vec{E} = \pm\vec{\nabla} V$). Das Potenzial ist bis auf eine additive Konstante eindeutig bestimmt.
Umgekehrt gilt $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$, wenn es ein V mit $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ gibt.

2.1.3 Energiedichte im elektrostatischen Feld

Wir betrachten ein System aus $i-1$ Punktladungen Q_j an den Orten $\vec{r}_j$ mit $j = 1, \ldots, i-1$. Ihr Potenzial ist

$$V_{i-1}\{\vec{r}\} = \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_j}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_j|} \quad .$$

Um eine weitere Ladung Q_i aus dem Unendlichen an den Ort $\vec{r}_i$ zu bringen, ist die Arbeit

$$\Delta W_i = Q_i V_{i-1}\left\{\vec{r}_i\right\} = Q_i \sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}$$

zu verrichten. Diese Arbeit ist gleichzusetzen mit der potentiellen Energie der Ladung Q_i im System der früher vorhandenen Ladungen. Die gesamte potentielle Energie für N Ladungen ist damit anzusetzen als $(\Delta W_1 = 0)$

$$\begin{aligned}
W_{\text{pot}} &= \sum_{i=1}^{N} \Delta W_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{i-1} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\
&= \sum_{i=1}^{N}\sum_{i>j} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j>i} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=i+1} \frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \left.\frac{Q_i Q_j}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_i - \vec{r}_j|}\right|_{j\neq i} \quad ,
\end{aligned} \tag{2.29}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ durch die symmetrische Kraftwirkung auftritt und $j \neq i$ in der Summation ausdrückt, dass keine Selbstenergie, also die potentielle Energie einer Ladung in ihrem eigenen Feld, mitgerechnet wird. Beim Übergang zu kontinuierlichen Ladungsverteilungen $Q_i = \varrho_{\text{V}}\left\{\vec{r}_i\right\}\,\mathrm{d}^3 r$ wird (2.29) zu

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\text{Vol}}\iiint\limits_{\text{Vol}'} \frac{\varrho_{\text{V}}\left\{\vec{r}\right\}\varrho_{\text{V}}\left\{\vec{r}\,'\right\}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3 r'\,\mathrm{d}^3 r$$

modifiziert. Jetzt tritt die Selbstenergie kontinuierlicher Ladungsverteilungen auf. Sie bedeutet eine neue Festlegung des Energienullpunkts.

Wir schreiben nach (2.24) und unter Berücksichtigung von (2.2) ($\vec{\nabla}\circ\vec{E} = \varrho_{\text{V}}/\varepsilon_0$)

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\text{Vol}} \varrho_{\text{V}}\left\{\vec{r}\right\} V\left\{\vec{r}\right\}\,\mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\text{Vol}} \varepsilon_0\left(\vec{\nabla}\circ\vec{E}\left\{\vec{r}\right\}\right) V\left\{\vec{r}\right\}\,\mathrm{d}^3 r \quad .$$

Mit $\vec{\nabla}\circ(V\vec{E}) = V\vec{\nabla}\circ\vec{E} + \vec{E}\circ\vec{\nabla}V$ folgt weiter

$$W_{\text{pot}} = \frac{1}{2}\iiint\limits_{\text{Vol}} \varepsilon_0 \left[\vec{\nabla} \circ (V\vec{E}) - \vec{E} \circ \vec{\nabla} V\right] \mathrm{d}^3 r$$
$$= \iiint\limits_{\text{Vol}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{E} \circ \vec{E}\, \mathrm{d}^3 r = \iiint\limits_{\text{Vol}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |\vec{E}|^2\, \mathrm{d}^3 r \quad , \tag{2.30}$$

solange

$$W_0 = \iiint\limits_{Vol} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ (V\vec{E})\, \mathrm{d}^3 r = \oiint\limits_{\mathrm{S_V}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 (V\vec{E})\, \mathrm{d}^2\vec{S} = 0 \quad , \tag{2.31}$$

gilt. Dies kann für unendliche Volumina leicht abgeschätzt werden, denn weil $|V\vec{E}| \approx \frac{1}{r^3}$ für $r \to \infty$ und $|\,\mathrm{d}^2\vec{S}| \propto r^2$ folgt $|V\vec{E}|\,|\,\mathrm{d}^2\vec{S}| \sim \frac{1}{r} \to 0$. Man bezeichnet den Integranden in (2.30) als

Energiedichte des elektrostatischen Feldes

$$w_{\text{el}}\,\{\vec{r}\} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\,\{\vec{r}\}\right|^2 \quad . \tag{2.32}$$

Man hat zu beachten, dass (2.31) erfüllt sein muss, damit die gesamte Energiedichte durch (2.32) beschrieben wird. Ist das nicht der Fall, ergibt sich die oben erwähnte Verschiebung des Energienullpunkts und die Selbstenergiedichte $w_0 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ (V\vec{E})$ muss zu (2.32) addiert werden, um die gesamte Energiedichte zu bestimmen.

2.2 Elektrische Leiter und Dielektrika

Materialien unterscheiden sich durch unterschiedliche elektrische Leitfähigkeit. In Metallen sind die positiv geladenen Metallrümpfe ortsfest gebunden und die äußeren Elektronen frei beweglich. Durch Stöße der Elektronen untereinander und mit Gitterschwingungen (Phononen) wird die Beschleunigung der Elektronen in einem äußeren elektrischen Feld abgebremst, und es stellt sich ein Gleichgewichtswert der Stromdichte von

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{Ohm}} = \sigma \vec{E}} \qquad (2.33)$$

ein. Dies ist das **ohmsche Gesetz in Differentialform**, das auch als **mikroskopisches ohmsches Gesetz** bezeichnet wird. Die Proportionalitätskonstante σ heißt Leitfähigkeit.

Durch das Abbremsen verlieren die Ladungsträger Energie, die sich in Form von Erwärmung des Materials bemerkbar macht. Diese Energieabgabe wird nicht durch die Maxwellschen Gleichungen erfasst, und somit auch nicht der Ohm'sche Leitungsstrom. Diese verlustbehafteten Materialien dürfen also eigentlich nicht im Rahmen der hier vorgestellten Theorie behandelt werden. Das mikroskopische ohmsche Gesetz hat sich in der Praxis aber als sehr vorteilhaft erwiesen und man kann entstehende Verluste elektromagnetischer Felder sehr schön damit erfassen. Eine Anwendung wird im Kapiteln 9 gezeigt.

Mit der Definition der Stromdichte (1.64) und der Beweglichkeit μ_{n} bzw. μ_{p} der positiven und negativen Ladungsträger

$$\vec{v}_{\mathrm{n}} = -\mu_{\mathrm{n}} \vec{E} \quad , \quad \vec{v}_{\mathrm{p}} = \mu_{\mathrm{p}} \vec{E} \quad , \qquad (2.34)$$

die wir schon in Abschnitt 2.2, Beispiel 2 verwendet haben, resultiert die Darstellung

$$\sigma = -\mu_{\mathrm{n}} \varrho_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{p}} \varrho_{\mathrm{p}} \quad . \qquad (2.35)$$

Unter der Voraussetzung, dass der Strom von Elementarladungen q der Dichte n bzw. p getragen wird, folgt aus $\varrho_{\mathrm{n}} = -qn$ und $\varrho_{\mathrm{p}} = qp$

$$\sigma = q\mu_{\mathrm{n}} n + q\mu_{\mathrm{p}} p \quad . \qquad (2.36)$$

Die Gesamtladung des leitfähigen Mediums ist

$$\varrho_{\mathrm{V}} = \varrho_{\mathrm{n}} + \varrho_{\mathrm{p}} \quad . \qquad (2.37)$$

Somit ist es möglich, dass trotz Ladungsneutralität $\varrho_V = \varrho_{\mathrm{n}} + \varrho_{\mathrm{p}} = 0$ ein Stromfluss zustande kommt.

Wenn man von einem homogenen Medium spricht, meint man, dass die Leitfähigkeit ortsunabhängig sein soll. Dies wird wegen

$$0 = \vec{\nabla}\sigma = -\varrho_{\mathrm{n}}\vec{\nabla}\mu_{\mathrm{n}} + \varrho_{\mathrm{p}}\vec{\nabla}\mu_{\mathrm{p}} - \mu_{\mathrm{n}}\vec{\nabla}\varrho_{\mathrm{n}} + \mu_{\mathrm{p}}\vec{\nabla}\varrho_{\mathrm{p}} \tag{2.38}$$

durch gleichzeitig homogene Beweglichkeit und Ladungsdichte

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}\mu_{\mathrm{n}} &= \vec{\nabla}\mu_{\mathrm{p}} = 0 \\ \vec{\nabla}\varrho_{\mathrm{n}} &= \vec{\nabla}\varrho_{\mathrm{p}} = 0 \end{aligned} \tag{2.39}$$

erfüllt.

Im Metall sind sowohl die Atomrümpfe als auch die Elektronen als freie Ladungen anzusehen. Allerdings tragen nur die Elektronen zum Stromfluss bei, da die Rümpfe nicht beweglich sind $(\mu_{\mathrm{p}} = 0)$. Dielektrika besitzen dagegen keine frei beweglichen Ladungsträger, im Idealfall gilt $\sigma = 0$. In einem äußeren elektrischen Feld gibt es allerdings eine geringe Verschiebung parallel zur Feldrichtung zwischen der negativ geladenen Elektronenhülle und den positiv geladenen Atomrümpfen. Es bilden sich Dipole aus. Damit ist die Ladungsverteilung in den Materiebausteinen nicht mehr symmetrisch, und es wird ein zusätzliches lokales elektrisches Feld produziert, das von außen angelegte Feld modifiziert.

Wir betrachten zunächst metallische Leiter und dann Dielektrika.

2.2.1 Elektrische Leiter

Elektrische Leiter wie Metalle oder Elektrolyte enthalten - obwohl ihre Gesamtladung Null ist - frei bewegliche Ladungsträger. Diese werden sich bewegen, solange im Leiter ein elektrisches Feld herrscht. In Abbildung 2.5 ist dargestellt, wie das Feld einer äußeren positiven Punktladung Elektronen eines Metalls anzieht und auf der abgewandten Seite im Metall eine positive Raumladung schafft. Die Raumladungsschichten bauen sich unmittelbar an der Oberfläche des Metallkörpers auf. Sie generieren ein Feld, das dem äußeren entgegenwirkt. Die Verteilung dieser Oberflächenladungen ϱ_S erfolgt gerade so, dass das resultierende elektrische Feld im stromlosen Leiter verschwindet

$$\vec{E}_{\mathrm{Leiter}} = 0 \quad . \tag{2.40}$$

Aber auch die Tangentialkomponente $E_{\tan_{\text{Leiter}}}$ an der Oberfläche muss verschwinden, weil sich sonst Ladungen bewegen würden und kein Gleichgewicht vorläge. Es gilt im stromlosen Leiter an der Oberfläche

$$\vec{E}_{\tan_{\text{Leiter}}} = \vec{n} \times \left(\vec{E}_{\text{Leiter}} \times \vec{n} \right) = 0 \quad , \tag{2.41}$$

wenn $\vec{n}$ definitionsgemäß den senkrecht auf der Oberfläche stehenden **Normalenvektor** vom Betrag $|\vec{n}| = 1$ bezeichnet.

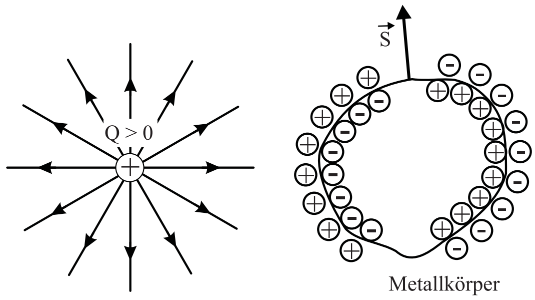


Abbildung 2.5: Influenzierte Oberflächenladungen auf einem Leiter, hervorgerufen durch eine positive Ladung Q.

Im Leiter gibt es wegen

$$\varrho_{\text{V}} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{E}_{\text{Leiter}} = 0 \tag{2.42}$$

keine Ladungen. Alle influenzierten und von außen aufgebrachten Ladungen befinden sich im statischen Fall an der Leiteroberfläche. Diese Flächenladungen ϱ_{S} sind Idealsierungen der benutzten Kontinuitätstheorie. Im Grunde befinden sich die Ladungen in einer mikroskopisch kleinen Umgebung der Oberfläche. Die Felder von Flächenladungen hatten wir bereits in Abschnitt 1.3.3 vorgestellt.
Da das Feld im stromlosen Leiter verschwindet, gilt für das Potenzial im gesamten Leiter, also auch an der Oberfläche

$$V_{\text{Leiter}} \equiv const \quad . \tag{2.43}$$

2.2.2 Stetigkeitsbedingungen der elektrischen Feldstärke an Leiteroberflächen

Zur Berechnung der Feldstärke unmittelbar an der Leiteroberfläche außerhalb des Leiters gehen wir nach Abbildung 2.6 vor.

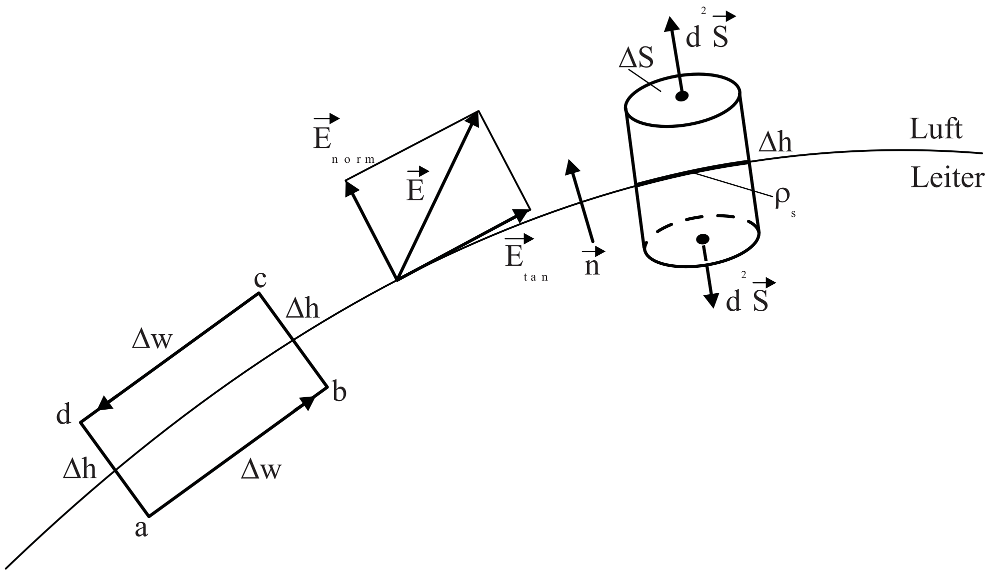


Abbildung 2.6: Zur Berechnung der Stetigkeitsbedingungen an einer Leiteroberfläche

Zur Berechnung der Tangentialkomponente betrachten wir die geschlossenen rechteckförmige Kurve $abcd$, die teilweise innerhalb und außerhalb des Leiters verläuft. Wegen $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$ muss das geschlossene Kurvenintegral über die Feldstärke verschwinden, und für genügend kleine Rechtecke gilt nach Abbildung 2.6

$$
\begin{aligned}
0 &= \oint\limits_{a,b,c,d} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c + \int\limits_c^d + \int\limits_d^a \\
&= 0 + \frac{\Delta h}{2} E_{\text{norm } c} - E_{\tan c,d} \Delta w - \frac{\Delta h}{2} E_{\text{norm } d} \quad ,
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

wobei berücksichtigt wurde, dass im Leiter $\vec{E} \equiv 0$ gilt. Im Grenzfall $\Delta h \to 0$ folgt mit endlichem $\Delta w \neq 0$ für die Tangentialkomponente an der äußeren Oberfläche des Leiters

$$
\vec{E}_{\tan_{\text{aussen}}} = 0 \quad . \tag{2.45}
$$

Die elektrischen Feldlinien stehen also immer senkrecht auf der Leiteroberfläche.

Zur Berechnung der Normalkomponente betrachten wir den in Abbildung 2.6 eingezeichneten Zylinder. Nach dem Gaußschen Gesetz in Integralform gilt

$$\varepsilon_0 \oiint\limits_{\text{Zyl.}} \vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \varrho_\mathrm{S} \Delta S \quad , \tag{2.46}$$

wobei $\varrho_\mathrm{S}\Delta S$ die vom Zylinder umschlossene Ladung ist. Da die Tangentialkomponente der Feldstärke nach (2.45) verschwindet und auch die Feldstärke im Leiter null ist, ist das Integral in (2.45) einfach auszuwerten. Es bleibt nur das Integral über die obere Bodenfläche des Zylinders von Null verschieden, und es ist

$$\varepsilon_0 \vec{E}_{\mathrm{norm}_{\mathrm{aussen}}} \Delta\vec{S} = \varrho_\mathrm{S} \Delta S \quad . \tag{2.47}$$

Die Normalkomponente der Feldstärke an der äußeren Oberfläche ist also durch die Flächenladungsdichte ϱ_S an der Oberfläche bestimmt.

Die Stetigkeitsbedingungen des elektrischen Feldes an der Leiteroberfläche lauten demnach in vektorieller Schreibweise

$$\vec{E}_{\mathrm{norm}} = \vec{n}\left(\vec{E} \circ \vec{n}\right) = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\varepsilon_0}\vec{n} \tag{2.48}$$

bzw.

$$\boxed{\vec{n} \circ \vec{E} = \frac{\varrho_\mathrm{S}}{\varepsilon_0}} \tag{2.49}$$

und

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{E} \times \vec{n}) = 0 \quad ,} \tag{2.50}$$

wobei $\vec{n}$ vom Metall in den Außenraum weist.

An der Oberfläche macht die elektrische Feldstärke in Normalenrichtung einen Sprung um den endlichen Wert $\varrho_\mathrm{S}/\varepsilon_0$. Das Potenzial als Linienintegral der Feldstärke bleibt stetig, hat aber einen Knick, ist also in Normalenrichtung an der Oberfläche nicht mehr differenzierbar.

2.2.3 Dipole in Dielektrika

In dielektrischen Materialien verschieben sich die Ladungsschwerpunkte der positiven und negativen Ladungen der Elementarbausteine unter der Wirkung eines äußeren elektrischen Feldes. Es bilden sich Dipole aus, die man durch zwei gleich große aber entgegengesetzt geladene Punktladungen Q im Abstand d charakterisieren kann. Man definiert nach Abbildung 2.7 das

Dipolmoment

$$\vec{p} = Q\vec{d} \quad , \tag{2.51}$$

wobei der Vektor $\vec{d}$ von der negativen Ladung $-Q$ zur positiven Ladung Q zeigt.

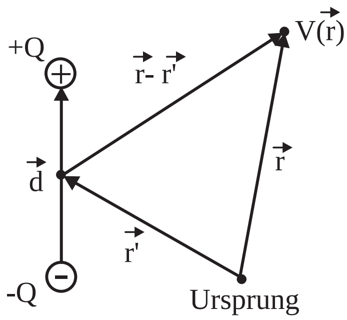


Abbildung 2.7: Dipol und Koordinaten zur Potenzialberechnung. Die Geometrie, speziell die Richtung des Abstandes von Minus nach Plus ist entsprechend der nebenstehenden Skizze definiert.

Das Potenzial des Dipols ist die Überlagerung der Potenziale beider Punktladungen

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \left(\vec{r}' + \frac{\vec{d}}{2}\right)\right|} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r} - \left(\vec{r}' - \frac{\vec{d}}{2}\right)\right|} \quad . \tag{2.52}$$

Für Abstände $|\vec{r} - \vec{r}'| \gg |\vec{d}|$ liefert die Taylorreihenentwicklung die Näherung

$$V\{\vec{r}\} = \frac{Q\vec{d} \circ (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\vec{p} \circ (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \quad . \tag{2.53}$$

Das Potenzial ändert sich senkrecht zur Achse in erster Näherung nicht und fällt in Achsenrichtung mit dem Quadrat des Abstands ab.

Durch Gradientenbildung ergibt sich die elektrische Feldstärke des Dipols zu

$$\boxed{\vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\left[3\cdot\left(\vec{p}\circ\frac{(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\vec{p}\right] \quad . \qquad (2.54)}$$

Äquipotenzial- und Feldlinien eines Dipols sind in Abbildung 2.8 dargestellt. Die Ausdrücke (2.53) und (2.54) gelten für $|\vec{r}'-\vec{r}| \gg |\vec{d}|$. Sie sind exakt für einen Punktdipol, bei dem $\vec{d} \to 0$, aber $\vec{p} = Q\vec{d}$ endlich bleibt.

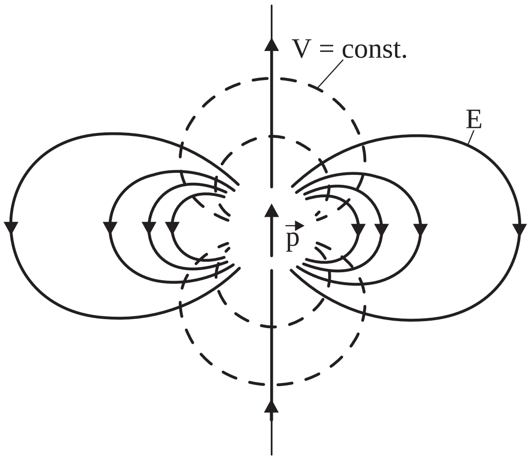


Abbildung 2.8: Potenzial und Feldlinien eines elektrischen Dipols

Sind wie in einem Dielektrikum zahlreiche Punktdipole, nämlich $n\{\Delta V\}$ in einem Volumenelement ΔV vorhanden, dann ist das gesamte Dipolmoment in ΔV die Summe

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^{n\{\Delta V\}} \vec{p}_i \quad . \qquad (2.55)$$

Bei zufälliger Orientierung der elementaren Dipole $\vec{p}_i$ kann das gesamte Dipolmoment verschwinden. Meistens erfolgt in einem elektrischen Feld aber eine Ausrichtung der Dipole. Man definiert die **elektrische Polarisation** als das Dipolmoment pro Volumen, also als Dipolmomentdichte

$$\vec{P}\{\vec{r}\} = \lim_{\Delta V\to 0}\frac{1}{\Delta V}\sum_{i=1}^{n\{\Delta V\}}\vec{p}_i = \frac{\mathrm{d}^3\vec{p}_{\text{ges}}}{\mathrm{d}^3 r} \quad . \qquad (2.56)$$

Für gleiche elementare Dipole $\vec{p} = \vec{p}_i = Q\vec{d}$ gilt offenbar

$$\vec{P} = nQ\vec{d} \quad , \qquad (2.57)$$

wobei n die Anzahldichte der elementaren Dipole und $Q\vec{d}$ das elementare Dipolmoment sind. Das Potenzial einer Dipolverteilung ist analog zu (2.53)

$$V\{\vec{r}\} = \iiint\limits_{\text{Vol.}} \frac{\vec{P}\{\vec{r}'\} \circ (\vec{r} - \vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{2.58}$$

Die hier gewonnenen Ausdrücke gelten zunächst nur für Orte, die groß gegen den Abstand der Einzelladungen sind. Betrachtet man etwas allgemeiner eine räumlich begrenzte Ladungsverteilung im ansonsten freien Raum, kann man im Coulombpotenzial (2.24) den Faktor $|\vec{r} - \vec{r}'|^{-1}$ als Taylorreihe entwickeln, solange nur $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$ ist.
Die Herleitung der Taylorreihe soll hier etwas ausführlicher gezeigt werden da sie des öfteren gebraucht wird. Ausklammern von r aus $|\vec{r} - \vec{r}'|$ ergibt $r\sqrt{(1 - x'/r)^2 + (1 - y'/r)^2 + (1 - z'/r)^2}$ und mit $\vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}'| = -\vec{\nabla}'|\vec{r} - \vec{r}'|$ findet man leicht

$$\left.\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right|_{r'=0} = \frac{1}{r} - \left(\vec{r}' \circ \vec{\nabla}\right)\frac{1}{r} + \frac{1}{2}\left(\vec{r}' \circ \vec{\nabla}\right)^2 \frac{1}{r} \pm \cdots \tag{2.59}$$

Bei höheren Ableitungen von $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ muss immer wieder $\vec{\nabla}|\vec{r} - \vec{r}'|^{-n}$ bestimmt werden. Unter Verwendung von

$$\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^n} = -n\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^{n+2}}$$

resultiert aus (2.59)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \circ \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \circ \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + \cdots \quad .$$

Einsetzen in das Coulombintegral liefert die **Multipolentwicklung** des Potenzials

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint\limits_{V'} \left(\frac{1}{r} + \frac{\vec{r}' \circ \vec{r}}{r^3} + \frac{3(\vec{r}' \circ \vec{r})^2 - r'^2 r^2}{2r^5} + \cdots\right) \varrho_{\mathrm{V}} \, \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{2.60}$$

Durch Ausmultiplizieren entstehen verschiedene von der Raumladungsdichte und dem Quellpunktvektor $\vec{r}'$ abhängige Terme, sogenannte Momente, die das Potenzial bestimmen. Das **Monopolmoment** lautet

$$q = \iiint_{V'} \varrho_{\rm V} \; {\rm d}^3 r' \quad , \tag{2.61}$$

das **Dipolmoment** resultiert aus

$$\vec{p} = \iiint_{V'} \vec{r}' \varrho_{\rm V} \; {\rm d}^3 r' \tag{2.62}$$

und die höheren Terme folgen aus den weiteren Summanden. Das Potenzial errechnet sich aus

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{q}{r} + \frac{\vec{r} \circ \vec{p}}{r^3} + \cdots \right) \quad . \tag{2.63}$$

Weit entfernt von der erzeugenden Raumladung dominiert offensichtlich der Monopolterm das Potenzial. Erst wenn der Monopolterm verschwindet, also Ladungsneutralität herrscht, wird das Potenzial vom Dipolterm dominiert. Der Dipolterm ist wegen des Skalarprodukts gegen Drehungen des Koordinatensystems invariant, nicht dagegen für eine Translation des Ursprungs. Nach Translation des Ursprungs um $\vec{a}$ lautet die Vektordarstellung im neuen Koordinatensystem $\vec{r}_{\rm n} = \vec{r} - \vec{a}$, $\vec{r'}_{\rm n} = \vec{r}' - \vec{a}$, wie man leicht aus Bild (2.9) abliest.

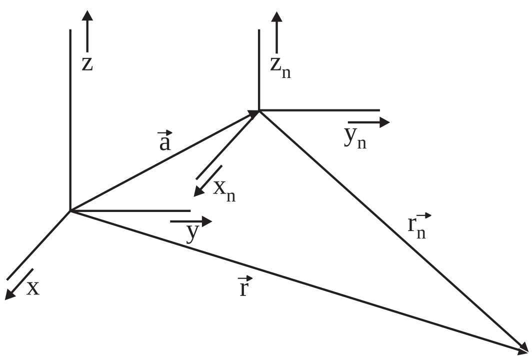


Abbildung 2.9: Translation des ursprünglichen Koordinatensystems x,y,z um den Vektor $\vec{a}$ zum neuen Koordinatensystem $x_{\rm n}$, $y_{\rm n}$,$z_{\rm n}$.

Das Dipolmoment errechnet sich nach der Translation aus

$$\vec{p_\mathrm{n}} = \iiint\limits_{V'} \vec{r}'_\mathrm{n} \varrho_\mathrm{V} \, \mathrm{d}^3 r'_\mathrm{n} = \iiint\limits_{V'} (\vec{r}' - \vec{a}) \, \varrho_\mathrm{V} \, \mathrm{d}^3 r' = q \cdot \vec{a} + \vec{p} \quad . \tag{2.64}$$

Es ergibt sich eine Veränderung proportional zur Verschiebung des Ursprungs und zur Ladung des Gesamtsystems. Bei Ladungsneutralität ist somit das Dipolmoment auch translationsinvariant. Rückwirkend kann man den Dipol aus zwei Punktladungen als eine spezielle räumlich begrenzte Ladungsverteilung betrachten, für die Ladungsneutralität herrscht. Das in (2.51) eingeführte Dipolmoment ergibt sich sofort mit der etwas allgemeineren Betrachtung aus (2.62). Im Fernfeld ist das Feld des elektrischen Dipols ein reines Dipolfeld, das sich aus dem

Potenzial des Dipols im Fernfeld

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \circ \vec{r}}{r^3} \tag{2.65}$$

berechnet, wobei der Koordinatenursprung wegen der Translationsinvarianz einfach in den Mittelpunkt des Dipols gelegt wurde. Daraus resultiert das

elektrische Feld des Dipols im Fernfeld

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{3(\vec{p} \circ \vec{r})\vec{r}}{r^5} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right) \quad . \tag{2.66}$$

Die Taylorentwicklung (2.59) wird uns noch einmal im Abschnitt 5.2 begegnen. Die Multipolentwicklung werden wir im Zusammenhang mit der Abstrahlung von elektromagnetischen Wellen von Dipolen in der Elektrodynamik noch ausführlicher behandeln.

2.2.4 Die dielektrische Verschiebung

Wir betrachten einen Körper in dem frei bewegliche Ladungen der Ladungsdichte ϱ_frei und ortsfeste Dipole der Dipolmomentdichte bzw. **Polarisation** $\vec{P}$ vorhanden sind. Das Potenzial ergibt sich durch Summation über alle Ladungen zu

$$V\{\vec{r}\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}'\}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' + \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{P}\{\vec{r}'\}\circ(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{2.67}$$

Das zweite Integral lässt sich mit $(\vec{r}-\vec{r}')/|\vec{r}-\vec{r}'|^3 = -\vec{\nabla}'(1/|\vec{r}-\vec{r}'|)$ durch partielle Integration umformen zu

$$\begin{aligned}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{P}\{\vec{r}'\}\circ(\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3r' &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{P}\{\vec{r}'\}\circ\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \\ &= -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{\nabla}'\circ\vec{P}\{\vec{r}'\}\right)\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad ,\end{aligned} \tag{2.68}$$

wobei die Tatsache benutzt wurde, dass Dipole nur im Endlichen vorhanden sind ($\vec{P}\{\pm\infty\} = 0$). Damit kann man das Potenzial schreiben als

$$V\{\vec{r}\} = V_0 + \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}'\} - \vec{\nabla}'\circ\vec{P}\{\vec{r}'\}}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \tag{2.69}$$

und erkennt bereits, dass $-\vec{\nabla}\circ\vec{P}\{\vec{r}\}$ die Bedeutung einer Ladung besitzt, die offenbar von raumfesten Beiträgen herrührt. Hier ist zu beachten, dass aus $\vec{\nabla}\circ\vec{P} = 0$ nicht automatisch folgt, dass das von einer Polarisation erzeugte Potenzial verschwindet. Beim Übergang von (2.58) auf (2.69) wurde differenziert und damit konstante Terme der Polarisation eliminiert. Diese sind formal in dem Potenzial V_0 berücksichtigt. Für den Fall einer konstanten Polarisation muss (2.58) verwendet werden. (Vergleiche: Ein festes Feld $\vec{E}$ verursacht ein Potenzial V, obwohl $\vec{\nabla}\circ\vec{E} = 0$ sein kann!)

Für das elektrische Feld erhalten wir aus (2.69)

$$E\{\vec{r}\} = -\vec{\nabla}V\{\vec{r}\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}'\} - \vec{\nabla}'\circ\vec{P}\{\vec{r}'\}\right)\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{2.70}$$

Hieraus ergibt sich wie in Abschnitt 1.4 bei der Herleitung des Gaußschen Gesetzes aus dem Coulombgesetz die Beziehung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E}\{\vec{r}\} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\} - \vec{\nabla} \circ \vec{P}\{\vec{r}\}\right) \quad . \tag{2.71}$$

Man bezeichnet

$$\boxed{\varrho_{\text{P}} = -\vec{\nabla} \circ \vec{P}} \tag{2.72}$$

als **Polarisationsraumladungsdichte** oder auch als elastisch gebundene Ladungsdichte. Die Divergenz der Feldstärke ist damit bis auf den Faktor ε_0 gleich der Summe aus freier und elastisch gebundener Ladungsdichte

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\} + \varrho_{\text{P}}\{\vec{r}\}\right) = \frac{\varrho_{\text{V}}\{\vec{r}\}}{\varepsilon_0} \tag{2.73}$$

Führt man nun die

dielektrische Verschiebung

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}} \tag{2.74}$$

ein, so erfasst die Divergenz $\vec{\nabla} \circ \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{E} + \vec{\nabla} \circ \vec{P} = \varrho_{\text{V}} - \varrho_{\text{P}} = \varrho$

$$\boxed{\vec{\nabla} \circ \vec{D} = \varrho_{\text{frei}}\{\vec{r}\} = \varrho\{\vec{r}\}} \tag{2.75}$$

offenbar nur die Ladungsdichte, die nicht elastisch gebunden sind. Dieses ist das **Gaußsche Gesetz für die dielektrische Verschiebung**. Die resultierende Ladungsdichte ϱ_{frei} wird in der Literatur üblicherweise als Ladungsdichte freier Ladungsträger bezeichnet, was aber missverständlich ist, da auch ortsfest gebundenen Ladungen, wie sie z.B. in der Raumladungszone eines pn- Übergangs auftreten, mit erfasst werden. Wir bezeichnen die Ladungsdichte der freien Ladungsträger kurz mit $\varrho = \varrho\left\{\vec{r}\right\}$ und lassen den Index frei weg. Die dielektrische Verschiebung wird auch als **Verschiebungsdichte** bezeichnet. Das Oberflächenintegral über $\vec{D}$ ist gleich der gesamten sogenannten freien (nicht elastisch gebundenen) Ladung $Q_{\mathrm{frei}} = Q$ im Volumen

$$\boxed{\oint\!\!\!\oint_S \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \iiint_V \varrho\left\{\vec{r}\right\} \mathrm{d}^3 r = Q \quad . \qquad (2.76)}$$

Die Ausbildung bzw. Ausrichtung elementarer Dipole in Dielektrika ist in vielen Fällen eine Reaktion auf ein äußeres elektrisches Feld. Deshalb ist in isotropen Materialien in erster Näherung anzusetzen

$$\vec{P} = \chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\vec{E} \quad , \tag{2.77}$$

wobei die Proportionalitätskonstante χ_{e} als **elektrische Suszeptibilität** bezeichnet wird. Für die dielektrische Verschiebung folgt

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \chi_{\mathrm{e}}\varepsilon_0\vec{E} = (1+\chi_{\mathrm{e}})\varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \quad , \tag{2.78}$$

wobei

$$\varepsilon = 1 + \chi_{\mathrm{e}} \tag{2.79}$$

relative Permittivität oder **relative Dielektrizitätskonstante** genannt wird. Die Dielektrizitätskonstante kann im allgemeinen vom Ort abhängen, $\varepsilon = \varepsilon\left\{\vec{r}\right\}$, so dass zwar nach wie vor $\vec{\nabla} \times E = 0$ gilt, aber im allgemeinen $\vec{\nabla} \times \vec{D} = \vec{\nabla} \times \varepsilon_0 \left(\varepsilon\left\{\vec{r}\right\} \vec{E}\left\{\vec{r}\right\}\right) = 0$ nicht richtig ist. Zwischen Potenzial und dielektrischer Verschiebung besteht der Zusammenhang

$$\vec{D}\left\{\vec{r}\right\} = -\varepsilon\left\{\vec{r}\right\}\varepsilon_0\vec{\nabla}V\left\{\vec{r}\right\} \quad . \tag{2.80}$$

2.2.4.1 Nichtlineare Polarisation

Im Folgenden sollen auch nichtlineare Polarisationen zugelassen werden. Dazu spalten wir $\vec{P}$ in den bekannten linearen Anteil $(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 \cdot \vec{E}$ und einen nichtlinearen Anteil $\vec{P}_{\mathrm{NL}}$.

$$\vec{P} = (\varepsilon - 1)\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_{\mathrm{NL}}. \tag{2.81}$$

Für die dielektrische Verschiebung folgt

$$\begin{aligned}\vec{D} &= \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}\\ &= \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} + \vec{P}_{\mathrm{NL}}.\end{aligned} \tag{2.82}$$

Der Zusammenhang mit dem Potenzial wird über das elektrische Feld hergestellt, zunächst gilt

$$\vec{\nabla}\circ\vec{E} = \vec{\nabla}\circ\left(\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{D} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{P}_{\mathrm{NL}}\right) = -\vec{\nabla}\circ\left(\vec{\nabla}V\right) \tag{2.83}$$

und in homogenen Medien

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\circ\vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\left(\underbrace{\vec{\nabla}\circ\vec{D}}_{\varrho} - \vec{\nabla}\circ\vec{P}_{\mathrm{NL}}\right)\\ &= \frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{\nabla}\circ\vec{P}_{\mathrm{NL}} = -\vec{\nabla}\circ\left(\vec{\nabla}V\right).\end{aligned} \tag{2.84}$$

Mit der Aufspaltung des Potenzials in einen linearen und einen nichtlinearen Anteil $V = V_{\mathrm{L}} + V_{\mathrm{NL}}$ resultiert nach der üblichen Zuordnung

$$-\vec{\nabla}\circ\left(\vec{\nabla}V_{\mathrm{L}}\right)=\left.\frac{\vec{D}}{\varepsilon\varepsilon_0}\right|_{\text{homogenes Medium}}=\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{2.85}$$

für den nichtlinearen Anteil

$$\vec{\nabla}V_{\mathrm{NL}}=\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{P}_{\mathrm{NL}}. \tag{2.86}$$

2.2.5 Stetigkeitsbedingungen für Dielektrika

Für Dielektrika gelten die Differentialgleichungen

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \tag{2.87}$$

und

$$\vec{\nabla}\circ\vec{D}=\varrho \quad . \tag{2.88}$$

Wir betrachten nach Abbildung 2.10 die Grenzfläche zwischen zwei homogenen Dielektrika mit Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2.

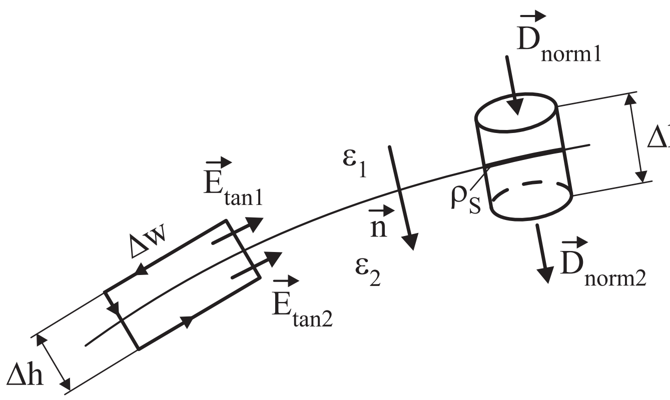


Abbildung 2.10: Zur Berechnung der Stetigkeitsbedingungen zwischen zwei Dielektrika mit Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2 .

Wie in Abschnitt 2.2.2 folgt aus der Berechnung des Kurvenintegrals

$$\oint\vec{E}\circ\mathrm{d}\ell=0 \tag{2.89}$$

entlang der in Abbildung 2.10 dargestellten geschlossenen Kurve für genügend kleine Längen Δw im Grenzfall $\Delta h \to 0$ die Bedingung

$$E_{\tan 1}\Delta w - E_{\tan 2}\Delta w = 0 \tag{2.90}$$

oder

$$E_{\tan 1} = E_{\tan 2} \tag{2.91}$$

bzw.

$$\boxed{\left[\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)\right] \times \vec{n} = 0 \quad .} \tag{2.92}$$

Beim Übergang zwischen zwei Dielektrika verhält sich die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke stetig. Dagegen gilt in linearen isotropen ($[\varepsilon] = \varepsilon$) Dielektrika mit

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{2.93}$$

$$\frac{D_{\tan 1}}{\varepsilon_1} = \frac{D_{\tan 2}}{\varepsilon_2} \quad , \tag{2.94}$$

d. h. die Tangentialkomponenten der dielektrischen Verschiebung erfahren einen Sprung. Aus dem Oberflächenintegral über den Zylinder

$$\oiint\limits_{\rho_{\mathrm{Zyl.}}} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iiint\limits_{\mathrm{V_{Zyl.}}} \varrho \ \mathrm{d}^3 r \tag{2.95}$$

folgt für genügend kleine Grundflächen ΔS im Grenzfall $\Delta h \to 0$ die Beziehung

$$D_{\mathrm{norm}\,2}\Delta S - D_{\mathrm{norm}\,1}\Delta S = \varrho_{\mathrm{S}}\Delta S \tag{2.96}$$

und in vektorieller Schreibweise nach dem Kürzen der Fläche ΔS

$$\boxed{\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \varrho_{\mathrm{S}} \quad , \qquad (2.97)}$$

wobei ϱ_{S} die sogenannte freie Oberflächenladungsdichte bezeichnet. Aus (2.97) folgt durch Einsetzen von (2.74)

$$\vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \varepsilon_0 \vec{n} \circ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) + \vec{n} \circ (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) \quad .$$

Mit der Zuordnung

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \varrho_{\mathrm{S}} & \\ \varepsilon_0 \vec{n} \circ (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= \varrho_{\mathrm{S_E}} \\ \vec{n} \circ (\vec{P}_2 - \vec{P}_1) &= -\varrho_{\mathrm{S_P}} \end{aligned}$$

kann man $\varrho_{\mathrm{S_E}}$ als Folge bzw. Quelle der Änderung des elektrischen Feldes auffassen, $\varrho_{\mathrm{S_P}}$ sind entsprechend die elastisch gebundenen Ladungen, die für eine Änderung in der Polarisation zuständig ist.
In perfekten Dielektrika sind nirgends, auch nicht an der Oberfläche sogenannte freie Ladungsträger vorhanden, so dass man von $\varrho_{\mathrm{S}} = 0$ ausgehen kann. Es folgt

$$D_{\mathrm{norm}\,1} = D_{\mathrm{norm}\,2} \qquad (2.98)$$

und damit

$$\varepsilon_1 \, E_{\mathrm{norm}\,1} = \varepsilon_2 \, E_{\mathrm{norm}\,2} \quad . \qquad (2.99)$$

Die Normalkomponenten der dielektrischen Verschiebung sind stetig und diejenigen der elektrischen Feldstärke besitzen einen Sprung. Aus den Stetigkeitsbedingungen folgt sofort, dass die Feldlinien für $\vec{D}$ und $\vec{E}$ an der Grenzfläche einen Knick aufweisen. Dies ist in Abbildung 2.11 illustriert. In isotropen Medien weisen $\vec{E}$ und $\vec{D}$ in dieselbe Richtung. Beim

Übergang von Dielektrikum 1 nach 2 wird das Feld gebrochen. Ist der Winkel zum Lot im Medium 2

$$\tan\{\Theta_1\} = \frac{D_{t_1}}{D_{n_1}} = \frac{E_{t_1}}{E_{n_1}} \tag{2.100}$$

findet man den Winkel im Medium 1 bei verschwindender Oberflächenladung $(D_{n_1} = D_{n_2})$ aus

$$\tan\{\Theta_2\} = \frac{D_{t_2}}{D_{n_2}} = \frac{D_{t_2}}{D_{n_1}} = \frac{\varepsilon_2\, E_{t_2}}{\varepsilon_1\, E_{n_1}} = \frac{\varepsilon_2\, E_{t_1}}{\varepsilon_1\, E_{n_1}} = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\tan\{\Theta_1\}. \tag{2.101}$$

Dies bedeutet, dass das Feld beim Übergang von einem Dielektrikum mit größerer Dielektrizitätszahl (DK) zu einem mit kleinerer DK zum Lot hin gebrochen wird.

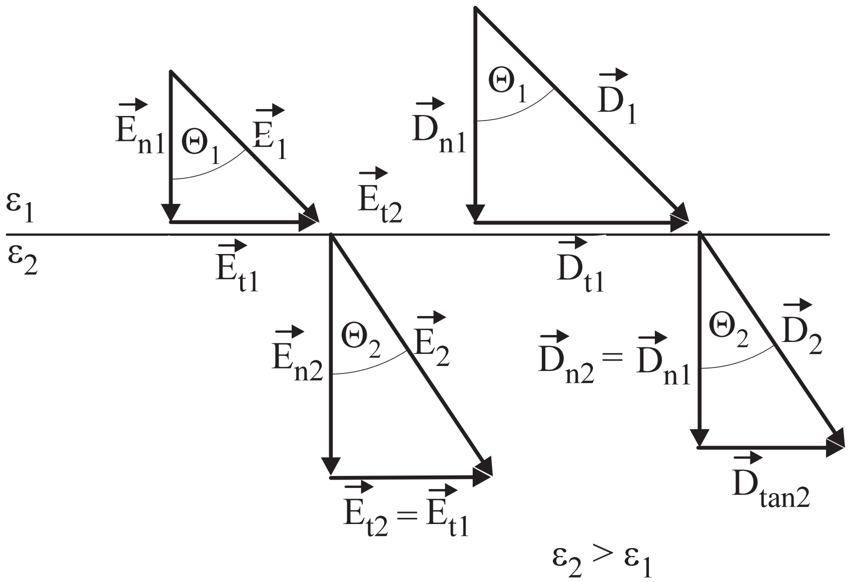


Abbildung 2.11: Vektoren $\vec{D}$ und $\vec{E}$ beim Übergang zwischen zwei Medien mit Dielektrizitätskonstanten ε_1 und ε_2. Die Grenzfläche wird als ladungsfrei angenommen.

Schließlich sei noch erwähnt, dass entsprechend (2.48) für die Stetigkeitsbedingung an der Grenzfläche zwischen einem Dielektrikum und einem Leiter

$$\vec{D} \circ \vec{n} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \circ \vec{n} = \varrho_S \tag{2.102}$$

zu setzen ist, wobei ϱ_S die Oberflächenladungsdichte auf dem Leiter bezeichnet. Ausgedrückt durch das Potenzial lautet die Bedingung

$$-\varepsilon\varepsilon_0\vec{\nabla}V \circ \vec{n} = \varrho_\mathrm{S} \quad . \tag{2.103}$$

2.2.6 Elektrostatische Energie im Dielektrikum

Im Dielektrikum muss nicht nur Arbeit aufgewendet werden gegen das vorhandene Potenzial sondern auch zur Polarisation des Dielektrikums. Für die Berechnung benutzen wir ein Variationsverfahren.
Bringen wir ein infinitesimales Ladungselement $\delta\varrho\,\mathrm{d}^3r$ aus dem Unendlichen in ein vorhandenes Potenzialfeld $V\,\{\vec{r}\}$, dann ist dazu die Arbeit

$$\mathrm{d}^3(\delta W_\mathrm{e}) = \delta\varrho\,\{\vec{r}\}\,V\,\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3r \tag{2.104}$$

notwendig. Für eine Änderung der gesamten Ladungsverteilung um $\delta\varrho$ gilt demnach

$$\delta W_\mathrm{e} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta\varrho\,\{\vec{r}\}\,V\,\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3r \quad . \tag{2.105}$$

Die Änderung $\delta\varrho\,\{\vec{r}\}$ der freien Ladungsdichte hat eine Änderung $\delta\vec{D}$ der dielektrischen Verschiebung zur Folge, für die

$$\vec{\nabla} \circ \delta\vec{D} = \delta\varrho \tag{2.106}$$

gilt. Nun ist

$$\vec{\nabla} \circ (V\delta\vec{D}) = V\vec{\nabla} \circ \delta\vec{D} + \delta\vec{D} \circ \vec{\nabla}V \quad , \tag{2.107}$$

und wir erhalten mit $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ aus (2.105)

$$\delta W_\mathrm{e} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \circ \delta\vec{D}\,\mathrm{d}^3r + \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla} \circ (V\delta\vec{D})\,\mathrm{d}^3r \quad . \tag{2.108}$$

Das zweite Integral verschwindet, denn nach dem Gaußschen Satz ist

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla} \circ (V\delta\vec{D})\, \mathrm{d}^3r = \oiint_{S_\infty} V\delta\vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \to 0 \quad , \tag{2.109}$$

und das Oberflächenintegral über eine Kugeloberfläche mit Radius $r \to \infty$ verschwindet, denn $V \propto 1/r$, $|\delta\vec{D}| \propto 1/r^2$ und $|\,\mathrm{d}^2\vec{S}| \propto r^2$ für genügend große r und Ladungsdichteänderungen $\delta\varrho\{\vec{r}\}$ in einem endlichen Volumenbereich. Es folgt

$$\delta W_\mathrm{e} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \vec{E} \circ \delta\vec{D}\, \mathrm{d}^3r \quad . \tag{2.110}$$

Die gesamte Energie, die zum Aufbau der dielektrischen Verschiebung notwendig ist, ergibt sich durch Integration

$$W_\mathrm{e} = \int_0^{\vec{D}} \delta W_\mathrm{e} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \left[\int_0^{\vec{D}} \vec{E} \circ \delta\vec{D} \right] \mathrm{d}^3r \tag{2.111}$$

Die Größe

$$\boxed{w_\mathrm{e} = \int_0^{\vec{D}} \vec{E} \circ \delta\vec{D}} \tag{2.112}$$

ist als **Energiedichte des elektrostatischen Feldes** zu interpretieren. Für lineare Dielektrika mit $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}$ folgt

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \int_0^{\vec{D}} \vec{D} \circ \delta\vec{D} = \frac{|\vec{D}|^2}{2\varepsilon\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0|\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\vec{E} \circ \vec{D} \quad . \tag{2.113}$$

Es sei noch erwähnt, dass der hier vorgestellte Variationsansatz zur Berechnung der Energiedichte nur die Wechselwirkung zwischen neu eingebrachter Ladung und dem Feld schon vorhandener Ladung berücksichtigt. Selbstenergien, die sich sowieso nicht messen lassen, treten nicht auf. Im übrigen ist das Ergebnis (2.113) im Einklang mit (2.32).

2.3 Zusammenhang zwischen Stromdichte und Ladungsdichte

Eine Stromdichteverteilung $\vec{j}_{\mathrm{V}}$ hat die Kontinuitätsgleichung (1.73) zu erfüllen. Werden Polarisationsstrom $\vec{j}_{\mathrm{Pol}} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}$ und Magnetisierungsstrom $\vec{j}_{\mathrm{magn}} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$, wie sie erst später eingeführt werden, berücksichtigt, folgt $\vec{j}_{\mathrm{V}} = \vec{j} + \vec{j}_{\mathrm{Pol}} + \vec{j}_{\mathrm{magn}}$. Die Stromdichte $\vec{j}$ wird üblicherweise als freie Stromdichte bezeichnet. Unter Einbeziehung der Polarisationsladung $\vec{\nabla} \circ \vec{P}$ resultiert aus der Kontinuitätsgleichung (1.73)

$$\vec{\nabla} \circ \vec{j} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} \quad . \tag{2.114}$$

Außerdem gilt für lineare Materialien

$$\vec{D}\{\vec{r}\} = \varepsilon\{\vec{r}\}\,\varepsilon_0 E\{\vec{r}\} \quad , \tag{2.115}$$

und wir wollen die Gültigkeit des mikroskopischen ohmschen Gesetzes

$$\vec{j}\,\{\vec{r}\} = \sigma\{\vec{r}\}\,\vec{E}\{\vec{r}\} \tag{2.116}$$

annehmen. Es sei besonders betont, dass im mikroskopischen ohmschen Gesetz (2.116) **Diffusionsströme** vollkommen vernachlässigt werden. Die Dielektrizitätskonstante $\varepsilon\{\vec{r}\}$ und die Leitfähigkeit $\sigma\{\vec{r}\}$ sind im allgemeinen ortsabhängig.

2.3.1 Ladungsdichte im statischen Fall

Im statischen Fall sind alle Größen zeitunabhängig, so dass

$$\vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathrm{V}} = \vec{\nabla} \circ \vec{j} = 0 \tag{2.117}$$

gilt. Aus (2.115) und (2.116) folgt

$$\vec{j} = \frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{D} = \frac{1}{\tau}\vec{D} \quad . \tag{2.118}$$

mit der charakteristischen Zeitkonstante des Mediums

$$\tau = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} \tag{2.119}$$

Mit dem Gaußschen Gesetz für die dielektrische Verschiebung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{D} = \varrho \tag{2.120}$$

ergibt sich damit aus (2.117)

$$\frac{1}{\tau}\vec{\nabla} \circ \vec{D} + \vec{D} \circ \vec{\nabla}\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau}\varrho + \tau\vec{j} \circ \vec{\nabla}\frac{1}{\tau} = 0 \quad . \tag{2.121}$$

Wegen $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\tau}\right) = -\frac{1}{\tau^2}\vec{\nabla}\tau$ kann man die letzte Beziehung auch in die Form

$$\varrho\{\vec{r}\} = \vec{j}\{\vec{r}\} \circ \vec{\nabla}\tau = \varepsilon_0 \cdot \vec{j}\{\vec{r}\} \circ \vec{\nabla}\frac{\varepsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \tag{2.122}$$

bringen. In einem homogenen leitfähigen Dielektrikum sind ε und σ ortsunabhängig, und es können im statischen Fall keine freien Raumladungen auftreten:

$$\varrho\{\vec{r}\} \equiv 0 \quad . \tag{2.123}$$

Dies gilt auch noch, wenn der Quotient $\varepsilon\{\vec{r}\}/\sigma\{\vec{r}\}$ ortsunabhängig ist. In einem inhomogenen Medium ist dagegen mit einem Stromfluss im allgemeinen immer auch eine Raumladung verknüpft, deren Größe durch (2.122) gegeben ist, solange Diffusionsströme vernachlässigt werden können.

Beispiel 2.3.1: Ladungsspeicherung an einer ebenen Grenzfläche

Als Beispiel betrachten wir die Verhältnisse an der Grenzfläche zweier homogener Medien mit unterschiedlichen Materialeigenschaften nach Abbildung 2.12

An der Grenzfläche gilt die Randbedingung

$$\vec{n} \circ \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right) = \varrho_{\mathrm{S}} \quad , \tag{2.124}$$

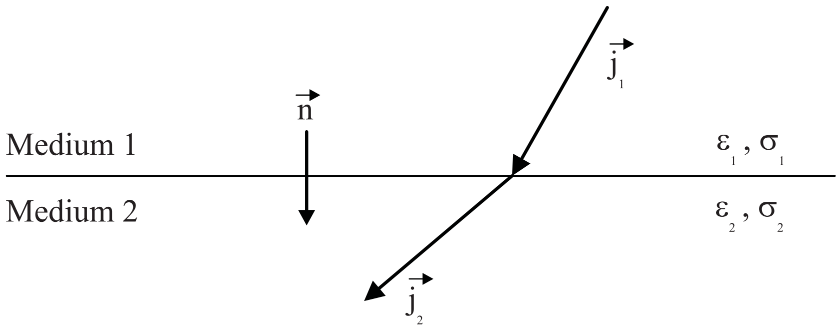


Abbildung 2.12: Ladungsspeicherung an der Grenzfläche zweier Medien bei Stromfluss

wobei ϱ_S die Oberflächenladungsdichte bezeichnet. Für die Normalkomponenten des elektrischen Stromes folgt mit (2.118) aus (2.124)

$$\vec{n} \circ \left(\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\sigma_2} \vec{j}_2 - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\sigma_1} \vec{j}_1 \right) = \varrho_\mathrm{S} \quad . \tag{2.125}$$

Aus der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \circ \vec{j} = 0$ für statische Felder schließt man, ähnlich wie für $\vec{D}$ in 4.2.5, dass die Normalkomponenten von $\vec{j}$ an der Grenzfläche stetig sind.

$$\vec{n} \circ \left(\vec{j}_2 - \vec{j}_1 \right) = 0 \tag{2.126}$$

Also ist

$$\vec{n} \circ \vec{j}_2 = \vec{n} \circ \vec{j}_1 = j_\mathrm{norm} \quad . \tag{2.127}$$

Damit ergibt sich aus (2.125) die durch den Stromfluss hervorgerufene Raumladung an der Grenzfläche zu

$$\varrho_\mathrm{S} = \left(\frac{\varepsilon_2 \varepsilon_0}{\sigma_2} - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_0}{\sigma_1} \right) j_\mathrm{norm} \quad . \tag{2.128}$$

Diese Oberflächenladung wird durch den Stromfluss erzeugt und stellt sich so ein, dass alle Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche erfüllt sind.

2.3.1.1 Grenzfläche zwischen Isolator und nicht idealem Leiter

Die Grenzfläche zwischen einem Isolator und einem nicht idealen Leiter ist als Sonderfall der oben diskutierten Grenzfläche zu betrachten. Wenn eines der beiden Medien ein Isolator

($\sigma = 0$) ist, ergibt sich aus (2.128) eine unendlich große, und damit unphysikalische, Oberflächenladungsdichte. Als Konsequenz muss also gefordert werden, dass in diesem Fall kein Strom senkrecht zur Oberfläche fließt. Entsprechend kann auch das elektrische Feld keine Normalkomponente auf die Oberfläche aufweisen. Dies gilt allgemein:
An der Grenzfläche zwischen einem leitfähigen Material und einem Isolator verschwindet die Normalkomponente des elektrischen Feldes

$$\vec{E} \circ \vec{n} = 0 \quad .$$

2.3.2 Ladungsdichte im nichtstatischen Fall

Wir wollen jetzt annehmen, dass die Feldgrößen $\varrho = \varrho\{\vec{r},t\}, \vec{j} = \vec{j}\{\vec{r},t\}, \vec{E} = \vec{E}\{\vec{r},t\}$ und $\vec{D} = \vec{D}\{\vec{r},t\}$ orts- und zeitabhängig sind, die Materialeigenschaften $\sigma = \sigma\{\vec{r}\}$ und $\varepsilon = \varepsilon\{\vec{r}\}$ dagegen nur vom Ort abhängen. Damit erhalten wir anstelle von (2.122) die Beziehung

$$\boxed{\varrho\{\vec{r},t\} + \frac{\varepsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}}\frac{\partial}{\partial t}\varrho\{\vec{r},t\} = \varepsilon_0\vec{j}\;\{\vec{r},t\} \circ \vec{\nabla}\frac{\varepsilon\{\vec{r}\}}{\sigma\{\vec{r}\}} \quad .} \tag{2.129}$$

Diese Formel bestimmt die strominduzierte Raumladung im nicht statischen Fall. Aus ihr lassen sich zeitliche Entwicklungen der Ladungsdichte ablesen. Zum Beispiel findet man für ein homogenes Medium bzw. ein Medium in dem der Quotient $\varepsilon\{\vec{r}\}/\sigma\{\vec{r}\}$ ortsunabhängig ist, den einfachen Zusammenhang

$$\varrho\{\vec{r},t\} + \tau\frac{\partial}{\partial t}\varrho\{\vec{r},t\} = 0 \tag{2.130}$$

mit der Lösung

$$\varrho\{\vec{r},t\} = \varrho\{\vec{r},t=t_0\}\,\exp\left\{-\frac{t-t_0}{\tau}\right\} \quad . \tag{2.131}$$

Eine zum Zeitpunkt $t = t_0$ vorhandene Raumladungsverteilung $\varrho\{\vec{r},t_0\}$ klingt exponentiell mit der Zeitkonstanten $\tau = \varepsilon\varepsilon_0/\sigma$ ab. Dass heißt:

homogene leitfähige Medien können im stationären Zustand als ungeladen betrachtet werden.

In inhomogenen Medien geht man von der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \circ \vec{j} = -\frac{\partial}{\partial t}\varrho$ aus und findet für die Raumladung

$$\varrho\left\{\vec{r},t\right\} = \varrho\left\{\vec{r},t_0\right\} - \int_{t_0}^{t} \vec{\nabla} \circ \vec{j}\left\{\vec{r},t'\right\}\ \mathrm{d}t' \quad . \tag{2.132}$$

2.4 Poisson- und Laplace- Gleichung und Kapazität

Die Poisson- und Laplace- Gleichung werden benutzt, um die Feldverteilung bei einer vorgegebenen Ladungsverteilung zu berechnen. Daraus lässt sich dann die Kapazität des Systems gewinnen.

2.4.1 Die Potenzialgleichung

In der Elektrostatik gelten die Beziehungen

$$\vec{\nabla} \circ \vec{D}\left\{\vec{r}\right\} = \varrho\left\{\vec{r}\right\} \tag{2.133}$$

und

$$\vec{E}\left\{\vec{r}\right\} = -\vec{\nabla} V\left\{\vec{r}\right\} \quad . \tag{2.134}$$

In linearen isotropen Dielektrika kommt als Materialgleichung noch

$$\vec{D}\left\{\vec{r}\right\} = \varepsilon\left\{\vec{r}\right\}\varepsilon_0 \vec{E}\left\{\vec{r}\right\} \tag{2.135}$$

hierzu. Hieraus folgt

$$\vec{\nabla} \circ \vec{D}\left\{\vec{r}\right\} = -\varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \left(\varepsilon\left\{\vec{r}\right\}\vec{\nabla} V\left\{\vec{r}\right\}\right) = -\varepsilon\left\{\vec{r}\right\}\varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} V\left\{\vec{r}\right\} - \varepsilon_0 \vec{\nabla}\varepsilon\left\{\vec{r}\right\} \circ \vec{\nabla} V\left\{\vec{r}\right\} \tag{2.136}$$

und mit der Abkürzung $\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} = \Delta$ die

Potenzialgleichung

$$\varepsilon\{\vec{r}\}\,\varepsilon_0\Delta V\{\vec{r}\} + \varepsilon_0\vec{\nabla}\varepsilon\{\vec{r}\}\circ\vec{\nabla}V\{\vec{r}\} = -\varrho\{\vec{r}\} \quad . \tag{2.137}$$

In homogenen Medien ist $\varepsilon\{\vec{r}\}$ konstant, also $\vec{\nabla}\varepsilon\{\vec{r}\} = 0$, und es gilt die

Poissongleichung

$$\Delta V\{\vec{r}\} = -\frac{\varrho\{\vec{r}\}}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad . \tag{2.138}$$

In homogenen raumladungsfreien Gebieten ist $\varrho\{\vec{r}\} = 0$, und das Potenzial genügt der

Laplacegleichung

$$\Delta V\{\vec{r}\} = 0 \quad . \tag{2.139}$$

In kartesischen Koordinaten (x, y, z) lautet die Laplacegleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0 \quad . \tag{2.140}$$

In Zylinderkoordinaten (ϱ, ϕ, z) erhalten wir

$$\Delta V = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial}{\partial\varrho}\left(\varrho\frac{\partial}{\partial\varrho}V\right) + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0 \quad , \tag{2.141}$$

und in Polarkoordinaten (r, θ, ϕ) gilt

$$\Delta V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}V\right) + \frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\partial}{\partial\theta}V\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}V = 0 \quad . \tag{2.142}$$

In raumladungsfreien Bereichen muss jedes nur denkbare Potenzial die Laplacegleichung erfüllen. Eine spezifische Lösung erhält man dadurch, dass das Potenzial an den das Feld erzeugenden Elektroden gewisse Randbedingungen erfüllen muss. Durch die Randbedingungen werden spezielle Werte des Potenzials oder der normalen Ableitung des Potenzials, d. h. der elektrischen Feldstärke, auf der Randfläche vorgegeben. Zum Beispiel muss das Potenzial auf einer Leiteroberfläche überall einen konstanten Wert annehmen.

2.4.2 Randbedingungen für das Potenzial

In einem Volumenbereich K gelte die Poissongleichung (2.138). Beim Dirichlet-Problem ist das Potenzial auf dem Rand ∂K von K vorgegeben:

Dirichlet Randbedingung

$$V_{\partial K}\left\{\vec{r}\right\} = f\left\{\vec{r}\right\} \tag{2.143}$$

Beim von Neumannschen Problem ist die Normalenableitung vorgegeben:

von Neumann Randbedingung

$$\left.\frac{\partial V}{\partial n}\right|_{\partial K} = \vec{\nabla} V \circ \vec{n}\big|_{\partial K} = \tilde{f}\left\{\vec{r}\right\} \tag{2.144}$$

Man kann nun unter sehr allgemeinen Voraussetzungen an K zeigen, dass eine Lösung der Poisson Gleichung existiert. Die Lösung ist eindeutig beim Dirichlet Problem und eindeutig bis auf eine Konstante beim von Neumann Problem.
Seien nämlich V_1 und V_2 zwei Lösungen der Poissongleichung (2.137) zu denselben Randbedingungen (2.143) bzw. (2.144) . Dann ist die Differenz $V = V_1 - V_2$ eine Lösung der Laplace Gleichung $\Delta V = 0$ zu den Randbedingungen $V_{\partial K} = 0$ bzw. $\partial V / \partial n|_{\partial K} = 0$. Für jede Funktion V gilt ganz allgemein nach der Produktregel

$$\vec{\nabla} \circ (V \vec{\nabla} V) = V(\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} V) + (\vec{\nabla} V) \circ (\vec{\nabla} V) = V \Delta V + \vec{\nabla} V \circ \vec{\nabla} V \quad . \tag{2.145}$$

Anwendung des Gaußschen Satzes liefert im vorliegenden Spezialfall $\Delta V = 0$ mit der Norm [1] $\|\vec{\nabla}\|$

$$\oiint_{\partial K} V \vec{\nabla} V \circ \mathrm{d}^2 r \vec{S} = \iiint_K \vec{\nabla} \circ (V \vec{\nabla} V)\, \mathrm{d}^3 r = \iiint_K \|\vec{\nabla} V\|^2\, \mathrm{d}^3 r \quad . \tag{2.146}$$

[1]Unterschied zwischen Norm und Betrag: $\vec{a} \in MC$
Norm $\|\vec{a}\|^2 := \vec{a} \circ \vec{a}$
Betrag $|\vec{a}|^2 := \vec{a} \circ \vec{a}^*$

Im Oberflächenintegral auf der linken Seite sind $V = V_{\partial K} = 0$ bzw. $\vec{\nabla} V \circ \vec{n}\, \mathrm{d}^2 S = (\partial V / \partial n)\, \mathrm{d}^2 S = 0$ auf der Randfläche zu nehmen, so dass

$$\oiint_{\partial K} V \vec{\nabla} V \circ \mathrm{d}^2 \vec{r} = \iiint_K \|\vec{\nabla} V\|^2\, \mathrm{d}^3 r = 0 \tag{2.147}$$

gilt. Damit folgt $\vec{\nabla} V = 0$ und damit $V = \text{const}$ im ganzen Gebiet K. Beim Dirichlet Problem galt $V_{\partial K} = 0$ und damit folgt $V = V_1 - V_2 \equiv 0$, d. h. die Lösung der Poisson Gleichung ist bei vorgegebenem Potenzial auf dem Rand eindeutig. Beim von Neumann Problem galt $\partial V / \partial n|_{\partial K} = 0$ und damit folgt $V_1 = V_2 +$ const, d. h. die Lösung der Poisson Gleichung ist eindeutig bis auf eine Konstante. In beiden Fällen ist wegen $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ das elektrische Feld eindeutig bestimmt.

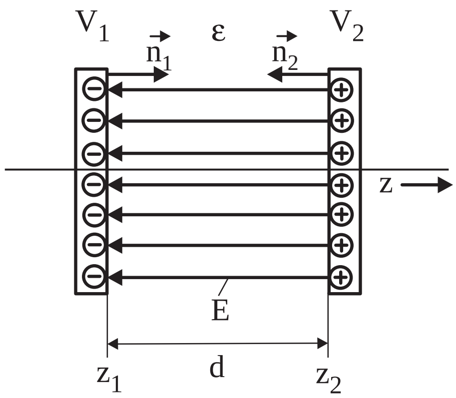


Abbildung 2.13: Plattenkondensator

Beispiel 2.4.1: Parallelplattenkondensator

Als Beispiel für Dirichlet Randbedingungen betrachten wir den Parallelplattenkondensator in Abbildung 2.13 mit vorgegebenen Potenzialen $V_1 = V\{z_1\}$ *und* $V_2 = V\{z_2\} = V_1 + U$ *mit* $U > 0$ *auf den beiden Platten im Abstand* $d = z_2 - z_1$*. Da das Feld symmetrisch in den* x*- und* y*-Koordinaten ist, reduziert sich die Laplace Gleichung (2.140) für den homogenen Innenraum zwischen den Leiterplatten auf*

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V = 0 \tag{2.148}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$V\left\{z\right\} = c_1 z + c_2 \tag{2.149}$$

mit Konstanten c_1 *und* c_2. *Zur Berechnung der Integrationskonstanten beachten wir die Randbedingungen*

$$V_1 = V\left\{z_1\right\} = c_1 z_1 + c_2 \tag{2.150}$$

und

$$V_2 = V\left\{z_2\right\} = c_1 z_2 + c_2 \quad , \tag{2.151}$$

so dass

$$\begin{aligned} V\left\{z\right\} &= \frac{V_2 - V_1}{z_2 - z_1}\, z + \frac{V_1 z_2 - V_2 z_1}{z_2 - z_1} = \left(V_2 - V_1\right) \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} + V_1 \\ &= \frac{U}{d}\left(z - z_1\right) + V_1 \end{aligned} \tag{2.152}$$

resultiert. Das elektrische Feld ist

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}z}\,\vec{e}_{\mathrm{z}} = -\frac{V_2 - V_1}{z_2 - z_1}\,\vec{e}_{\mathrm{z}} = -\frac{U}{d}\,\vec{e}_{\mathrm{z}} \quad . \tag{2.153}$$

Es ist homogen und hängt nur von der Potenzialdifferenz $\Delta V = V_2 - V_1 = U$ *und dem Plattenabstand* d *ab, wie man es vom Plattenkondensator kennt. Die dielektrische Verschiebung ist*

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 (V_2 - V_1)}{d}\,\vec{e}_{\mathrm{z}} \quad . \tag{2.154}$$

Die Oberflächenladungsdichte ϱ_{S} *ist*

$$\varrho_{\mathrm{S}} = \vec{D} \circ \vec{n} = \begin{cases} \vec{D}\left\{z = z_1\right\} \circ \vec{e}_{\mathrm{z}} = -\frac{\varepsilon\varepsilon_0 (V_2 - V_1)}{d} \\ \vec{D}\left\{z = z_2\right\} \circ \left(-\vec{e}_{\mathrm{z}}\right) = +\frac{\varepsilon\varepsilon_0 (V_2 - V_1)}{d} \end{cases} \quad . \tag{2.155}$$

Die Flächenladungsdichten auf beiden Platten sind gleich groß aber haben entgegengesetztes Vorzeichen.

2.4.3 Die Kapazität

Wir betrachten nach Abbildung 2.14 zwei Leiter L_1 und L_2, die in ein homogenes Dielektrikum mit Dielektrizitätskonstante ε eingebettet sind. L_1 habe eine positive Ladung $+Q$ und L_2 eine gleich große negative Ladung $-Q$, und es sollen keine weiteren freien Ladungen vorhanden sein. Die Gesamtladung des Systems ist null.

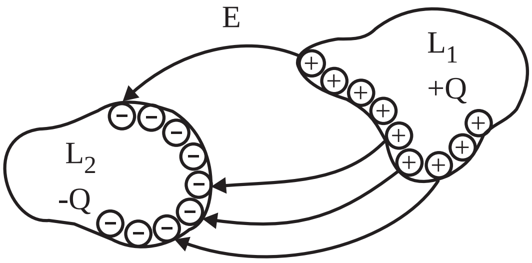


Abbildung 2.14: Entgegengesetzt geladene Leiter in einem Dielektrikum bilden eine Kapazität.

Man definiert die Kapazität $C = C_{12}$ zwischen den Leitern durch das Verhältnis von Ladung Q eines Leiters und der Potenzialdifferenz $U_{12} = V_2 - V_1$ zwischen beiden Leitern

$$\boxed{C = \frac{Q}{U_{12}} = \frac{\iint_{S_\mathrm{L}} \varrho_\mathrm{S}\, \mathrm{d}^2 r}{-\int_{C-}^{+} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell} = \frac{\iint_{S_\mathrm{L}} \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}}{-\int_{C-}^{+} \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell} \quad ,} \tag{2.156}$$

wobei S_L die Oberfläche des Leiters ist, der die positive Ladung trägt.

Genau genommen muss die zur Ladungsänderung ΔQ_{12} gehörende Änderung der Potenzialdifferenz zwischen den Leitern $\Delta U_{12}\{\Delta Q_{12}\}$ zur Berechnung von

$$C = C_{12} = \frac{\Delta Q_{12}}{\Delta U_{12}\left\{\Delta Q_{12}\right\}}$$

verwendet werden.

Dieses Verhältnis ist unabhängig von der Ladung und der Potenzialdifferenz. Denn wenn z. B. die Ladungsdichte um einen Faktor m zunimmt muss auch die Feldstärke um denselben Faktor zunehmen und Ähnliches gilt für die Zunahme der Potenzialdifferenz. Die Kapazität hängt also nur von der Geometrie der beiden Leiter ab.

Beispiel 2.4.1: Parallelplattenkondensator

Für einen Parallelplattenkondensator mit Plattenfläche S, dessen Feld für $S \gg d^2$ gut durch

(2.153) angenähert werden kann, erhält durch Auswertung von (2.156) das bekannte Ergebnis

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad . \tag{2.157}$$

Beispiel 2.4.2: Kugelkondensator

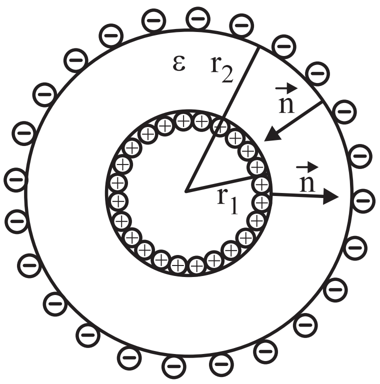


Abbildung 2.15: Kugelkondensator

Wir betrachten als weiteres Beispiel den in Abbildung 2.15 dargestellten Kugelkondensator. Auf der inneren Kugel befinde sich eine Ladung Q mit der Flächenladungsdichte

$$\varrho_{\mathrm{S}}\left\{r_1\right\} = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \tag{2.158}$$

und auf der äußeren Elektrode die Ladung $-Q$ mit der Flächenladungsdichte

$$\varrho_{\mathrm{S}}\left\{r_2\right\} = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} \tag{2.159}$$

In dem Dielektrikum zwischen den Kugeln muss die Laplace Gleichung gelten, die zweckmäßigerweise nach (2.142) in Polarkoordinaten geschrieben wird. Wegen der Kugelsymmetrie kann das Potenzial nicht von θ oder ϕ abhängen und (2.142) reduziert sich für das vorgegebene Problem zu

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 2r\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r} + r^2 \frac{\mathrm{d}^2 V}{\mathrm{d}r^2} = 0 \tag{2.160}$$

mit der Lösung

$$\frac{\partial}{\partial r} V = k_1 \cdot \frac{1}{r^2} \tag{2.161}$$

$$V = -k_1 \cdot \frac{1}{r} + k_2 \quad . \tag{2.162}$$

Die Integrationskonstante k_1 *wird durch die Randbedingungen auf den Elektroden festgelegt. Als Randbedingung gilt an der inneren Elektrode*

$$\varrho_\mathrm{S}\{r_1\} = \vec{D}\{r_1\} \circ \vec{n}\{r_1\} = D_\mathrm{r}\{r_1\} = \varepsilon\varepsilon_0 E_\mathrm{r}\{r_1\} = -\varepsilon\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_1} = \frac{Q}{4\pi r_1^2} \tag{2.163}$$

und entsprechend an der äußeren Elektrode

$$\varrho_\mathrm{S}\{r_2\} = \vec{D}\{r_2\} \circ \vec{n}\{r_2\} = -D_\mathrm{r}\{r_2\} = -\varepsilon\varepsilon_0 E_\mathrm{r}\{r_2\} = \varepsilon\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial r}\right|_{r_2} = \frac{-Q}{4\pi r_2^2} \quad . \tag{2.164}$$

Dies sind von Neumannsche Randbedingungen für das Potenzial.

Die Integrationskonstante ergibt sich aus (2.163) oder (2.164) , so dass

$$E_\mathrm{r} = -\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2} \tag{2.165}$$

folgt. Die Potenzialdifferenz ist mit $\mathrm{d}\vec{l} = -\vec{e}_\mathrm{r}\,\mathrm{d}r$

$$U = \int_{r_2}^{r_1} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{l} = -\int_{r_2}^{r_1} \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right] = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\,\frac{r_2 - r_1}{r_1 r_2} \quad . \tag{2.166}$$

Damit folgt für die Kapazität des Kugelkondensators

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}{\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}} \quad . \tag{2.167}$$

Im Grenzfall einer unendlich weit entfernten äußeren Elektrode ist

$$C = 4\pi\varepsilon\varepsilon_0 r_1 \quad . \tag{2.168}$$

Die Kapazität einer Kugel gegenüber der Umgebung wächst also proportional mit dem Radius. Im anderen Grenzfall $d = r_2 - r_1 \ll r_1, r_2$ *und* $r_1 \approx r_2 = r$ *folgt aus (2.167)*

$$C = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 4\pi r_1 r_2}{r_2 - r_1} \approx \frac{\varepsilon\varepsilon_0 4\pi r^2}{d} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d} \quad , \tag{2.169}$$

was nach (2.157) gerade die Kapazität des Plattenkondensators darstellt.

2.5 Widerstände und Kondensatoren

Unter Bezugnahme auf Abbildung 2.16 definieren wir den ohmschen Widerstand R eines Leiters durch den Quotienten aus Spannung $U_{12} = V_2 - V_1$ und Strom I_{12}

$$\boxed{R = R_{12} = \frac{U_{12}}{I_{12}} = \frac{\int_2^1 \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell}{\iint_{S_\mathrm{L}} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}} = \frac{\int_2^1 \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell}{\iint_{S_\mathrm{L}} \sigma\vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}} \quad . \qquad (2.170)}$$

Auch hier muss genau genommen die zur Spannungsänderung ΔU_{12} gehörende Stromänderung $\Delta I\{\Delta U_{12}\}$ zur Berechnung des Leiterwiderstandes

$$R = R_{12} = \frac{\Delta U_{12}}{\Delta I\{\Delta U_{12}\}}$$

herangezogen werden.

Die Endflächen des Leiters liegen auf den konstanten Potenzialen V_1 bzw. V_2, und das Integral über die Stromdichte $\vec{j}$ ist über den gesamten Leiterquerschnitt S zu erstrecken. Das Linienintegral über die elektrische Feldstärke $\vec{E}$ geht von einem zum anderen Ende des Leiters. Außerdem wird das mikroskopische ohmsche Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ berücksichtigt. Ist die Leitfähigkeit im Leiter konstant, $\sigma\{\vec{r}\} = const$, folgt

$$R = \frac{U}{I} = \frac{\int \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell}{\sigma \iint_{S_\mathrm{L}} \vec{E}(\vec{r}) \circ \mathrm{d}^2\vec{r}} \quad . \qquad (2.171)$$

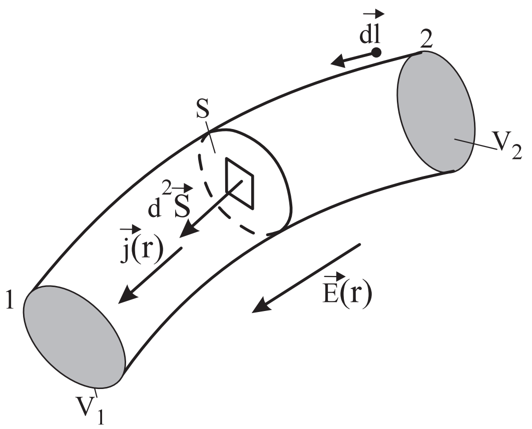


Abbildung 2.16: Zum ohmschen Widerstand eines Leiters

Für einen homogenen quaderförmigen Leiter der Länge ℓ und der Querschnittsfläche S, in dem außerdem das elektrische Feld $\vec{E}$ konstant ist, ergibt sich die bekannte Formel

$$R = \frac{\ell}{\sigma S} \quad . \tag{2.172}$$

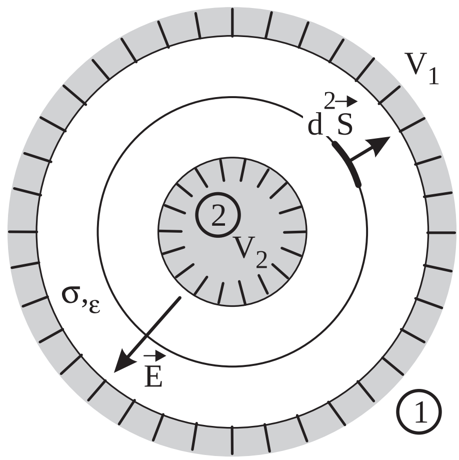


Abbildung 2.17: Zum Zusammenhang zwischen Widerstand und Kapazität bei gleicher Geometrie

Wir untersuchen nun eine Geometrie nach Abbildung 2.17, bei der eine Außenelektrode auf dem Potenzial V_1 eine Innenelektrode mit Potenzial V_2 ganz umschließen möge. Der Zwischenraum zwischen den Elektroden sei mit einem homogenen Stoff der Dielektrizitätskonstanten ε gefüllt. Die Kapazität der Anordnung ist

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\iint_{S_L} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}}{\int_2^1 \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \iint_{S_L} \vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}}{\int_2^1 \vec{E} \circ \mathrm{d}\ell} \tag{2.173}$$

Hierbei ist S eine Fläche, die Innenelektrode ganz umschließt.

Ersetzt man jetzt das Dielektrikum durch ein (homogenes) leitfähiges Material, so ist der $\vec{E}$-Feldverlauf derselbe wie zuvor, denn in beiden Fällen ist die Laplacegleichung $\Delta V = 0$ zu denselben Randbedingungen $V_1 = const$ bzw. $V_2 = const$ auf den Elektroden zu lösen. Der Widerstand der Anordnung ergibt sich aus (2.171) , wobei für S dieselbe Fläche wie in (2.173) genommen werden muss. Die Formeln (2.173) und (2.171) ergeben

$$\boxed{RC = \left.\frac{\iint_{S_L} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}}{\iint_{S_L} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}}\right|_{\text{homogenes Material}} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma} = \tau \quad . \qquad (2.174)}$$

Dies ist der Zusammenhang zwischen Widerstand und Kapazität bei gleicher Geometrie. Zu beachten ist hierbei, dass in beiden Systemen tatsächlich dieselben Randbedingungen für das Potenzial vorliegen.

Beispielsweise kann man mit (2.174) und der in 2.4.3 hergeleiteten Kapazität eines Kugelkondensators den Kugelwiderstand

$$R = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{\sigma C} = \frac{1/r_1 - 1/r_2}{4\pi\sigma} \tag{2.175}$$

sofort angeben.

Kapitel 3

Grundlegende Gesetze der Magnetostatik

3.1 Magnetfelder von Strömen

Von bewegten elektrischen Ladungen gehen Kräfte aus, die von den bislang behandelten elektrischen Kräften verschieden sind. Diese Kräfte lassen sich über magnetische Felder beschreiben, die in ihrer Wirkung auf andere bewegte Ladungen oder Ströme Kräfte ausüben. Es ist naheliegend, die Kräfte zwischen zwei infinitesimalen Stromdichteelementen zu untersuchen. Dies erweist sich jedoch konzeptionell nicht ganz ohne Probleme und ist auch zudem recht unübersichtlich. In diesem Abschnitt berechnen wir zunächst die magnetische Kraftflussdichte $\vec{B}$ (oder auch das Magnetfeld $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$) im Vakuum nach dem Biot-Savartschen Gesetz und gewinnen dann hieraus das Faradaysche Durchflutungsgesetz. Im folgenden Abschnitt behandeln wir Kraftwirkungen der Felder.

3.1.1 Das Biot-Savartsche Gesetz

Das **Biot-Savartsche Gesetz** wurde im Jahre 1820 für einen von Gleichstrom durchflossenen Leiter formuliert. Es verknüpft die Stromdichte mit der magnetischen Kraftflußdichte $\vec{B}$, auch **magnetische Induktion** genannt.

Hiernach ist der Beitrag eines infinitesimalen Stromdichteelements

$$d^3Q\vec{v} = \left(\varrho_{\mathrm{V}}\{\vec{r}\,'\}\vec{v}\{\vec{r}\,'\}\,d^3r'\right) = \vec{j}_{\mathrm{V}}\{\vec{r}\,'\}\,d^3r' \quad , \tag{3.1}$$

das sich am Ort $\vec{r}\,'$ befindet, zur magnetischen Kraftflussdichte $\vec{B}\,\{\vec{r}\}$, gemessen am Ort $\vec{r}$, durch

$$d^3\vec{B}\,\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d^3r' \tag{3.2}$$

gegeben, wobei $\mu_0 = 1.256 \cdot 10^{-6}$ Vs/Am die Permeabilität des Vakuums bezeichnet. Die zugehörige Geometrie ist in Abbildung 3.1 dargestellt. In gewisser Hinsicht ähnelt (3.2) dem Coulombgesetz. Allerdings tritt ein vektorielles Kreuzprodukt auf, was insbesondere abweichende Richtungen der elektrischen und magnetischen Feldlinien zur Folge hat.

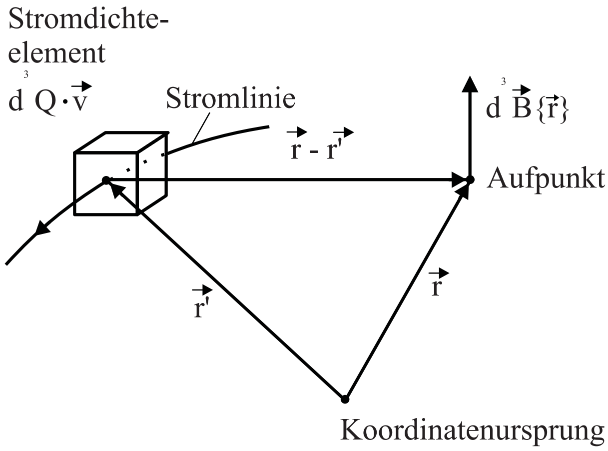


Abbildung 3.1: Geometrie zum Biot-Savartschen Gesetz

Das Feld einer ausgedehnten Stromverteilung in einem Volumen V ergibt sich durch vektorielle Superposition

Biot-Savart Gesetz:

$$\vec{B}\,\{\vec{r}\} = \iiint\limits_V \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,d^3r' \quad . \tag{3.3}$$

Anmerkung:

In unseren Überlegungen zum Biot-Savart Gesetz

hatten wir statische, von der Zeit unabhängige Stromdichte- und Ladungsdichteverteilungen betrachtet. Aus $\partial \varrho_V / \partial t = 0$ folgt nach der Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V} = 0$ und damit nach dem Gaußschen Integralsatz

$$\oiint_S \vec{j}_\mathrm{V} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = 0 \tag{3.4}$$

für jede beliebige geschlossene Fläche S. Diese Bedingung kann nur für einen geschlossenen Strompfad erfüllt werden. Für eine experimentelle Überprüfung des Biot-Savart Gesetzes muss also immer eine geschlossene Stromschleife herangezogen werden, und es macht keinen Sinn, das Feld eines infinitesimalen Stromdichteelements isoliert auszuwerten. Letzteres kann zu widersprüchlichen Ergebnissen führen.

3.1.2 Konzept des Stromfadens

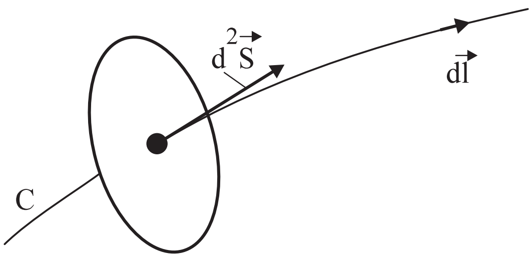


Abbildung 3.2: Zum Stromfaden

Wir untersuchen das Konzept des Stromfadens etwas genauer. Wir parametrisieren nach Abbildung 3.2 die Kurve C nach der Bogenlänge s und errichten in jedem Punkt der Bahn ein begleitendes lokales kartesisches Koordinatensystem mit dem Tangenteneinheitsvektor $\vec{e}_\mathrm{t}$ an die Kurve. Nach Abbildung 3.2 gilt dann

$$\mathrm{d}\ell = \vec{e}_\mathrm{t}\, \mathrm{d}\ell\,, \quad \mathrm{d}^2\vec{r} = \vec{e}_\mathrm{t}\, \mathrm{d}^2 r\,, \quad \mathrm{d}^3 r = \mathrm{d}^2\vec{r} \circ \mathrm{d}\ell = \mathrm{d}^2 r\ \mathrm{d}\ell \tag{3.5}$$

und für einen Stromfaden kann man schreiben

$$\vec{j}_{\mathrm{V}} = j_{\mathrm{V}}\,\vec{e}_{\mathrm{t}} = I\delta^{(2)}\{\vec{r}\}\vec{e}_{\mathrm{t}} \tag{3.6}$$

$$J = \iint_S \vec{j}_{\mathrm{V}} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iint_S \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \mathrm{d}^2 r = \iint_S \ \mathrm{d}^2 I = I \quad , \tag{3.7}$$

wobei I die Stromstärke im Faden bezeichnet[1]. Damit folgt

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}^3 r = j_{\mathrm{V}}\vec{e}_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}^3 r = j_{\mathrm{V}}\vec{e}_{\mathrm{t}}\,\mathrm{d}^2 r\,\mathrm{d}\ell = j_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}^2 r\,\mathrm{d}\vec{\ell} = \ \mathrm{d}^2 I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \quad .} \tag{3.8}$$

Der Übergang zum Stromfaden in (3.3) erfolgt also durch die Ersetzung $\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\mathrm{d}^3 r \Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$ und weglassen der beiden Integrationen senkrecht zum Stromfaden.

Beispiel 3.1.1: Magnetfeld eines geraden Stromfadens

Zur Veranschaulichung berechnen wir das Feld eines unendlich langen geraden Stromfadens der Stromstärke I, der entlang der z-Achse gespannt sein möge. Die Stromdichteverteilung wird durch

$$\vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}\} = I\,\delta\,\{x\}\ \delta\,\{y\}\ \vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{3.9}$$

beschrieben. Wegen des Kreuzproduktes im Integranden von (3.3) hat das Feld eine verschwindende z-Komponente. Wegen der Zylindersymmetrie der Quellverteilung ist auch das Feld zylindersymmetrisch. Es genügt das Feld in der Ebene $z = 0$ für Aufpunkte $\vec{r} = (x, y, 0)^T$ zu berechnen. Man erhält

$$\vec{B}\,\{x, y, 0\} = \frac{I\mu_0}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{e}_{\mathrm{z}} \times \big((x - x')\vec{e}_{\mathrm{x}} + (y - y')\vec{e}_{\mathrm{y}} - z'\vec{e}_{\mathrm{z}}\big)\,\delta\,\{x'\}\ \delta\,\{y'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3}\ \mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'\ \mathrm{d}z'$$

[1] Sobald der Strom J von einem Stromfaden geführt wird, benutzen wir zur Kenntlichmachung den Buchstaben I für die Stromstärke

$$
\begin{aligned}
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \left(x\vec{e}_{\mathrm{y}} - y\vec{e}_{\mathrm{x}}\right) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+y^2+z'^2)^{3/2}} \, \mathrm{d}z' \\
&= \frac{I\mu_0}{4\pi} \left(x\vec{e}_{\mathrm{y}} - y\vec{e}_{\mathrm{x}}\right) \left[\frac{z'}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2+z'^2}} \right]_{z'=-\infty}^{z'=\infty} \\
&= \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{x\vec{e}_{\mathrm{y}} - y\vec{e}_{\mathrm{x}}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{I\mu_0}{2\pi\rho} \left(\cos\{\varphi\}\ \vec{e}_{\mathrm{y}} - \sin\{\varphi\}\ \vec{e}_{\mathrm{x}}\right) \quad ,
\end{aligned}
$$

also

$$
\vec{B}\{x,y,0\} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{\rho} \vec{e}_\varphi \quad , \tag{3.10}
$$

wobei Zylinderkoordinaten ϱ, φ *eingeführt wurden und* $\vec{e}_\varphi$ *einen Einheitsvektor in Azimutalrichtung bezeichnet. Das Feld eines unendlich langen geraden Stromfadens besitzt nur eine Azimutalkomponente. Die Abnahme des Feldes erfolgt umgekehrt proportional zum Abstand* ρ. *Die Feldlinien sind konzentrische Kreise um den Stromfaden, die in Abbildung 3.3 illustriert sind.*

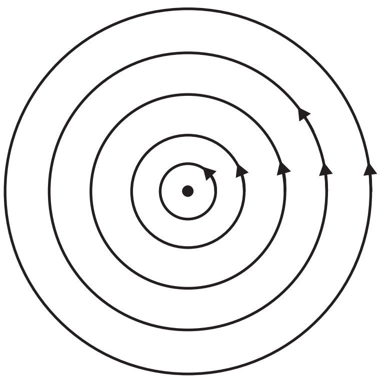


Abbildung 3.3: Feldlinien der magnetischen Induktion $\vec{B}$ eines Stromfadens senkrecht zur Zeichenebene. Der (positive) Strom fließt aus der Zeichenebene heraus.

Beispiel 3.1.2: Magnetfeld einer kreisförmigen Stromschleife

Nach Abbildung 3.4 ist die Stromverteilung einer kreisförmigen Stromschleife in der Ebene $z = 0$ gegeben durch

$$\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\} = I\,\delta\,\{z\}\ \delta\,\{\rho - \rho_0\}\ \Big(\vec{e}_\mathrm{y}\cos\{\varphi\} - \vec{e}_\mathrm{x}\sin\{\varphi\}\Big) = I\,\delta\,\{z\}\ \delta\,\{\rho - \rho_0\}\ \vec{e}_\varphi \quad (3.11)$$

wobei Zylinderkoordinaten benutzt werden.

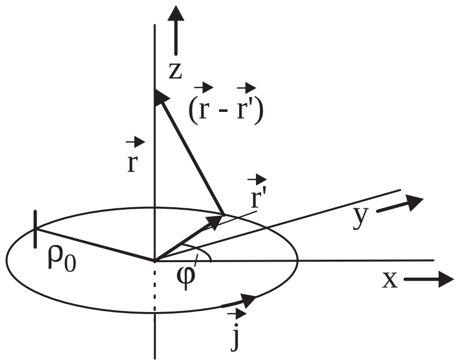


Abbildung 3.4: Zur Berechnung des Magnetfeldes einer Stromschleife

Für Aufpunkte auf der z-Achse $\vec{r} = (0,0,z)^T$ gilt nach (3.3)

$$\begin{aligned}\vec{B}\,\{\vec{r}\} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} I\delta\,\{z'\}\,\delta\,\{\rho' - \rho_0\}\,\Big(\vec{e}_\mathrm{y}\cos\{\varphi'\} - \vec{e}_\mathrm{x}\sin\{\varphi'\}\Big)\\ &\quad\times\frac{(z-z')\vec{e}_\mathrm{z} - \rho'\vec{e}_\mathrm{x}\cos\{\varphi'\} - \rho'\vec{e}_\mathrm{y}\sin\{\varphi'\}}{\Big((z-z')^2 + \rho'^2\cos^2\{\varphi'\} + \rho'^2\sin^2\{\varphi'\}\Big)^{3/2}}\rho'\ \mathrm{d}\rho'\ \mathrm{d}\varphi'\ \mathrm{d}z'\\ &= \frac{\mu_0\,I\,\rho_0}{4\pi(z^2+\rho_0^2)^{3/2}}\int\limits_0^{2\pi}\Big(z\vec{e}_\mathrm{x}\cos\{\varphi'\} + \rho_0\vec{e}_\mathrm{z}\cos^2\{\varphi'\} + \vec{e}_\mathrm{y}z\sin\{\varphi'\} + \rho_0\vec{e}_\mathrm{z}\sin^2\{\varphi'\}\Big)\ \mathrm{d}\varphi'\\ &= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{\rho_0^2}{(z^2+\rho_0^2)^{3/2}}\vec{e}_\mathrm{z} \qquad (3.12)\end{aligned}$$

Auf der Achse bei $z = 0$ fällt das Feld bei konstantem Strom mit dem Radius der Stromschleife ab. Aus Symmetriegründen besitzt das Feld auf der z-Achse nur eine z-Komponente, die unabhängig vom Vorzeichen von z immer in dieselbe Richtung weist. Offenbar ist die z-Achse eine Feldlinie der Anordnung.

3.1.3 Vektorpotenzial und Divergenz des statischen Magnetfeldes

In diesem Abschnitt wollen wir das Vektorpotenzial des Magnetfeldes und eine Divergenzbeziehung aus dem Biot-Savart Gesetz (3.3) herleiten. Damit lässt sich dann in einfacher Form der Zusammenhang zwischen dem Stromfluss durch eine Fläche und dem integralen $\vec{B}$-Feld am Rand der Fläche bestimmen. In der differentiellen Darstellung lässt sich aus der magnetischen Induktion die sie erzeugende Stromdichte errechnen. Für den Gradienten-Operator $\vec{\nabla} = (\partial/\partial x\ ,\partial/\partial y\ ,\ \partial/\partial z)^T$, der nur auf die ungestrichenen Variablen $\vec{r} = (x, y, z)^T$ wirkt, gilt zunächst

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} &= \left(\vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right) \times \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\} + \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\underbrace{\vec{\nabla} \times \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}}_{=0} \\ &= -\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \times \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\} = \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\} \times \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad .\end{aligned} \tag{3.13}$$

Damit können wir (3.3) umschreiben in

$$\begin{aligned}\vec{B}\ \{\vec{r}\} &= \iiint\limits_V \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\ \mathrm{d}^3r' \\ &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla} \times \frac{\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ \mathrm{d}^3r' \\ &= \vec{\nabla} \times \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ \mathrm{d}^3r' \quad .\end{aligned} \tag{3.14}$$

Die magnetische Induktion ist damit als Rotation des sogenannten

magnetischen Vektorpotenzials

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\ \mathrm{d}^3r' \tag{3.15}$$

dargestellt. Es ist also

$$\boxed{\vec{B}\,\{\vec{r}\} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\,\{\vec{r}\} \quad .} \tag{3.16}$$

Da für ein beliebiges Vektorfeld $\vec{G}(\vec{r})$ stets

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{G}\,\{\vec{r}\} = \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} \times \vec{G}\,\{\vec{r}\} \equiv 0 \tag{3.17}$$

gilt, folgt sofort

$$\boxed{\vec{\nabla} \circ \vec{B}\,\{\vec{r}\} = \operatorname{div}\vec{B} \equiv 0 \quad .} \tag{3.18}$$

Man sagt, das Magnetfeld ist quellenfrei.

3.1.4 Das Ampèresche Gesetz in Differentialform

Wir nutzen die Ergebnisse des vorangehenden Abschnitts, um $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \operatorname{rot}\vec{B}$ zu berechnen. Ausgangspunkt der Überlegungen ist nach wie vor das Biot-Savartsche Gesetz. Für differenzierbare Vektorfelder $\vec{G}\,\{\vec{r}\} = \left(G_\mathrm{x}\,\{\vec{r}\}\ ,\ G_\mathrm{y}\,\{\vec{r}\}\ ,\ G_\mathrm{z}\,\{\vec{r}\}\right)^T$ gilt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{G}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{G}) - \vec{\nabla}^2\vec{G} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla} \circ \vec{G}\right) - \Delta\vec{G} \quad , \tag{3.19}$$

wobei $\vec{\nabla}^2 G$ in kartesischen Koordinaten komponentenweise zu nehmen ist und die Beziehungen

$$\vec{\nabla}^2 G_\mathrm{x} = \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} G_\mathrm{x} = \Delta G_\mathrm{x} \tag{3.20}$$

bzw.

$$\vec{\nabla}^2 \vec{G} = \Delta \vec{G} = \begin{pmatrix} \Delta G_{\mathrm{x}} \\ \Delta G_{\mathrm{y}} \\ \Delta G_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} \tag{3.21}$$

gelten. Für die Rotation von $\vec{B}$ können wir folglich schreiben

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B}\,\{\vec{r}\} &= \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\,\{\vec{r}\}\right) \\ &= \vec{\nabla} \iiint\limits_V \vec{\nabla} \circ \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3 r' - \Delta \iiint\limits_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3 r' \quad , \end{aligned} \tag{3.22}$$

wobei die Operatoren im letzten Term komponentenweise zu nehmen sind. Wir werten zunächst das erste Integral aus. Es ist

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_V \vec{\nabla} \circ \frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3 r' = \iiint\limits_V \vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\} \circ \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3 r' \\ &= - \iiint\limits_V \vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\,'\} \circ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\, \mathrm{d}^3 r' \\ &= - \iiint\limits_V \left[j_{\mathrm{x}}\,\{\vec{r}\,'\} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + j_{\mathrm{y}}\,\{\vec{r}\,'\} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} + j_{\mathrm{z}}\,\{\vec{r}\,'\} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \right] \mathrm{d}^3 r' \quad , \end{aligned} \tag{3.23}$$

wobei der bereits in (3.13) verwendete Zusammenhang

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = -\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}\,'}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^3} \tag{3.24}$$

ausgenutzt wurde. Die Stromverteilung ist auf ein endliches Volumen begrenzt, so dass $\vec{j}_{\mathrm{V}}\,\{\vec{r}\} \rightarrow 0$ für $\vec{r} \rightarrow \pm\infty$. Partielle Integration liefert folglich für genügend große Volumina V

$$
\begin{aligned}
&-\iiint\limits_V \left[j_\mathrm{x}\{\vec{r}\,'\} \frac{\partial}{\partial x'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + j_\mathrm{y}\{\vec{r}\,'\} \frac{\partial}{\partial y'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + j_\mathrm{z}\{\vec{r}\,'\} \frac{\partial}{\partial z'} \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right] \mathrm{d}^3 r' = \\
&= \iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial}{\partial x'} j_\mathrm{x}\{\vec{r}\,'\} \right) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \left(\frac{\partial}{\partial y'} j_\mathrm{y}\{\vec{r}\,'\} \right) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} + \left(\frac{\partial}{\partial z'} j_\mathrm{z}\{\vec{r}\,'\} \right) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \right] \mathrm{d}^3 r' \\
&= \iiint\limits_V \left(\vec{\nabla}' \circ \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\,'\} \right) \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ \mathrm{d}^3 r' = 0 \quad , \qquad (3.25)
\end{aligned}
$$

denn $\vec{\nabla} \circ j_\mathrm{V}\{\vec{r}\} = -\partial \varrho_\mathrm{V}/\partial t \equiv 0$ für statische Ströme. Folglich verschwindet das erste Integral in (3.22).

Für die x-Komponente des zweiten Integrals erhalten wir

$$
-\vec{\nabla} \circ \iiint\limits_V \vec{\nabla} \frac{j_\mathrm{x}\{\vec{r}\,'\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ \mathrm{d}^3 r' = \vec{\nabla} \circ \iiint\limits_V j_\mathrm{x}\{\vec{r}\,'\} \frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\ \mathrm{d}^3 r' = 4\pi\, j_\mathrm{x}\{\vec{r}\} \quad . \qquad (3.26)
$$

Die letzte Gleichheit resultiert nach Anwendung von (1.61). Für die y- und z- Komponenten gelten entsprechende Relationen, so dass insgesamt

$$
\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B}\ \{\vec{r}\} = \mu_0\, \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\} \qquad (3.27)}
$$

folgt. Dies ist die **Differentialform des Ampèreschen Gesetzes**, das man auch als **Durchflutungsgesetz** bezeichnet. Es gilt für statische Ströme mit $\vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V} = -\partial \varrho_\mathrm{V}/\partial t = 0$.

Es stellt eine lokale Beziehung her zwischen der Rotation der magnetischen Kraftflussdichte (oder des Magnetfeldes) und der Stromdichte. An Stellen mit $j_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\} = 0$ verschwindet die Rotation des B-Feldes. Man sagt, das Feld ist wirbelfrei.

3.1.5 Das Ampèresche Gesetz in Integralform

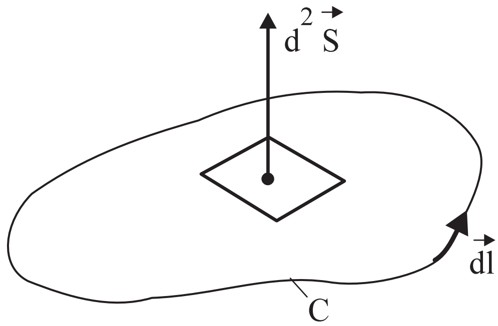
Ziel ist die Umformung des differentiellen Ampèreschen Gesetzes in eine äquivalente Integralrelation. Hierzu wird der **Stokessche Integralsatz** für ein differenzierbares Vektorfeld $\vec{T}\{\vec{r}\}$ benötigt

Stokesscher Integralsatz

$$\iint\limits_{S_\mathrm{C}} \left(\vec{\nabla} \times \vec{T}\,\{\vec{r}\}\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \;=\; \oint\limits_{\mathrm{C}} \vec{T}\,\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad . \tag{3.28}$$

Hierbei ist nach Abbildung 3.5 C eine Kurve, die Fläche S_C umschließt.

Abbildung 3.5: Zur Bezeichnung beim Stokesschen Integralsatz



Das gerichtete Flächenelement $\mathrm{d}^2\vec{r} = \mathrm{d}^2 r\vec{n}$ ist so orientiert, dass es beim Umlauf des gerichteten Kurvenelements $\mathrm{d}\vec{r}$ auf der Randkurve C in Richtung einer Rechtsschraube zeigt. Für das geschlossene Kurvenintegral über die magnetische Induktion erhalten wir

$$\oint\limits_{C} \vec{B}\,\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}\vec{r} = \iint\limits_{S_\mathrm{C}} \vec{\nabla} \times \vec{B}\,\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \mu_0 \iint\limits_{S_\mathrm{C}} \vec{j}_\mathrm{V}\,\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \mu_0\, J_\mathrm{C} \quad . \tag{3.29}$$

Hierbei haben wir (3.27) und die Definition der elektrischen Stromstärke J_C benutzt. Diese **Integralform des Ampèreschen Gesetzes** besagt, dass das geschlossene Linienintegral der magnetischen Induktion bis auf den Faktor μ_0 gleich der durch die umschlossene Fläche fließenden Stromstärke J_C ist. Da das Gesetz für alle Kurven C gilt, folgt aus (3.29) offenbar umgekehrt die Differentialform (3.27) .

Aus dem integralen Ampère-Gesetz lässt sich unmittelbar die azimutale Feldstärke von zylindersymmetrischen Stromverteilungen bestimmen. Man wählt als Integrationsweg einen

Kreis mit Radius ϱ um die Symmetrieachse. Wegen der vorausgesetzten Zylindersymmetrie ist die Feldstärke auf dem Kreis überall gleich. Außerdem geht im Skalarprodukt $\vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = B_\varphi \,\mathrm{d}\ell = B_\varphi \cdot \varrho \cdot \mathrm{d}\varphi$ nur die Azimutalkomponente des Feldes ein, so dass gilt

$$\oint\limits_C \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \oint\limits_C B_\varphi \,\mathrm{d}\ell = B_\varphi \oint\limits_C \mathrm{d}\ell = B_\varphi \cdot \varrho \cdot \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = B_\varphi \, 2\pi\varrho = \mu_0 J_\mathrm{C} \tag{3.30}$$

oder

$$B_\varphi = \frac{\mu_0 \, J_\mathrm{C}}{2\pi\varrho} \quad . \tag{3.31}$$

Dies bereits früher für einen unendlich langen Stromfaden abgeleitete Ergebnis gilt also viel allgemeiner für alle zylindersymmetrischen Stromverteilungen. Insbesondere

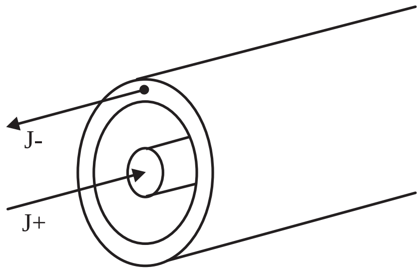


Abbildung 3.6: Stromfluss in der Koaxialleitung

folgt für eine Koaxialleitung nach Abbildung 3.6, bei der im Innenleiter der Strom J_+ hin und im Außenleiter der gleichgroße Strom $J_- = -J_+$ zurückfließt, dass die Kraftflussdichte B_φ im Außenraum verschwindet, weil für den umschlossenen Strom $J = J_+ + J_- = 0$ gilt. Der Außenleiter schirmt das Magnetfeld vollständig ab.

Im übrigen lässt sich durch Symmetriebetrachtungen zeigen, bei denen das Feld aus zu Stromfäden gehörenden Elementarfeldern aufgebaut wird, dass zylindersymmetrische Stromverteilungen keine Feldkomponenten in z-Richtung oder radiale Richtung erzeugen.

Schließlich sei noch festgehalten, dass aus den Folgerungen des Biot-Savart Gesetzes, nämlich $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_\mathrm{V}$ umgekehrt nicht das Biot-Savart Gesetz folgt. Sei nämlich $f = 0$ eine Lösung der Laplacegleichung $\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} f = \Delta f = 0$. Dann erfüllt $\vec{B}' = \vec{B} + \vec{\nabla} f$ nicht mehr das Biot-Savart Gesetz für die vorgegebene Stromverteilung $\vec{j}_\mathrm{V}$, aber es gilt nach wie vor $\vec{\nabla} \circ \vec{B}' = 0$ und auch $\vec{\nabla} \times \vec{B}' = \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_\mathrm{V}$, denn für jedes Vektorfeld f gilt $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f \equiv 0$. Die Divergenzbeziehung $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$, die Nichtexistenz magnetischer Ladungen ausdrückt, und das Ampèresche Gesetz sind also allgemeiner als das Biot-Savart Gesetz.

3.2 Kräfte magnetischer Felder

Auf eine bewegte Ladung wirkt neben der Coulombkraft $q\vec{E}$ noch eine weitere Kraftkomponente, die von der Geschwindigkeit $\vec{v}$ der Ladung und dem Magnetfeld $\vec{B}$ am Ort der Ladung abhängt. Die Richtung der Kraftkomponente steht senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{B}$. Die kombinierte elektrische und magnetische Kraftwirkung auf eine Ladung q wird durch die

Lorentzkraft

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} \tag{3.32}$$

ausgedrückt. Die Lorentzkraft stellt die Verbindung zwischen den elektromagnetischen Feldgrößen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ und der mechanischen Kraft $\vec{F}$ dar. Abbildung 3.7 illustriert die Kraftrichtung für eine positive Ladung im magnetischen Feld. Sie steht senkrecht auf $\vec{v}$ und $\vec{B}$.

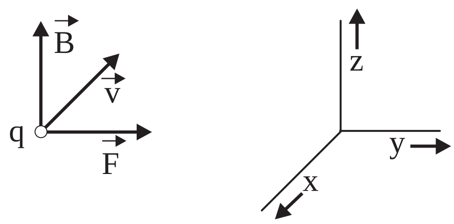


Abbildung 3.7: Zur Richtung der Lorentzkraft

3.2.1 Magnetische Kräfte auf Ströme

Wir hatten bereits früher gesehen, dass es letztlich darauf ankommt, Kräfte auf geschlossene Stromschleifen zu untersuchen, denn nur diese sind experimentell zugänglich. Kräfte auf differentielle Stromelemente sind der Ausgangspunkt der Überlegungen. Falls Volumenstromdichten vorliegen lautet die Kraftdichte ohne Berücksichtigung des elektrischen Feldes

$$\mathrm{d}^3\vec{F}\{\vec{r}\} = \mathrm{d}^3Q\,\vec{v} \times \vec{B} = \varrho_\mathrm{V}\,\mathrm{d}^3r\,\vec{v} \times \vec{B} = \vec{j}_\mathrm{V} \times \vec{B}\,\mathrm{d}^3r \quad , \tag{3.33}$$

Die Gesamtkraft ergibt sich durch Integration über das Volumen

$$\boxed{\vec{F} = \iiint\limits_{V} \varrho_{\mathrm{V}} \vec{E} + \vec{j}_V \times \vec{B} \; \mathrm{d}^3 r \quad .} \tag{3.34}$$

Beispiel 3.2.1: Kraft zwischen parallelen Linienleitern

Die Berechnung der Kraft zwischen parallelen geraden Linienleitern im Abstand d mit Stromdichten

$$\vec{j}_1 \left\{\vec{r}_1\right\} = I_1 \, \delta \left\{x_1\right\} \, \delta \left\{y_1\right\} \, \vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{3.35}$$

und

$$\vec{j}_2 \left\{\vec{r}_2\right\} = I_2 \, \delta \left\{x_2 - d\right\} \, \delta \left\{y_2\right\} \, \vec{e}_{\mathrm{z}} \quad , \tag{3.36}$$

die in dem Schnitt in Abbildung 3.8 dargestellt sind, kann zum Beispiel nach Formel (3.34) erfolgen.

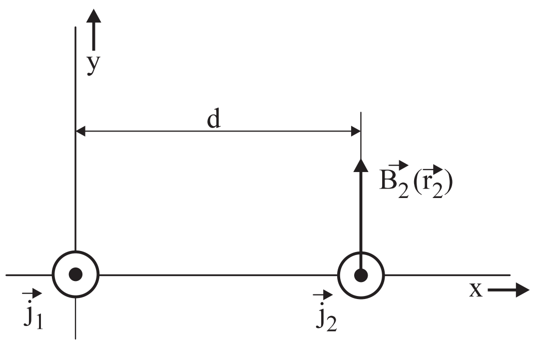


Abbildung 3.8: Zur Berechnung der Kraft zwischen parallelen Linienleitern

Der Leiter 1 erzeugt am Ort des Leiters 2 die magnetische Kraftflussdichte

$$\vec{B}_2 \left\{\vec{r}_2\right\} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \, \vec{e}_{\mathrm{y}} \quad . \tag{3.37}$$

Die Kraft auf ein Leiterstück 2 der Länge L ist dann

$$\vec{F}_2 = \iiint\limits_{V_2} \vec{j}_2 \left\{\vec{r}_2\right\} \times \vec{B}_2 \left\{\vec{r}_2\right\} \, \mathrm{d}^3 r_2$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} \iiint_{V_2} \delta\{x_2 - d\}\ \delta\{y_2\}\ (\vec{e}_\mathrm{z} \times \vec{e}_\mathrm{y})\ \mathrm{d}x_2\ \mathrm{d}y_2\ \mathrm{d}z_2 \tag{3.38}$$

$$= -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}\vec{e}_\mathrm{x} \int_0^L \mathrm{d}z_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi d}\vec{e}_\mathrm{x} \quad .$$

Haben I_1 und I_2 dasselbe Vorzeichen, dann ziehen sich die beiden Leiter an. Sonst stoßen sie sich ab. Die Größe der Kraft ist proportional zu den beiden Stromstärken und umgekehrt proportional zum Abstand.

Für Flächenströme $\vec{j}_\mathrm{S} = \varrho_\mathrm{S}\vec{v}$ ist entsprechend

$$\mathrm{d}^2\vec{F}\{\vec{r}\} = \vec{j}_\mathrm{S}\{\vec{r}\} \times \vec{B}\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^2 r \quad , \tag{3.39}$$

und

$$\vec{F} = \iint_S \vec{j}_\mathrm{S}\{\vec{r}\} \times \vec{B}\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^2 r \tag{3.40}$$

ist die Gesamtkraft auf den Flächenstrom. Beim eindimensionalen Linienstrom ist $\vec{j}_\mathrm{L} = \varrho_\mathrm{L}\vec{v}$ mit dem experimentell zu messenden Strom zu identifizieren, der in Richtung $\vec{l} = \vec{l}\{\vec{r}\}$ des Stromfadens fließt. Deshalb kann man schreiben

$$\mathrm{d}\vec{F}\{\vec{r}\} = \vec{j}_\mathrm{l} \times \vec{B}\ \mathrm{d}\ell = I\,\mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} \quad . \tag{3.41}$$

Die Gesamtkraft auf die (zwangsläufig) geschlossene Leiterschleife ist

$$\vec{F} = \oint_C I\,\mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\} \times \vec{B}\{\vec{r}\} = -I \oint_C \vec{B}\{\vec{r}\} \times \mathrm{d}\vec{\ell}\{\vec{r}\} \quad , \tag{3.42}$$

wobei die Stromstärke I entlang des Stromfadens überall konstant ist. Wirkt ein homogenes Magnetfeld $\vec{B}$ auf ein gerades Leiterstück der Länge L in Richtung $\vec{L}/L$ und hat keinen Einfluss auf den Rest der Stromschleife, dann folgt aus (3.42) die übersichtliche Formel

$$\vec{F} = I\,\vec{L} \times \vec{B} \quad . \tag{3.43}$$

Etwas allgemeiner kann für einen Stromfaden notiert werden:

$$\vec{F} = I \int\limits_C \mathrm{d}\vec{\ell} \times \vec{B} \quad \text{mit} \quad \mathrm{d}\vec{\ell} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{r}'\{t\})\,\mathrm{d}t \quad . \tag{3.44}$$

Dagegen verschwindet in einem homogenen Magnetfeld $\vec{B} = const$ die Kraft auf eine geschlossene Leiterschleife, denn

$$\vec{F} = -I\,\vec{B} \times \oint\limits_C \mathrm{d}\vec{\ell} = -I\vec{B} \times \sum_i \Delta\vec{\ell}_i = 0 \quad , \tag{3.45}$$

weil die Summe über die Vektoren $\Delta\vec{l}_i$ mit demselben Anfangs- und Endpunkt verschwindet.

Beispiel 3.2.2: Motor und Generator

a) Motor

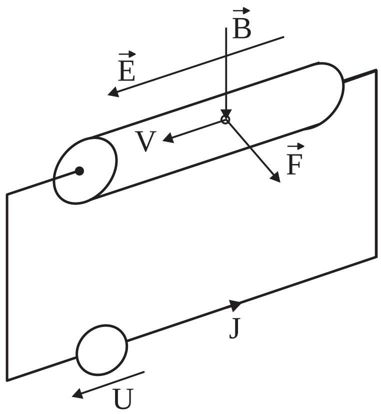


Abbildung 3.9: Entstehung der Kraftwirkung im Motor

Es wird ein Strom $\vec{J}$ durch das Magnetfeld $\vec{B}$ getrieben. Mit dem Modell von Stromfäden ist die Geschwindigkeit der Ladungsträger unter Berücksichtigung der Ladungsträgerbeweglichkeit $\mu = -\mu_\mathrm{n}$ bzw. $\mu = \mu_\mathrm{p}$ für Elektronen bzw. Löcher

$$\vec{v} = \mu \cdot \vec{E}. \tag{3.46}$$

Damit resultiert als Kraft auf die Ladungsträger im Leiter

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \mu \cdot \vec{E} \times \vec{B}) = \vec{F}_{\mathrm{J}} + \vec{F}_{\mathrm{A}} \tag{3.47}$$

Hier ist $\vec{F}_{\mathrm{J}}$ die Kraft, die den Stromfluss bewirkt, $\vec{F}_{\mathrm{A}} = \mu \cdot \vec{E} \times \vec{B}$ ist die Antriebskraft des Motors und steht senkrecht zu $\vec{F}_{\mathrm{J}}$.

b) Generator

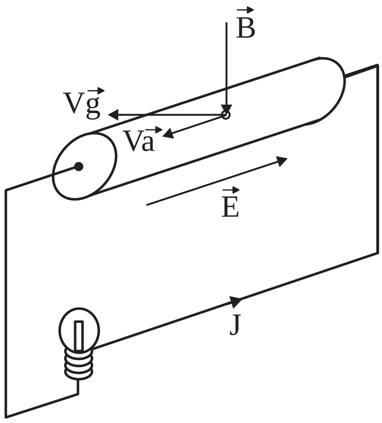


Abbildung 3.10: Spannungserzeugung und Bremskraft im Generator

Hier wird mit einer erzwungenen Bewegung der Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{g}}$ im Magnetfeld ein elektrisches Feld erzeugt. Im stationären Zustand herrscht Kräftegleichgewicht an den Ladungsträgern und die Lorentzkraft wird

$$\vec{F} = q \cdot (\vec{E} + \vec{v}_{\mathrm{g}} \times \vec{B}) = 0 \tag{3.48}$$

Das erzeugte elektrische Feld ist also

$$\vec{E} = -\vec{v}_{\mathrm{g}} \times \vec{B} \tag{3.49}$$

Nur die zum $\vec{B}$-Feld senkrechten Geschwindigkeitskomponenten erzeugen ein $\vec{E}$-Feld. Mit der Aufteilung $\vec{v}_{\mathrm{g}} = \vec{v}_{\mathrm{g1}} + \vec{v}_{\mathrm{g2}}$, wobei $\vec{v_{\mathrm{g1}}}$ die zu $\vec{B}$ senkrechte Geschwindigkeit $\vec{v}_{\mathrm{g1}} \circ \vec{B} = 0$ ist und $\vec{v_{\mathrm{g2}}}$ die Geschwindigkeitskomponente parallel zu $\vec{B}$ $\left(\vec{B}\vec{v_{\mathrm{g1}}} = 0\right)$ enthält, resultiert

$$E = v_{g1} \cdot B \ , \tag{3.50}$$

wobei die Richtung wie oben berechnet wird. Wird am Generator ein Verbraucher angeschlossen, bewegen sich positive Ladungsträger entgegengesetzt zu $\vec{E}$, negative Ladungsträger in Richtung von $\vec{E}$, wie in Abbildung 3.7 zu sehen ist. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass der elektrische Leiter parallel zu $\vec{E}$ liegt. Es resultiert die Gesamtgeschwindigkeit

$$\vec{v} = \vec{v}_{\mathrm{g}} + \vec{v}_{\mathrm{a}} = \vec{v}_{\mathrm{g}} - \mu \cdot \vec{E} \tag{3.51}$$

und die Lorentzkraft wird

$$\vec{F} = q \cdot \left(\vec{E} + \vec{v}_{\mathrm{g}} \times \vec{B} - \mu \cdot \left(\vec{E} \times \vec{B}\right)\right) = \vec{F}_{\mathrm{g}} + \vec{F}_{\mathrm{b}} \tag{3.52}$$

$\vec{F}_{\mathrm{g}}$ *und* $\vec{F}_{\mathrm{b}}$ *stehen zueinander senkrecht und mit der Ladungsträgerkonzentration* N *resultiert für*

$$\vec{F}_{\mathrm{b}} = -q\mu\left(\vec{E} \times \vec{B}\right) = -\frac{1}{N}\left(\vec{J} \times \vec{B}\right) \quad . \tag{3.53}$$

$\vec{F}_b$ *ist die durch den Stromfluss hervorgerufene Bremskraft auf die Elektronen, die aufgebracht werden muss, um den Stromfluss im Verbraucher aufrecht zu erhalten. Das Minuszeichen spiegelt sich in dem Merksatz "Der Strom wirkt seiner Ursache entgegen" wider.*
Ist das Magnetfeld in Motor oder Generator zeitabhängig, überlagert sich das aus dem Induktionsgesetz (6.5) resultierende E-Feld dem obigen.

3.2.2 Kräfte zwischen zwei linienförmigen Stromkreisen

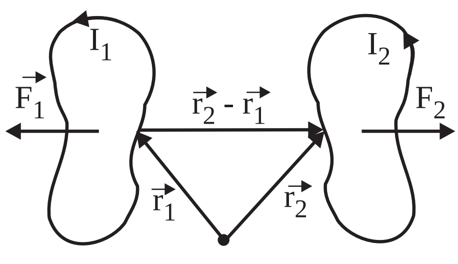


Abbildung 3.11: Kraftwirkung zwischen zwei Stromschleifen

Betrachtet man Abbildung 3.11 , so folgt mit $\vec{j}_{\mathrm{V}}\, \mathrm{d}^3 r = I\, \mathrm{d}\vec{\ell}$ aus dem differentiellen Biot-Savart Gesetz (3.2) für das Magnetfeld am Ort $\vec{r_2}$, das von einem Stromfadenelement am Ort $\vec{r_1}$ erzeugt wird,

$$\mathrm{d}\vec{B}_1\,\{\vec{r}_2\} = \frac{\mu_0\,I_1\,\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)}{4\pi|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad . \tag{3.54}$$

Damit ist nach (3.41) die Kraft auf ein Stromfadenelement $I_2\,\mathrm{d}\vec{l}_2$ am Ort $\vec{r}_2$

$$\mathrm{d}^2\vec{F}_2 = I_2\left(\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \times \mathrm{d}\vec{B}_1\right) = \mu_0 \frac{I_1 I_2\,\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \times \left(\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right)}{4\pi|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad . \tag{3.55}$$

Die Kraft zwischen zwei Stromkreisen I_1 und I_2 erhält man durch Integration

$$\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2} \frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \times \left(\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \times (\vec{r}_2 - \vec{r}_1)\right)}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad . \tag{3.56}$$

Das doppelte Kreuzprodukt im Integranden lässt sich vereinfachen zu

$$\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \times \left(\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \times \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\right) = \left(\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \circ \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}\right)\mathrm{d}\vec{\ell}_1 - \left(\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \circ \mathrm{d}\vec{\ell}_1\right)\frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \quad . \tag{3.57}$$

Das Skalarprodukt im ersten Summanden ist ein vollständiges Differential

$$\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \circ \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\,\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \circ \vec{\nabla}_2 \frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} = -\,\mathrm{d}_2\left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) \quad , \tag{3.58}$$

wobei der Index 2 auf die Differentiation bezüglich der Variablen hinweist. Da aber das geschlossene Kurvenintegral über ein vollständiges Differential verschwindet,

$$\oint\limits_{C_2} \mathrm{d}\vec{\ell}_2 \circ \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} = -\oint\limits_{C_2} \mathrm{d}_2\left(\frac{1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|}\right) = 0 \quad , \tag{3.59}$$

lässt sich (3.56) auf die symmetrische Form

$$\boxed{\vec{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{C_1}\oint\limits_{C_2} \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3}\left(\mathrm{d}\vec{\ell}_2 \circ \mathrm{d}\vec{\ell}_1\right)} \tag{3.60}$$

bringen. Offenbar ändert die Kraft $\vec{F}_2$ ihr Vorzeichen, wenn das Vorzeichen eines Stromes geändert wird. Die Kraft auf die Leiterschleife 1,

$$\vec{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint\limits_{C_2} \oint\limits_{C_1} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3} \, (\, \mathrm{d}\vec{\ell}_1 \circ \mathrm{d}\vec{\ell}_2) = -\vec{F}_2 \quad , \tag{3.61}$$

ist genau gleich groß und entgegengesetzt zur Kraft auf die andere Leiterschleife gerichtet. Außerdem resultiert nur dann eine Kraftwirkung, wenn die Ströme wenigstens stückweise (bis auf Vorzeichen) parallel zueinander sind (sonst ist $\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \circ \mathrm{d}\vec{\ell}_2 = 0$).

Kapitel 4

Magnetostatik

Bevor hier eine formale Behandlung der Magnetostatik erfolgt, sei an die grundlegenden Gesetze aus Kapitel 3 erinnert. Zum einen gilt das **Biot-Savartsche Gesetz** (3.3)

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \iiint\limits_{V} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}_V\{\vec{r}'\} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \, \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{4.1}$$

Das **Ampèresche Gesetz** lautet in integraler Darstellung (3.29)

$$\oint\limits_{C} \vec{B} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \mu_0 \iint\limits_{S_C} \vec{j}_V \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \mu_0 \, J_C \tag{4.2}$$

und in differentieller Darstellung (3.27)

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_V \quad . \tag{4.3}$$

Die Divergenz der magnetischen Induktion verschwindet (3.18)

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \quad . \tag{4.4}$$

Die beiden letzten Differentialgleichungen legen zusammen mit den noch zu diskutierenden Stetigkeits- und Randbedingungen den Feldverlauf fest.

4.1 Differentialgleichung für das magnetische Vektorpotenzial

Nach einem Satz aus der Differentialgeometrie gilt:
Wegen $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ existiert ein Vektorfeld $\vec{A}\{\vec{r}\}$, so dass gilt

$$\vec{B}\{\vec{r}\} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\{\vec{r}\} \quad . \tag{4.5}$$

Wir hatten das magnetische Vektorpotenzial bereits früher in Unterabschnitt 2.1.3 kennengelernt. Es ist ein Hilfsfeld ohne direkte physikalische Bedeutung.
Das Vektorfeld $\vec{A}$ ist nicht eindeutig, sondern nur bis auf ein Gradientenfeld eindeutig bestimmt. (Das skalare Potenzial $V\{\vec{r}\}$ ist nur eindeutig bis auf eine additive Konstante!) Sei nämlich $\Lambda\{\vec{r}\}$ eine Lösung der Poissongleichung

$$\Delta\Lambda\{\vec{r}\} = -\vec{\nabla} \circ \vec{A}\{\vec{r}\} \quad . \tag{4.6}$$

Dann gilt mit

$$\vec{A'}\{\vec{r}\} = \vec{A}\{\vec{r}\} + \vec{\nabla}\Lambda\{\vec{r}\} \tag{4.7}$$

sowohl

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A'} = \vec{\nabla} \circ (\vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda) = \vec{\nabla} \circ \vec{A} + \Delta\Lambda = 0 \tag{4.8}$$

als auch

$$\vec{\nabla} \times \vec{A'} = \vec{\nabla} \times \vec{A} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla}\Lambda = \vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B} \quad , \tag{4.9}$$

denn die Rotation eines Gradienten verschwindet immer. Man kann das Vektorpotenzial folglich immer so wählen, dass es der sogenannten

Coulomb Eichung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0 \tag{4.10}$$

genügt.
Nach (4.3) folgt

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \mu_0 \vec{j}_{\mathrm{V}} \quad . \tag{4.11}$$

Dies lässt sich (nur) in kartesischen Koordinaten umschreiben in

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{A}) - \Delta\vec{A} = \mu_0 \vec{j}_{\mathrm{V}} \quad , \tag{4.12}$$

welches mit der Coulomb Eichung in die **Poissongleichung**

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0 \vec{j}_{\mathrm{V}} \tag{4.13}$$

übergeht. Diese Gleichung ist komponentenweise zu verstehen und so nur in kartesischen Koordinaten gültig. Ausgeschrieben lautet (4.13) für die x-Komponente

$$\Delta A_{\mathrm{x}} = -\mu_0 j_{\mathrm{x}} \tag{4.14}$$

und ebenso für die y- und z-Komponente. Diese Poissongleichung lässt sich mit in der Elektrostatik vorgestellten Methoden lösen. In anderen Koordinatensystemen muss der Laplaceoperator entsprechend umgerechnet werden. Danach gilt wieder die komponentenweise Zuordnung zu drei Poissongleichungen.

Früher hatten wir (3.15)

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\ \mathrm{d}^3 r' \tag{4.15}$$

bereits als Vektorpotenzial benutzt. Da in der Magnetostatik

$$\vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathrm{V}} = -\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0 \tag{4.16}$$

gilt, folgt für die Divergenz des Vektorpotenzials

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \circ \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \circ \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\ \mathrm{d}^3 r' = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}'\} \circ \left(\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)\ \mathrm{d}^3 r' \\
&= -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}'\} \circ \left(\vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\right)\ \mathrm{d}^3 r' \\
&= +\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{\nabla}' \circ \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}'\}\right) \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\ \mathrm{d}^3 r' = 0 \quad .
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Das durch (4.15) gegebene Vektorpotenzial genügt demnach der Coulomb Eichung (4.10). Bei der letzten Umformung wurde die Produktregel verwendet und berücksichtigt, dass die Stromdichte gemäß Voraussetzung im Unendlichen verschwindet.

Als Grundaufgabe der Magnetostatik ist die Stromdichteverteilung $j_{\mathrm{V}}\{\vec{r}\}$ in einem Raumbereich V vorgegeben, und es sind die Randbedingungen des Vektorpotenzials $\vec{A}$ bzw. der magnetischen Induktion $\vec{B}$ festgelegt. Das Vektorpotenzial $\vec{A}$ erhält man dann für jede kartesische Komponente $A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}$ durch Lösung der Poissongleichung (4.3) in vollkommener Analogie zu elektrostatischen Problemen. Stetigkeitsbedingungen für magnetische Felder insbesondere auch bei Vorhandensein magnetischer Materie werden wir später diskutieren.

4.2 Magnetfeld außerhalb einer räumlich begrenzten Stromverteilung

Wir untersuchen eine auf einen endlichen Raumbereich K begrenzte Stromdichteverteilung $j_{\mathrm{V}}\{\vec{r}\}$, die auf dem Rand von K verschwindet. Am Beobachtungspunkt $\vec{r}$ außerhalb K interessiert uns das Vektorpotenzial $\vec{A}\{\vec{r}\}$. Der Abstand des Beobachtungspunktes sei groß im Vergleich zu den Linearabmessungen des stromführenden Bereichs. Ausgangspunkt der Berechnungen ist (4.15).

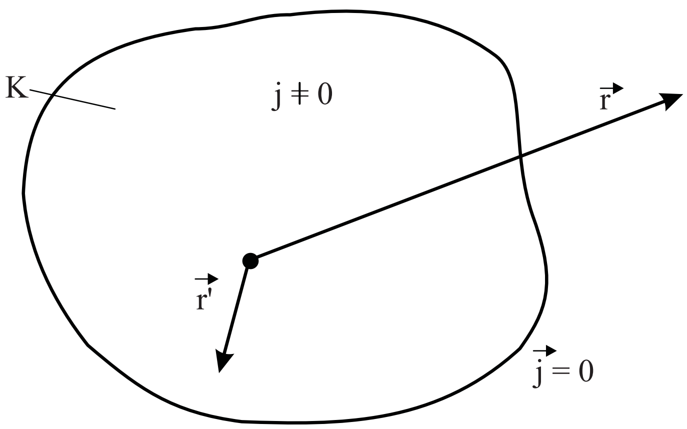


Abbildung 4.1: Räumlich begrenzte Stromverteilung

Wir legen den Ursprung in K hinein und haben mit den gemachten Annahmen $|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|$, wobei $\vec{r}'$ einen Vektor aus K bezeichnen möge. Taylor-Reihenentwicklung von $\dfrac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ um $\vec{r}'$ liefert näherungsweise

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} + \frac{\vec{r}' \circ \vec{r}}{|\vec{r}|^3} \quad , \tag{4.18}$$

wie wir schon in Abschnitt 4.2 gesehen haben. Mit (4.18) lässt sich (4.15) approximieren durch

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|} \iiint\limits_K \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}\ \mathrm{d}^3 r' + \frac{\mu_0}{4\pi|\vec{r}|^3} \iiint\limits_K \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}\,(\vec{r}' \circ \vec{r})\ \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{4.19}$$

Wir wollen zeigen, dass der erste Term in (4.19) verschwindet. Hierzu berücksichtigen wir $\vec{r} = (x,y,z)^T$, $\vec{\nabla} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\right)^T$ und $\vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V} = 0$. Wir haben

$$\vec{\nabla} \circ \left(x\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\}\right) = x \underbrace{\vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\}}_{=0} + (\vec{\nabla}x) \circ \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\} = j_\mathrm{x}\{\vec{r}\} \tag{4.20}$$

und damit für die x-Komponente

$$\iiint\limits_K j_\mathrm{x}\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r = \iiint\limits_K \vec{\nabla} \circ \left(x\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\}\right)\ \mathrm{d}^3 r = \oint\!\!\!\oint\limits_{S_K} x\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = 0 \quad , \tag{4.21}$$

da $\vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\} = 0$ auf dem Rand von K. Ähnliche Überlegungen gelten für die y- und z-Komponente von $\vec{j}_\mathrm{V}$, so dass für den Monopolterm gilt

$$\iiint\limits_K \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r = 0 \quad . \tag{4.22}$$

Das Verschwinden des Monopolterms ist Ausdruck dafür, dass es keine magnetischen Ladungen gibt. Dies ist eine Folge von $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$. In der Entwicklung (4.19) bleibt also nur der Dipolterm

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{|\vec{r}|^3} \iiint\limits_K \vec{j}_\mathrm{V}\ \{\vec{r}'\}\,(\vec{r}' \circ \vec{r})\ \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{4.23}$$

Wir wollen das Integral noch weiter umschreiben.

Wir indizieren die kartesischen Komponenten mit $1,2,3$, also $\vec{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ und $\vec{j}_\mathrm{V} = (j_1, j_2, j_3)^T$ und schreiben nach (4.20)

$$\vec{\nabla} \circ (r_k \vec{j}_\mathrm{V}) = j_k \quad . \tag{4.24}$$

Die rechte Seite von (4.23) lautet für die Komponente k

$$\iiint\limits_K (\vec{r}\circ\vec{r}\,')j_k\{\vec{r}\,'\}\ \mathrm{d}^3r' = \sum_{i=1}^{3}\left\{r_i \iiint\limits_K r'_i j_k\{\vec{r}\,'\}\ \mathrm{d}^3r'\right\} \tag{4.25}$$

Für das Integral der rechten Seite findet man mit partieller Integration unter Berücksichtigung von $\iiint\limits_K \vec{\nabla}\circ(r_k\vec{j})\ \mathrm{d}^3r = \oiint r_k\vec{j}\,\mathrm{d}^2\vec{r} = 0$ den Zusammenhang

$$\begin{aligned}\iiint\limits_K j_k\{\vec{r}\}\,r_i\ \mathrm{d}^3r &= \iiint\limits_K \left[\vec{\nabla}\circ\left(r_k\vec{j}\ \{\vec{r}\}\right)\right] r_i\ \mathrm{d}^3r \\ &= -\iiint\limits_K r_k\vec{j}\ \{\vec{r}\}\circ(\vec{\nabla}r_i)\ \mathrm{d}^3r = -\iiint\limits_K r_k j_i\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3r \quad ,\end{aligned} \tag{4.26}$$

d. h. das Integral ist antisymmetrisch in den Komponenten. Damit gilt weiter

$$\begin{aligned}\iiint\limits_K (\vec{r}\circ\vec{r}\,')j_k\{\vec{r}\,'\}\ \mathrm{d}^3r' &= -\sum_{i=1}^{3}\left\{r_i\iiint\limits_K j_i\{\vec{r}\,'\}\,r'_k\ \mathrm{d}^3r'\right\} \\ &= -\iiint\limits_K \vec{r}\circ\vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}\,'\}\,r'_k\ \mathrm{d}^3r' \quad ,\end{aligned} \tag{4.27}$$

also auch

$$\iiint\limits_K \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}\,'\}\,(\vec{r}\,'\circ\vec{r}\,)\ \mathrm{d}^3r' = -\iiint\limits_K \left(\vec{r}\circ\vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}\,'\}\right)\vec{r}\,'\ \mathrm{d}^3r' \tag{4.28}$$

Da für Vektoren $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\circ\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\circ\vec{b})$ gilt, haben wir zunächst mit der Zuordnung $\vec{a}=\vec{r}$, $\vec{b}=\vec{r}\,'$, $\vec{c}=\vec{j}_{\mathrm{V}}$

$$\vec{j}_{\mathrm{V}}(\vec{r}\,'\circ\vec{r}\,) = (\vec{r}\circ\vec{j}_{\mathrm{V}}\,)\vec{r}\,' - \vec{r}\times(\vec{r}\,'\times\vec{j}_{\mathrm{V}}\,) \quad . \tag{4.29}$$

Setzt man (4.29) in die rechte Seite von (4.23) ein und vergleicht mit (4.28), so resultiert

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = -\frac{1}{2}\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{|\vec{r}\,|^3}\iiint\limits_K \vec{r}\times\left(\vec{r}\,'\times\vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}\,'\}\right)\mathrm{d}^3r'$$

$$= -\frac{\mu_0}{8\pi}\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{r} \times \iiint_K \vec{r}' \times \vec{j}_V \{\vec{r}'\} \; \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.30}$$

Wir definieren das **magnetische Dipolmoment** einer räumlich begrenzten Stromverteilung durch

$$\boxed{\vec{m} = \frac{1}{2}\iiint_K \vec{r}' \times \vec{j}_V \left\{\vec{r}'\right\} \; \mathrm{d}^3r'} \tag{4.31}$$

und erhalten damit für das Vektorpotenzial in erster Näherung (außerhalb der Stromverteilung)

$$\boxed{\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{m} \times \vec{r}}{|\vec{r}|^3}} \tag{4.32}$$

Beispiel 4.2.1: Magnetisches Dipolmoment eines ebenen geschlossenen Stromfadens

Wir betrachten nach Abbildung 4.2 das magnetische Moment eines ebenen geschlossenen Stromfadens.

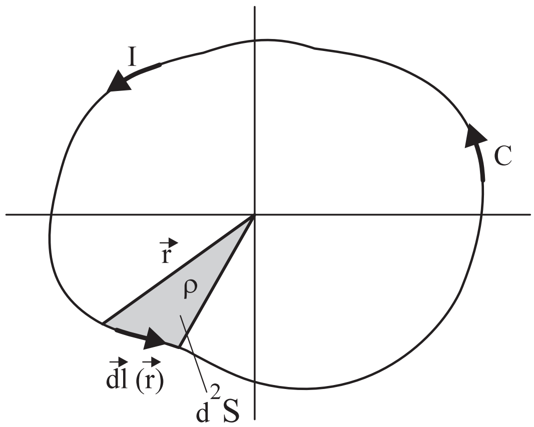


Abbildung 4.2: Geschlossener Stromfaden

Wie in Abschnitt 3.1.2 bereits hergeleitet, gilt für einen Stromfaden die Ersetzung $\vec{j}\,\mathrm{d}^3r \Rightarrow I\,\mathrm{d}\vec{\ell}$*. Dies nutzen wir bei der Berechnung des magnetischen Dipolmoments nach (4.31) und* *erhalten für einen geschlossenen Stromfaden*

$$\vec{m} = \frac{I}{2} \oint\limits_C \vec{r} \times \, \mathrm{d}\ell \, \{\vec{r}\} \quad . \tag{4.33}$$

Für einen ebenen Stromfaden steht $\vec{m}$ *senkrecht auf der durch den Strom* I *definierten Fläche. Die Rechtsschraubenregel verbindet Stromrichtung und Richtung des magnetischen Dipolmoments. Aus Abbildung 4.2 liest man ab*

$$\mathrm{d}^2 r = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \, \mathrm{d}\ell \, \{\vec{r}\}| = \frac{1}{2} |\vec{r}| |\, \mathrm{d}\ell \, \{\vec{r}\} \,| \, |\sin\{\varphi\}| \quad , \tag{4.34}$$

wobei $\varphi = \angle \left\{ \mathrm{d}\vec{l}, \vec{r} \right\}$ *den Winkel zwischen* $\vec{r}$ *und* $\mathrm{d}\vec{\ell} \, \{\vec{r}\}$ *bezeichnet. Durchläuft* $\vec{\ell} \, \{\vec{r}\}$ *die ganze Kurve* C*, dann erhält man die ganze von* C *umschlossene Fläche* S_C*, also*

$$|\vec{m}| = \frac{|I|}{2} \left| \oint \vec{r} \times \, \mathrm{d}\ell \, (\vec{r}) \right| = |I| \int\limits_{S_\mathrm{C}} \mathrm{d}^2 r = |I| S_\mathrm{C} \quad . \tag{4.35}$$

Das magnetische Moment eines ebenen Stromfadens ist also gleich dem Produkt aus Strom und der vom Stromfaden umschlossenen Fläche. Dieses Ergebnis ist unabhängig von der Form des Stromfadens. Zu beachten ist, dass bei ebenen Stromfäden Leiterbahnkreuzungen nicht vorkommen sollen (also z. B. keine Achterschleifen).

Beispiel 4.2.2: Magnetisches Dipolmoment bewegter Punktladungen

Als weiteres Beispiel berechnen wir das magnetische Moment von N *bewegten Punktladungen* q_i*, die sich mit der Geschwindigkeit* $\vec{v}_i$ *entlang der Ortskurve* $\vec{r}_i \, \{t\}$ *bewegen. Die Stromdichte ist*

$$\vec{j}_\mathrm{V} = \sum_{i=1}^{N} q_i \delta^{(3)} \{\vec{r} - \vec{r}_i \, \{t\}\} \, \vec{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \varrho_i \vec{v}_i \quad . \tag{4.36}$$

Eingesetzt in (4.31) ergibt dies das magnetische Moment

$$\begin{aligned} \vec{m} &= \frac{1}{2} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{r} \times \vec{j}_\mathrm{V} \, \{\vec{r}\} \, \mathrm{d}^3 r = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{r} \times \vec{v}_i \delta^{(3)} \{\vec{r} - \vec{r}_i \, \{t\}\} \, \mathrm{d}^3 r \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \vec{r}_i \, \{t\} \times \vec{v}_i \end{aligned} \tag{4.37}$$

Hierbei ist, wenn $\overline{m_i}$ die Masse des i-ten Teilchens bezeichnet, die Größe

$$\vec{L}_i = \overline{m_i}\,\vec{r}_i \times \vec{v}_i \tag{4.38}$$

der **Drehimpuls** *des i-ten Teilchens. Damit können wir schreiben*

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\frac{q_i}{\overline{m_i}}\vec{L}_i \quad . \tag{4.39}$$

Wenn nur ein Teilchen vorhanden ist oder alle Teilchen dieselbe Masse $\overline{m}$ und Ladung q haben, folgt sofort

$$\vec{m} = \frac{1}{2}\frac{q}{\overline{m}}\sum_{i=1}^{N}\vec{L}_i = \frac{1}{2}\frac{q}{\overline{m}}\vec{L} \quad , \tag{4.40}$$

wobei $\vec{L}$ den Gesamtdrehimpuls des Systems bezeichnet. Das Verhältnis vom magnetischen Dipolmoment zum Gesamtdrehimpuls bezeichnet man als **gyromagnetisches Verhältnis** *. Das Ergebnis $q/(2\overline{m})$ gilt für alle Bahnbewegungen von Teilchen, also auch für um den Atomkern kreisende Elektronen. Für den Spin, also den inneren Drehimpuls des Elektrons ist das zugehörige gyromagnetische Verhältnis $\vec{m}_{\text{Spin}}/\vec{L}_{\text{Spin}} = q/\overline{m}$, also doppelt so groß (bis auf minimale Abweichungen) wie der klassische Wert. Eine Erklärung dieser magneto-mechanischen Anomalie liefert erst die Diracsche relativistische Theorie des Elektrons.*

4.2.1 Magnetische Kraftflussdichte $\vec{B}$ außerhalb einer räumlich begrenzten Stromdichteverteilung

Mit den Näherungen des vorangehenden Abschnitts erhält man die magnetische Induktion gemäß $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ aus (4.32). Zur Berechnung benutzen wir die Formeln

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} f) = f\vec{\nabla} \times \vec{a} - \vec{a} \times \left(\vec{\nabla} f\right) \tag{4.41}$$

und

$$\vec{\nabla} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \circ \vec{\nabla})\vec{a} - (\vec{a} \circ \vec{\nabla})\vec{b} + \vec{a}(\vec{\nabla} \circ \vec{b}) - \vec{b}(\vec{\nabla} \circ \vec{a}) \quad . \tag{4.42}$$

Wir erhalten mit $\vec{m}$ unabhängig von $\vec{r}$ ($\vec{\nabla} \circ \vec{m} = 0$)

$$
\begin{aligned}
\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\left[\frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{\nabla} \times (\vec{m} \times \vec{r}) - (\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{\nabla}\frac{1}{|\vec{r}|^3}\right] \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{\frac{1}{|\vec{r}|^3}\left[\underbrace{(\vec{r} \circ \vec{\nabla})\vec{m}}_{=0} - (\vec{m} \circ \vec{\nabla})\vec{r} + \vec{m}(\vec{\nabla} \circ \vec{r}) - \vec{r}\underbrace{(\vec{\nabla} \circ \vec{m})}_{=0}\right] - \frac{3}{|\vec{r}|^5}(\vec{m} \times \vec{r}) \times \vec{r}\right\} \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\left\{-\frac{1}{|\vec{r}|^3}\underbrace{(\vec{m} \circ \vec{\nabla})\vec{r}}_{=\vec{m}} + \frac{1}{|\vec{r}|^3}\vec{m}\underbrace{(\vec{\nabla} \circ \vec{r})}_{=3} - \frac{3}{|\vec{r}|^5}\left[\vec{m}\underbrace{(\vec{r} \circ \vec{r})}_{=|\vec{r}|^2} - \vec{r}(\vec{m} \circ \vec{r})\right]\right\}
\end{aligned}
\tag{4.43}
$$

und endlich

$$
\boxed{\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{3\left(\vec{m} \circ \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\right)\frac{\vec{r}}{|\vec{r}|} - \vec{m}}{|\vec{r}|^3} \quad .} \tag{4.44}
$$

Damit hat $\vec{B}$ dieselbe mathematische Form wie ein elektrisches Dipolfeld (vergleiche 2.54). Dies gilt, wenn die magnetische Induktion hinreichend weit weg von der Stromdichteverteilung $\vec{j}_\mathrm{V}$ bestimmt wird. Das magnetische Dipolmoment ist durch (4.31) gegeben.

4.3 Magnetisierbare Materie

Durch die Elektronenbewegung in der Materie können sich mikroskopische Kreisströme ausbilden, die durch ihr magnetisches Moment das Vektorpotenzial der Umgebung beeinflussen.

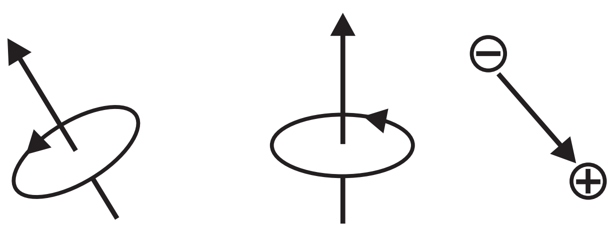
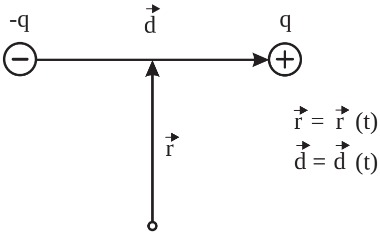


Abbildung 4.3: Modell mikroskopischer Kreisströme

Einen ähnlichen Effekt hat das magnetische Moment des Spins eines ungepaarten Elektrons. Üblicherweise fluktuieren diese Beiträge, aber unter der Wirkung eines äußeren Magnetfeldes kann sich durch Ausrichtung dieser magnetischen Dipole ein von Null verschiedener Mittelwert einstellen. In Ferromagnetika sind die magnetischen Elementardipole auch ohne äußeres Feld ausgerichtet. Wir betrachten im folgenden stets Mittelwerte der mikroskopischen Beiträge, die von ortsfesten Kreisströmen oder Elektronenspins herrühren.

Das Magnetfeld, genauer die magnetische Induktion, ist aus dem Strom der freien Ladungsträger und den Beiträgen der ortsfesten magnetischen Dipole entstanden zu denken. Zusätzlich müssen wir noch berücksichtigen, dass Bewegungen elektrischer Dipole ebenfalls einen lokalen Strom verursachen können und damit einen Beitrag zum $\vec{B}$-Feld oder Vektorpotenzial liefern.

Abbildung 4.4: Elektrischer Dipol



Beitrag elektrischer Dipole zum Magnetfeld

Wir diskutieren zunächst den Beitrag elektrischer Dipole zum Strom. Das Produkt Ladung $\cdot$ Geschwindigkeit definiert einen Strom (der nicht mit der experimentell zu messenden Stromstärke zu verwechseln ist). Dieser Strom ist für den elektrischen Dipol aus Abbildung 4.4 durch

$$q \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r} + \frac{\vec{d}}{2}\right) - q \cdot \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r} - \frac{\vec{d}}{2}\right) = q \cdot \frac{\partial}{\partial t}\vec{d} = \frac{\partial}{\partial t}\left(q \cdot \vec{d}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\vec{p} \qquad (4.45)$$

gegeben, wobei $\vec{p}$ das elektrische Dipolmoment bezeichnet. Ist N die elektrische Dipoldichte, also die Zahl der Dipole pro Volumen, dann ist die Polarisation $\vec{P} = \vec{p}N$ und der Strom pro Volumen, der mit der Stromdichte zu identifizieren ist, ist folglich

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{Pol}} = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \quad .} \tag{4.46}$$

Die zeitliche Änderung der Polarisation ergibt demnach gerade den Beitrag elektrischer Dipole zur Stromdichte. Man spricht bei $\vec{j}_{\mathrm{Pol}}$ auch vom **Polarisationsstrom** . In der Magnetostatik kommen jedoch keine Beiträge zeitlicher Ableitungen vor, so dass wir (4.46) hier nicht berücksichtigen müssen. Wir werden allerdings später auf die Beziehung zurückkommen.

Beitrag magnetischer Dipole zum Magnetfeld

Als nächstes untersuchen wir atomar gebundene Ringströme. Ein Ringstrom mit infinitesimalem magnetischen Dipolmoment $\mathrm{d}^3\vec{m}$, der am Ort $\vec{r}'$ lokalisiert ist, liefert den Beitrag

$$\mathrm{d}^3\vec{A}\left\{\vec{r}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}^3\vec{m}\left\{\vec{r}'\right\} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \tag{4.47}$$

zum Vektorpotenzial am Ort $\vec{r}$. Wir definieren nun die **Magnetisierung** $\vec{M}$ als das gesamte magnetische Dipolmoment pro Volumen, also als **magnetische Dipolmomentdichte** , und können schreiben

$$\mathrm{d}^3\vec{m}\left\{\vec{r}'\right\} = \vec{M}\left\{\vec{r}'\right\}\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.48}$$

Damit folgt aus (4.47)

$$\mathrm{d}^3\vec{A}\left\{\vec{r}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M}\left\{\vec{r}'\right\} \times (\vec{r}-\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \quad \mathrm{d}^3r' \tag{4.49}$$

und Integration liefert den gesamten Beitrag der magnetischen Dipolmomente zum magnetischen Vektorpotenzial (vergleiche skalares elektrisches Potenzial durch Polarisation (2.58))

$$\boxed{\vec{A}_{\text{magn. Dipol}}\left\{\vec{r}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{M}\left\{\vec{r}\,'\right\} \times (\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^3}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \qquad (4.50)}$$

Beitrag freier Ladungsträger zum Magnetfeld

Schließlich haben wir noch den Beitrag der freien Ladungsträger zur Stromdichte $\vec{j}_{\text{frei}}$ und damit zum Vektorpotenzial nach Gleichung (4.15)

$$\vec{A}_{\text{frei}}\left\{\vec{r}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{j}_{\text{frei}}\left\{\vec{r}\,'\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.51}$$

In der Magnetostatik setzt sich das Vektorpotenzial additiv aus (4.50) und (4.51) zusammen

$$\vec{A}\left\{\vec{r}\right\} = \vec{A}_{\text{frei}}\left\{\vec{r}\right\} + \vec{A}_{\text{magn. Dipol}}\left\{\vec{r}\right\} \tag{4.52}$$

4.3.1 Einführung des Magnetfeldes $\vec{H}$

Zunächst schreiben wir (4.50) um

$$\vec{A}_{\text{magn. Dipol}}\left\{\vec{r}\right\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{M}\left\{\vec{r}\,'\right\} \times \vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.53}$$

Wir benutzen die allgemeine Formel

$$\vec{\nabla}\times(f\vec{a}) = f\vec{\nabla}\times\vec{a} + \vec{\nabla}f\times\vec{a} \tag{4.54}$$

und haben

$$\vec{M}\times\vec{\nabla}'\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\vec{\nabla}'\times\vec{M} - \vec{\nabla}'\times\frac{\vec{M}\left\{\vec{r}\,'\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} \quad . \tag{4.55}$$

Wir betrachten räumlich begrenzte Magnetisierungen mit $\vec{M}\left\{\pm\infty\right\} = 0$ und erhalten

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}'\times\frac{\vec{M}\left\{\vec{r}\,'\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' = 0 \quad . \tag{4.56}$$

Dieses Ergebnis ist leicht einzusehen, denn es gilt z. B. für die x-Komponente

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\vec{M}_{\mathrm{z}}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}-\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\vec{M}_{\mathrm{y}}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'\ \mathrm{d}z' =$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial y'}\frac{\vec{M}_{\mathrm{z}}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}y'\right]\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}z' - \iint_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial z'}\frac{\vec{M}_{\mathrm{y}}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}z'\right]\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y'$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{\vec{M}_{\mathrm{z}}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0}\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}z' - \iint_{-\infty}^{\infty}\underbrace{\left[\frac{\vec{M}_{\mathrm{y}}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0}\mathrm{d}x'\ \mathrm{d}y' = 0 \quad . \tag{4.57}$$

Damit wird aus (4.53)

$$\boxed{\vec{A}_{\text{magn. Dipol}}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{\nabla}'\times\vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad ,} \tag{4.58}$$

und das gesamte Vektorpotenzial nach (4.52) lässt sich schreiben als (vergleiche elektrisches Potenzial (2.69))

$$\vec{A}\{\vec{r}\} = \frac{\mu_0}{4\pi}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{j}_{\text{frei}}\{\vec{r}'\}+\vec{\nabla}'\times\vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.59}$$

Der Anteil der magnetischen Dipoldichte am Gesamtfeld ist derselbe wie der einer Stromverteilung

$$\boxed{\vec{j}_{\text{magn}}\{\vec{r}\} = \vec{\nabla}\times\vec{M}\{\vec{r}\} \quad ,} \tag{4.60}$$

mit der **Magnetisierungsstromdichte** $\vec{j}_{\text{magn}}$. Die Berücksichtigung der magnetischen Dipole geschieht demnach einfach dadurch, dass in der Stromdichte freie Ströme und Magnetisierungsströme zusammengezählt werden

$$\vec{j}_V = \vec{j}_{\text{frei}} + \vec{j}_{\text{magn}} = \vec{j} + \vec{j}_{\text{magn}} \quad , \tag{4.61}$$

wobei wir in Zukunft den Index „frei" wie in der Elektrostatik weglassen. Das Ampèresche Gesetz lautet damit

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_V = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{j}_{\mathrm{magn}} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M} \quad . \tag{4.62}$$

Wir führen nun ähnlich wie in der Elektrostatik eine neue Feldgröße, das

Magnetfeld

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \tag{4.63}$$

ein, also $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}$ (vergleiche im Gegensatz dazu $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$), und erhalten dafür das

Durchflutungsgesetz

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad . \tag{4.64}$$

Die Rotation des Magnetfeldes ist also nur durch den Strom der freien Ladungsträger bestimmt. Die Einführung des Magnetfeldes $\vec{H}$ erfolgt analog zur Einführung der dielektrischen Verschiebung $\vec{D}$ in der Elektrostatik. Genaugenommen sind $\vec{H}$ und $\vec{D}$ nur Hilfsgrößen, Messgrößen sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Die Dimension von $\vec{H}$ ist A/m . Während stets $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ gültig ist, ist im allgemeinen $\vec{\nabla} \circ \vec{H} \neq 0$. Mit dem Stokesschen Satz folgt aus (4.64) für den Strom $J_{\mathrm{frei}} = J$, der durch eine Fläche S_C mit der Randkurve C hindurchtritt,

$$J = \iint_{\mathrm{S_C}} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \iint_{\mathrm{S_C}} (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \oint_{\mathrm{C}} \vec{H} \circ \mathrm{d}\ell \quad . \tag{4.65}$$

4.3.2 Linear magnetisierbare Materie

Wir haben gesehen, dass elementare magnetische Dipolmomente, die von molekularen Kreisströmen herrühren, einen Beitrag zur magnetischen Induktion $\vec{B}$ liefern. In einem äußeren $\vec{B}$-Feld werden die molekularen Dipole teilweise in Richtung von $\vec{B}$ gedreht, oder es werden die Molekülströme verzerrt, so dass sich das magnetische Dipolmoment ändert. Für diamagnetische oder paramagnetische Materie, nicht dagegen bei ferromagnetischen Stoffen kann man davon ausgehen, dass die Magnetisierung (als Mittel über alle elementaren magnetischen Dipole) linear vom $\vec{B}$-Feld abhängt. Für isotrope Stoffe können wir mit einer Proportionalitätskonstanten t/μ_0 setzen

$$\mu_0 \vec{M} = t\vec{B} \tag{4.66}$$

Damit folgt

$$\mu_0 \vec{H} = (1-t)\vec{B} \quad , \tag{4.67}$$

also auch eine Proportionalität von $\vec{B}$ und $\vec{H}$. Definiert man nun die relative Permeabilität μ und die **magnetische Suszeptibilität** χ_m durch

$$\mu = \frac{1}{1-t} = 1 + \chi_\mathrm{m} \quad , \tag{4.68}$$

so kann man auch schreiben

$$\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \tag{4.69}$$

und

$$\vec{M} = \chi_\mathrm{m} \vec{H} \quad . \tag{4.70}$$

Bei **diamagnetischen** Stoffen sind keine permanenten magnetischen Dipole vorhanden. Erst wenn ein magnetisches Feld eingeschaltet wird, werden magnetische Dipole induziert. Nach der Lenzschen Regel sind die induzierten Dipole dem erregenden Feld entgegengerichtet. χ_m ist deshalb negativ. Außerdem ist χ_m praktisch temperaturunabhängig, aber betragsmäßig sehr klein (in der Größenordnung $\chi_\mathrm{m} \approx -10^{-5}$). Nur in idealen Diamagneten, den Supraleitern, gilt $\chi_\mathrm{m} = -1$ (**Meißner-Ochsenfeld Effekt** , Herausdrängen des Magnetfeldes). Diamagnetismus ist eine Eigenschaft aller Stoffe, dem sich der Paramagnetismus überlagert. Der **Paramagnetismus** rührt her von permanenten magnetischen Dipolen, die im äußeren Feld mehr oder weniger ausgerichtet werden. Es gilt $\chi_\mathrm{m} > 0$, χ_m ist noch eine Funktion der

Temperatur, da der Ausrichtungstendenz die Unordnungstendenz der thermischen Bewegung entgegenwirkt.

In **ferro-**, **ferri-** und **antiferrimagnetischen** Stoffen handelt es sich um einen kollektiven Magnetismus, bei dem sich unterhalb einer kritischen Temperatur ganze magnetisierte Bereiche im Magnetfeld ausrichten. Bei diesem nur quantenmechanisch erklärbaren Magnetismus gilt die Proportionalität (4.66) nicht mehr.

4.4 Stetigkeitsbedingungen magnetischer Felder an Grenzflächen

Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind die Beziehungen

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \tag{4.71}$$

und das **Durchflutungsgesetz**

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} \quad . \tag{4.72}$$

Wir untersuchen nach Abbildung 4.5 die Grenzfläche zwischen zwei Stoffen unterschiedlicher Permeabilitäten μ_1 und μ_2 und setzen lineares Verhalten gemäß

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \tag{4.73}$$

voraus.

Ähnlich wie bei der Herleitung der Randbedingungen in der Elektrostatik betrachten wir den Zylinder in Abbildung 4.5 und erhalten im Grenzfall $\Delta h \to 0$

$$\oiint\limits_{\substack{\text{Zylinder}-\\ \text{oberfläche}}} \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} \stackrel{\Delta h \to 0}{=} \left(\vec{B}_2 \circ \vec{n} - \vec{B}_1 \circ \vec{n}\right) \Delta S = \iiint\limits_{\text{Zylinder}} \vec{\nabla} \circ \vec{B} \; \mathrm{d}^3 r = 0 \quad . \tag{4.74}$$

Hieraus folgt sofort, dass die Normalkomponenten von $\vec{B}$ an der Grenzfläche stetig sind

$$B_{\text{norm}\,1} = B_{\text{norm}\,2} \quad , \tag{4.75}$$

in vektorieller Schreibweise heißt das entsprechend (4.74)

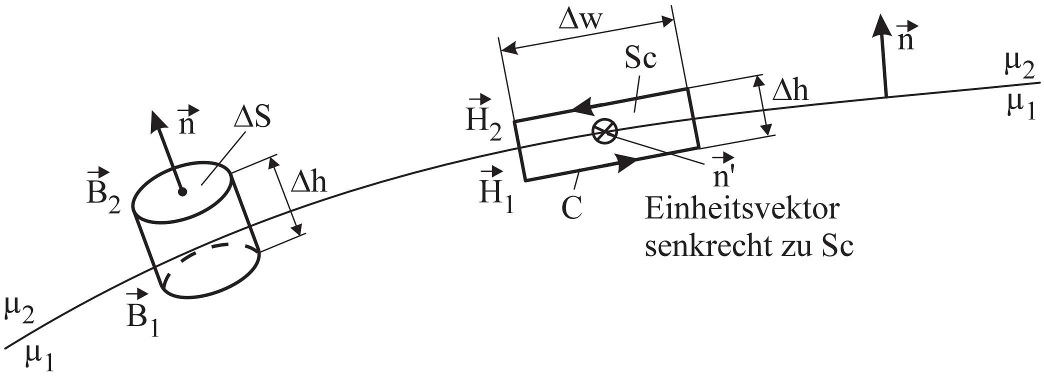


Abbildung 4.5: Zum Verhalten an magnetischen Grenzflächen

$$\boxed{\vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0} \tag{4.76}$$

Für die Normalkomponenten des Magnetfeldes gilt entsprechend

$$\mu_1 H_{\text{norm}\,1} = \mu_2 H_{\text{norm}\,2} \quad . \tag{4.77}$$

Da $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ generell gültig ist, gilt auch (4.76) ganz allgemein und nicht nur in der Magnetostatik.

Zur Bestimmung der Tangentialkomponenten betrachten wir die ebene rechteckförmige Kurve C in Abbildung 4.5 Im Grenzfall $\Delta h \to 0$ erhalten wir für hinreichend kleine Δw mit dem Stokesschen Satz aus dem Durchflutungsgesetz

$$\begin{aligned}\oint_{\mathrm{C}} \vec{H} \circ \mathrm{d}\ell = (\vec{n}' \times \vec{n})\Delta w \circ \vec{H}_2 - (\vec{n}' \times \vec{n})\Delta w \circ \vec{H}_1 = \iint_{S_\mathrm{C}} \vec{\nabla} \times \vec{H} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\ = \iint_{S_\mathrm{C}} \vec{j} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \vec{j} \circ \vec{n}' \Delta h \Delta w \quad ,\end{aligned} \tag{4.78}$$

wobei $\vec{n}'$ in Richtung $\mathrm{d}^2\vec{r}$ zeigt. Der letzte Term ist sicher null, wenn an der Grenzfläche keine Flächenströme vorkommen, da dann sicher $\vec{j}\Delta h \to 0$ geht mit $\Delta h \to 0$. Ist jedoch eine **Flächenstromdichte**

$$\varrho_s \vec{v} = \vec{j}_S$$

von freien Ladungsträgern vorhanden, dann folgt aus (4.78) nach Umschreiben des Spatprodukts

$$\Delta w (\vec{n}\,' \times \vec{n}) \circ (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \Delta w \left[\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \right] \circ \vec{n}\,' = \Delta w \vec{j}_S \circ \vec{n}\,' \quad . \tag{4.79}$$

Diese Gleichung gilt für alle Orientierungen von $\vec{n}\,'$ senkrecht zum Normalenvektor $\vec{n}$, so dass wir folgern müssen

$$\boxed{\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{j}_S \quad .} \tag{4.80}$$

Hierbei ist zu beachten, dass $\vec{j}_S$ nur Tangentialkomponenten in der Grenzfläche besitzen kann. Die Tangentialkomponenten von $\vec{H}_1$ und $\vec{H}_2$ sind

$$\vec{H}_{1\,\tan} = (\vec{n} \times \vec{H}_1) \times \vec{n} \tag{4.81}$$

und

$$\vec{H}_{2\,\tan} = (\vec{n} \times \vec{H}_2) \times \vec{n} \quad , \tag{4.82}$$

ähnlich wie wir es für tangentiale E-Felder früher bereits kennengelernt hatten. Demnach gilt für die Differenz der Tangentialvektoren der Magnetfelder in der Grenzfläche

$$\vec{H}_{2\,\tan} - \vec{H}_{1\,\tan} = \vec{j}_S \times \vec{n} \quad . \tag{4.83}$$

Nur wenn die Flächenstromdichte $\vec{j}_S$ verschwindet, sind die Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ stetig. Für die Tangentialkomponenten der magnetischen Induktion gilt entsprechend

$$\mu_2^{-1} \vec{B}_{2\,\tan} - \mu_1^{-1} \vec{B}_{1\,\tan} = \mu_0 \vec{j}_S \times \vec{n} \quad . \tag{4.84}$$

Die Beziehungen (4.83) und (4.84) gelten nur in der Magnetostatik, da das Durchflutungsgesetz (4.72) nur dort gültig ist.

4.5 Randwertprobleme der Magnetostatik

Ausgangspunkt sind wieder die beiden Gleichungen $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ und $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}$. Vorgegeben ist $\vec{j}$ in einem Raumbereich V und auf dem Rand $S(V)$ sind Randbedingungen zu erfüllen. In einem isotropen linearen Medium gilt

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{j} \quad . \tag{4.85}$$

Ähnlich wie in (4.13) folgt in Coulomb Eichung $\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0$ für das Vektorpotenzial

$$\boxed{\Delta \vec{A} = -\mu\mu_0 \vec{j} \quad .} \tag{4.86}$$

Diese Poissongleichung gilt für jede kartesische Komponente der Felder. Ist die Permeabilität in verschiedenen Teilbereichen konstant, so ist die Poissongleichung (4.86) in diesen Bereichen jeweils zu lösen. Dann sind die Lösungen mit den Stetigkeitsbedingungen (4.75) und (4.83) aneinander anzupassen.

4.5.1 Randwertprobleme bei verschwindender freier Stromdichte

In diesem Fall gilt $\vec{j} = 0$, und wegen $\vec{\nabla} \times \vec{H} = 0$ gibt es ein skalares Potenzial Φ_{mag}, so dass

$$\boxed{\vec{H} = -\vec{\nabla} \Phi_{\mathsf{mag}} \quad .} \tag{4.87}$$

Diese Definition des skalaren magnetischen Potenzials erfolgt in vollkommener Analogie zur Elektrostatik. Setzen wir wieder ein lineares Medium mit zumindest stückweise konstanter Permeabilität μ voraus, dann folgt die Laplacegleichung

$$0 = \vec{\nabla} \circ \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{\nabla} \circ \vec{H} = -\mu\mu_0 \vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} \Phi_{\mathsf{mag}} = -\mu\mu_0 \Delta \Phi_{\mathsf{mag}} \tag{4.88}$$

für das **skalare magnetische Potenzial** .

In nichtlinearen magnetischen Medien mit Magnetisierung $\vec{M}$ erhält man aus

$$0 = \vec{\nabla} \circ \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \circ (\vec{H} + \vec{M}) \tag{4.89}$$

mit (4.87) die Coulombgleichung

$$\boxed{\Delta\Phi_{\mathsf{mag}} = \vec{\nabla} \circ \vec{M} \tag{4.90}}$$

Im Vergleich zur Elektrostatik übernimmt hier $\vec{\nabla} \circ \vec{M}$ die Rolle der Ladungsdichte ϱ_{V}, wenn man einmal von einem Faktor $-\varepsilon_0^{-1}$ absieht. Falls keine Randbedingungen im Endlichen zu erfüllen sind, ist das

Poissonintegral

$$\Phi_{\mathsf{mag}}\{\vec{r}\} = -\frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{\nabla}' \circ \vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}^3 r' \tag{4.91}$$

eine Lösung von (4.90).

Wir nehmen an, dass die Magnetisierung $\vec{M}$ auf einen endlichen Raumbereich beschränkt ist. Wir können dann das Poissonintegral vereinfachen und erhalten

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{\nabla}' \circ \vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}^3 r' \quad &= \quad \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}' \circ \frac{\vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}^3 r' - \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{M}\{\vec{r}'\} \circ \vec{\nabla}' \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}^3 r' \\
&\overset{\text{Gaußscher Satz}}{=} \underbrace{\oiint\limits_{\mathsf{Fernkugel}} \frac{\vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \circ \mathrm{d}^2 \vec{r}}_{=0} + \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{M}\{\vec{r}'\} \circ \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}^3 r' \\
&= \quad \vec{\nabla} \circ \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \,\mathrm{d}^3 r' \quad ,
\end{aligned} \tag{4.92}$$

da $\vec{M}\{\pm\infty\} = 0$ ist. Damit wird das magnetische Potenzial bei Magnetisierung in einem beschränkten Raumgebiet.

$$\Phi_{\mathsf{mag}}\{\vec{r}\} = -\frac{1}{4\pi}\vec{\nabla}\circ\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\vec{M}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.93}$$

Beispiel 4.5.1: Homogen magnetisierte Kugel

Wir betrachten eine homogen in z-Richtung magnetisierte Kugel im Vakuum, wie in Abbildung 4.6 veranschaulicht.

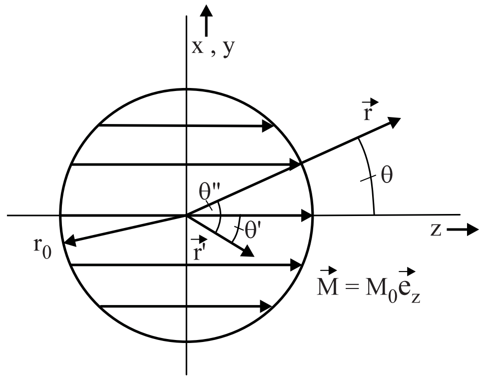


Abbildung 4.6: Homogen magnetiserte Kugel im Vakuum

Die Magnetisierung ist $\vec{M} = M_0\vec{e}_z$. Das magnetische Potenzial erhalten wir nach (4.93). Wir haben $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$ und nutzen außerdem Polarkoordinaten. Das Integral (4.93) werten wir für Aufpunkte $r > r_0$ außerhalb der magnetisierten Kugel aus. Wir haben

$$\Phi_{\mathrm{M}}\{\vec{r}\} = -\frac{M_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\iiint\limits_{\text{Kugel}}\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{4.94}$$

Nach Übergang auf ein neues kartesisches Koordinatensystem (u,v,w), dessen Ursprung im Kugelmittelpunkt liegt, so dass $\vec{r} = w\circ\vec{e}_w$ wird, kann in Kugelkoordinaten bezüglich (u,v,w) parametrisiert werden. Mit θ'' als Winkel zwischen $\vec{r}$ und $\vec{r}'$ folgt

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{M}}\{\vec{r}\} &= -\frac{M_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\int\limits_0^{r_0}\frac{1}{(r^2+r'^2-2rr'\cos\{\theta'\})^{1/2}}\,r'^2\sin\{\theta''\}\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi' \\ &\overset{u=\cos\{\theta''\},\ \mathrm{d}u=-\sin\{\theta''\}\,\mathrm{d}\theta'}{=} -\frac{M_0}{4\pi}\frac{\partial}{\partial z}2\pi\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_0^{r_0}\frac{r'^2}{(r^2+r'^2-2rr'u)^{1/2}}\,\mathrm{d}r'\,\mathrm{d}u\end{aligned} \tag{4.95}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{M_0}{2}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^{r_0}\left[\frac{-2}{2rr'}(r^2+r'^2-2rr'u)^{1/2}\right]_{u=-1}^{u=+1} r'^2\ \mathrm{d}r' \\
&\stackrel{r>r_0\,,\,\mathrm{d.h.}\,r>r'}{=} -\frac{M_0}{2}\frac{\partial}{\partial z}\int\limits_0^{r_0}\frac{-1}{rr'}\big((r-r')-(r+r')\big)\, r'^2\ \mathrm{d}r' \\
&= -M_0\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r}\int\limits_0^{r_0} r'^2\ \mathrm{d}r' = -\frac{\partial}{\partial z}\frac{M_0 r_0^3}{3r}
\end{aligned}
$$

Daraus erhalten wir mit

$$
\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial z}(x^2+y^2+z^2)^{-1/2} = -2z\frac{r^{-3}}{2} = -\frac{z}{r^3} = -\frac{r\cos\{\theta\}}{r^3} = -\frac{\cos\{\theta\}}{r^2} \tag{4.96}
$$

das Ergebnis $(r > r_0)$

$$
\Phi_\mathrm{M}\{\vec{r}\} = \frac{1}{3}M_0 r_0^3\frac{\cos\{\theta\}}{r^2} = \frac{r_0^3}{3}\frac{\vec{M}\circ\vec{r}}{r^3} \quad . \tag{4.97}
$$

Dies ist das typische skalare Potenzial eines Dipolfeldes, wie wir es aus der Elektrostatik kennen. Das $\vec{B}$*- oder* $\vec{H}$*-Feld einer homogen magnetisierten Kugel ist ein Dipolfeld bereits unmittelbar außerhalb der Kugel und nicht erst im Fernfeld.*

Kapitel 5

Spezielle Lösungsmethoden am Beispiel der Elektrostatik

Im Folgenden werden vier spezielle Methoden zur Lösung einer Differentialgleichung vorgestellt. Alle Ansätze werden hier in der Elektrostatik angewendet, weil es dafür anschauliche Beispiele gibt und relativ einfach überschaubare Zusammenhänge betrachtet werden. Die Anwendung ist aber nicht auf die Elektrostatik limitiert, sondern kann in anderen Gebieten der Elektrodynamik speziell oder noch allgemeiner in den Natur- und Ingenieurwissenschaften verwendet werden.

Die wichtigste Lösungsmethode ist die Entwicklung von Lösungen nach orthogonalen Funktionen, kurz Orthogonalentwicklung. Praktische Anwendungen finden sich in der Berechnung der Signalausbreitung in Wellenleitern wie zum Beispiel Glasfasern und Hohlleitern, aber auch in der Chemie zum Beispiel für die Berechnung eines Modells des Wasserstoffatoms oder in der Nachrichtentechnik bei der Anwendung sogenannter orthogonaler Kodierung.

Eine recht einfach anmutende Methode ist die Verwendung virtueller Spiegelungen, um Symmetrien auszunutzen. Die sogenannte Spiegelungsmethode wurde zum Beispiel bei der Herleitung des Kirchhoffschen Beugungsintegrals für die Berechnung von Beugungsphänomenen an homogen ausgeleuchteten Öffnungen angewendet.

Im Gegensatz zu den praktisch anwendbaren Methoden ist die Betrachtung der Greenschen Funktionen eher von theoretischen Interesse. Immerhin kann mit dieser Methode zum Beispiel auf die Abstrahlung von Antennen geschlossen werden, auch wenn keine konkrete Lösung vorliegt. Die Stärke der Methode liegt eher im Bereich der Erklärung von Phänomenen als in der konkreten Angabe von Lösungen.

Wieder mehr Relevanz für die Praxis hat die Anwendung konformer Abbildungen. Hier ist man darauf angewiesen, das zu lösende Problem als zweidimensionale Darstellung beschreiben zu können. Damit lassen sich dann Beispielsweise Kopplungen von Wellenleitern mit unterschiedlichen Querschnitten berechnen. Eine der wichtigsten Anwendungen, die heute noch intensiv verwendet wird, liegt in der Van der Pauw Methode zur Messung des spezifischen Widerstandes und des Flächenwiderstandes eines beliebig geformten Gebietes ohne Löcher, das auf seinem Rand über 4 Punkte kontaktiert ist. Ebenso wird der Hallkoeffizient gemessen und mit Hilfe beider Messungen kann die Ladungsträgerkonzentration in der Scheibe bestimmt werden. Mit Methoden der konformen Abbildung konnte Van der Pauw zeigen, dass in die Berechnungen weder die spezielle Form der Struktur noch die Position der Kontakte eingeht.

5.1 Lösungsmethoden für die Laplacegleichung mit Orthogonalentwicklung

In diesem Abschnitt wird zunächst die Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten gelöst. Es wird dabei deutlich werden, dass es sinnvoll ist, mit Hilfe eines Skalarprodukts für Funktionen, spezielle Lösungen als Basissystem von orthogonalen Funktionen zu formulieren. Das geschieht in völliger Analogie zur Geometrie, wo mit Hilfe des Skalarprodukts für Vektoren ein Basissystem von Vektoren formuliert werden kann. In gewissem Sinn kann man die Funktionen als Vektoren mit unendlich vielen Komponenten verstehen und es wird so möglich, beliebige Funktionen nach den orthogonalen Basisfunktionen zu entwickeln. Als Spezialfall einer Orthogonalzerlegung von Funktionen in einer Dimension wird die bekannte

Fourierentwicklung betrachtet. In einem allgemeinen Teil wird die Orthogonalentwicklung eines Potenzials für ein beliebiges dreidimensionales Koordinatensystem diskutiert. Im weiteren werden spezielle Lösungen der Laplacegleichung für verschiedene Koordinatensysteme hergeleitet und mit der allgemeinen Lösung verglichen. Am Ende des Abschnitts findet sich eine Zusammenfassung der Ansätze für die betrachteten Koordinatensysteme und Geometrien, sowie eine Aufstellung der verwendeten Basisfunktionen mit ihren Eigenschaften. An einigen Stellen werden die Lösungen von speziellen Differentialgleichungen als bekannt vorausgesetzt, um den ”roten Faden” nicht zu verlieren. Der interessierte Leser findet etwas genauere mathematische Betrachtungen zu diesen im Anhang F und selbstverständlich in der Literatur.

5.1.1 Zur Lösung der Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten

Die **Laplacegleichung in kartesischen Koordinaten**

$$\Delta V = \frac{\partial^2}{\partial x^2}V + \frac{\partial^2}{\partial y^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0 \tag{5.1}$$

lässt sich durch den **Produktansatz**

$$V\left\{x, y, z\right\} = X\left\{x\right\}\, Y\left\{y\right\}\, Z\left\{z\right\} \tag{5.2}$$

lösen. Einsetzen dieses Produktansatzes in (5.1) liefert nach Division durch XYZ

$$\frac{1}{X\left\{x\right\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X\left\{x\right\} + \frac{1}{Y\left\{y\right\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}Y\left\{y\right\} + \frac{1}{Z\left\{z\right\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Z\left\{z\right\} = 0 \quad . \tag{5.3}$$

Der erste Summand hängt nur von x, der zweite nur von y und der dritte nur von z ab. Das ist nur möglich, wenn jeder der drei Summanden konstant ist. Wir können also z.B. setzen

$$\frac{1}{X\left\{x\right\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}X\left\{x\right\} = -k_{\mathrm{x}}^2 \quad , \tag{5.4}$$

$$\frac{1}{Y\left\{y\right\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}Y\left\{y\right\} = -k_{\mathrm{y}}^2 \quad , \tag{5.5}$$

$$\frac{1}{Z\{z\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Z\{z\} = -k_\mathrm{z}^2 \quad . \tag{5.6}$$

Im allgemeinen müssen k_x, k_y und k_z komplex angenommen werden. Man spricht bei (5.2) auch von einem **Separationsansatz** . Dieser ist im Anhang F in allgemeinerer Form dargestellt. Hier soll ein auf das Problem angepasster Lösungsweg beschritten werden, bei dem k_x und k_y im weiteren als reell angenommen werden.

Aus (5.3) folgt mit den **Separationskonstanten** k_x, k_y und k_z die

Separationsbedingung

$$k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2 = 0 \quad . \tag{5.7}$$

Somit ist k_z nicht mehr frei wählbar, sondern nach (5.7) durch

$$-k_\mathrm{z}^2 = k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 \tag{5.8}$$

$$k_\mathrm{z} = \pm i\sqrt{k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2} \tag{5.9}$$

festgelegt. Die Beziehungen (5.4), (5.5) und (5.6) sind drei gewöhnliche Differentialgleichungen mit den allgemeinen Lösungen

$$X = A_\mathrm{x}\cos\{k_\mathrm{x}x\} + B_\mathrm{x}\sin\{k_\mathrm{x}x\} \ , \tag{5.10}$$

$$Y = A_\mathrm{y}\cos\{k_\mathrm{y}y\} + B_\mathrm{y}\sin\{k_\mathrm{y}y\} \ , \tag{5.11}$$

$$Z = A_\mathrm{z}\cos\{k_\mathrm{z}z\} + B_\mathrm{z}'\sin\{k_\mathrm{z}z\} \ . \tag{5.12}$$

Wegen (5.9) und der Zusammenhänge zwischen den Hyperbel- und den trigonometrischen Funktionen

$$\sinh\{z\} = -i\sin\{iz\} \tag{5.13}$$

$$\cosh\{z\} = \cos\{iz\} \tag{5.14}$$

lässt sich (5.12) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} Z &= A_{\mathrm{z}} \cos\left\{\pm iz\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} + B'_{\mathrm{z}} \sin\left\{\pm iz\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} \\ &= A_{\mathrm{z}} \cosh\left\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} \pm iB'_{\mathrm{z}} \sinh\left\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} \\ &= A_{\mathrm{z}} \cosh\left\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} + B_{\mathrm{z}} \sinh\left\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} . \end{aligned} \tag{5.15}$$

Eine partikuläre Lösung von (5.1) ist demnach

$$\begin{aligned} V = &\left(A_{\mathrm{x}} \cos\{k_{\mathrm{x}}x\} + B_{\mathrm{x}} \sin\{k_{\mathrm{x}}x\}\right) \\ &\cdot \left(A_{\mathrm{y}} \cos\{k_{\mathrm{y}}y\} + B_{\mathrm{y}} \sin\{k_{\mathrm{y}}y\}\right) \\ &\cdot \left(A_{\mathrm{z}} \cosh\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\} + B_{\mathrm{z}} \sinh\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\}\right) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Die allgemeine Lösung der Laplacegleichung (5.1) lässt sich als unendliche Summe über Ausdrücke der Form (5.16) darstellen. Dabei ist zu beachten, dass k_{x} und k_{y} kontinuierliche Werte annehmen können und die Konstanten $A_{\mathrm{x}}, B_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, B_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}$ und B_{z} von diesen abhängen. Wir schreiben im folgenden jedoch nicht $A_{\mathrm{x}}\{k_{\mathrm{x}}\}$ sondern verkürzt $A_{k_{\mathrm{x}}}$. Ebenso soll für die anderen Koeffizienten verfahren werden. Da k_{z} keine unabhängige Variable ist, gilt

$$\begin{aligned} A_{\mathrm{z}}\{k_{\mathrm{z}}\} &= A_{\mathrm{z}}\{k_{\mathrm{x}}, k_{\mathrm{y}}\} = A_{k_{\mathrm{x}},k_{\mathrm{y}}} \\ B_{\mathrm{z}}\{k_{\mathrm{z}}\} &= B_{\mathrm{z}}\{k_{\mathrm{x}}, k_{\mathrm{y}}\} = B_{k_{\mathrm{x}},k_{\mathrm{y}}} . \end{aligned}$$

Unter diesen Voraussetzungen wird aus der Summe über alle Lösungen ein Integral der Form

$$\boxed{\begin{aligned} V = &\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \left(A_{k_{\mathrm{x}}} \cos\{k_{\mathrm{x}}x\} + B_{k_{\mathrm{x}}} \sin\{k_{\mathrm{x}}x\}\right) \cdot \left(A_{k_{\mathrm{y}}} \cos\{k_{\mathrm{y}}y\} + B_{k_{\mathrm{y}}} \sin\{k_{\mathrm{y}}y\}\right) \\ &\cdot \left(A_{k_{\mathrm{x}},k_{\mathrm{y}}} \cosh\left\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\} + B_{k_{\mathrm{x}},k_{\mathrm{y}}} \sinh\left\{z\sqrt{k_{\mathrm{x}}^2+k_{\mathrm{y}}^2}\right\}\right) \mathrm{d}k_{\mathrm{x}}\, \mathrm{d}k_{\mathrm{y}} . \end{aligned}} \tag{5.17}$$

Das Integral ist im Bereich $x, y, z \in (-\infty, \infty)$ vollständig.

5.1.1.1 Orthogonalentwicklung bei zwei- und eindimensionalen karthesischen Probleme

Dies gilt auch noch, wenn die Laplacegleichung nur von zwei Koordinaten, z.B. x und y, abhängt. In diesem Fall wird der von der dritten Koordinate abhängige Faktor gleich eins gesetzt, also gemäß obigen Vorgaben Z=1.
Reduziert sich die Laplacegleichung auf nur eine Koordinatenabhängigkeit, so wird die Differentialgleichung durch Aufintegrieren gelöst, also für

$$\Delta V = \frac{\partial^2}{\partial x^2} V = 0 \tag{5.18}$$

folgt mit den Integrationskonstanten d_1 und d_2

$$V = d_1 x + d_2 \quad . \tag{5.19}$$

Wird das Potenzial auf einer geschlossenen quaderförmigen Oberfläche vorgegeben, ist der Ansatz (5.17) ungünstig und man kann einen einfacheren Ansatz wählen, der aber nur in dem eingeschränkten Bereich des Quaders vollständig ist.

5.1.1.2 Spezialfall: Potenzial in einem quaderförmigen Gebiet

Wir betrachten das folgende Dirichletsche Randwertproblem: Die Seitenflächen und der Boden des quaderförmigen Hohlraums in Abbildung 5.1 werden auf dem Potenzial $V = 0$ gehalten. Auf der Deckfläche $z = c$ sei das Potenzial

$$V\{x, y, z = c\} = V_c\{x, y\} \tag{5.20}$$

beliebig vorgegeben.
Wegen $V = 0$ auf den Seitenflächen $x = 0$ und $y = 0$ müssen A_x in (5.10) und A_y in (5.11) verschwinden. Aus $V = 0$ für $z = 0$ folgt weiterhin $A_\mathrm{z} = 0$ in (5.15).
Die Bedingung $V = 0$ für $x = a$ und $y = b$ erfordert wegen der Periodizität der trigonometrischen Funktionen zudem

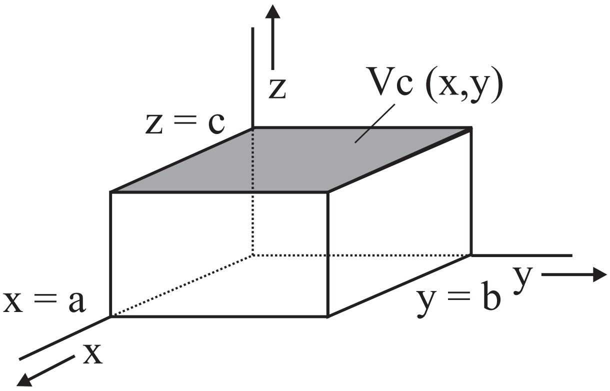


Abbildung 5.1: Quader mit Kantenlängen a, b, c.

$$k_\mathrm{x} = k_{\mathrm{x},m} = \frac{m\pi}{a} \tag{5.21}$$

und

$$k_\mathrm{y} = k_{\mathrm{y},n} = \frac{n\pi}{b} \tag{5.22}$$

mit ganzen Zahlen m, n. Für alle anderen Werte von k_x und k_y müssen die zugehörigen Koeffizienten B verschwinden. Mathematisch elegant lässt sich diese Fallunterscheidung mit z.B.

$$B_{\mathrm{k_x}} = \sum_{m=1}^{\infty} B_{x,m}\delta\left\{k_\mathrm{x} - \frac{m\pi}{a}\right\} \tag{5.23}$$

beschreiben. Die Werte $k_{\mathrm{x},m}$ und $k_{\mathrm{y},n}$ heißen **Eigenwerte** des Problems.

Da diese diskret sind, lassen sich die Integrale über k_x und k_y aus Gleichung (5.17) mit (5.23) in Summen über m und n umschreiben.

Eine partikuläre Lösung nach (5.16) nimmt für dieses Problem also die Form

$$V_{m,n} = B_\mathrm{x} B_\mathrm{y} B_\mathrm{z} \sin\left\{\frac{m\pi}{a}x\right\} \sin\left\{\frac{n\pi}{b}y\right\} \sinh\left\{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\, z\right\} \tag{5.24}$$

an. Wobei der Koeffizient B_x von m, der Koeffizient B_y von n und der Koeffizient B_z von m und n abhängt, was im weiteren durch einen entsprechenden Index deutlich gemacht wird. Da negative Werte von m und n wegen der Antisymmetrie der Sinusfunktion nichts Neues bringen, kann man $m, n > 0$ voraussetzen. Die allgemeine Lösung ist von der Form

$$V = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{\mathrm{x},m}B_{\mathrm{y},n}B_{\mathrm{z},m,n}\sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\}\sinh\left\{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\,z\right\} . \tag{5.25}$$

Sie erfüllt alle Randbedingungen außer der bei $z = c$. Dafür muss

$$V_c \stackrel{!}{=} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} B_{\mathrm{x},m}B_{\mathrm{y},n}B_{\mathrm{z},m,n}\sinh\left\{c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right\}\sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\} \tag{5.26}$$

gelten. Das ist eine Reihe mit den konstanten Koeffizienten

$$C_{m,n} = B_{\mathrm{x},m}B_{\mathrm{y},n}B_{\mathrm{z},m,n}\sinh\left\{c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right\} . \tag{5.27}$$

Während die Sinus- und Cosinusfunktionen in (5.17) zusammen ein vollständiges System von Basisfunktionen im Intervall $(-\infty, \infty)$ bilden, genügen für das hier vorliegende Intervall $[0, \pi]$ allein die Sinusfunktionen mit $m, n > 0$. Prinzipiell genügen auch die Cosinusfunktionen allein, sie erfüllen aber nicht die Randbedingungen auf den Seitenflächen des Quaders für alle Werte von z. Somit lautet der im Intervall $x \in [0, a], y \in [0, b], z \in [0, \infty)$ vollständige Lösungsansatz für das Potenzial im Quader unter Einsetzen von (5.27) in (5.25):

$$\boxed{V\{x,y,z\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\}\sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\}\frac{\sinh\left\{z\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right\}}{\sinh\left\{c\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\right\}}} \tag{5.28}$$

Zur Bestimmung der Koeffizienten $C_{m,n}$ setzen wir zunächst (5.27) in (5.26) ein,

$$V_c\{x,y,z\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\} \tag{5.29}$$

multiplizieren auf beiden Seiten mit $\sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\} \cdot \sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\}$

$$\begin{aligned} V_c\{x,y,z\} &\cdot \sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\}\sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\} \end{aligned} \tag{5.30}$$

und integrieren dann die Gleichung über die Grenzen des Quaders in x und y auf

$$\begin{aligned} &\int_0^a\int_0^b V_c\{x,y,z\} \cdot \sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^a\int_0^b \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\}\sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Jetzt benutzen wir die **Orthogonalitätsrelation**

$$\boxed{\frac{2}{a}\int_0^a \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\} \mathrm{d}x = \delta_{m,m'}\,; \quad m, m' \geq 1\,,} \tag{5.32}$$

wobei $\delta_{m,m'}$ das **Kronecker-Symbol**

$$\boxed{\delta_{m,m'} = \begin{cases} 1 & \text{für } m = m' \\ 0 & \text{für } m \neq m' \end{cases}} \tag{5.33}$$

bezeichnet. Und vereinfachen damit die rechte Seite von (5.31)

$$\frac{2}{a}\frac{2}{b}\int_0^a\int_0^b V_c\{x,y,z\} \cdot \sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\}\sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\delta_{m,m'}\delta_{n,n'} \tag{5.34}$$

Somit erhalten wir eine Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten der Reihe (5.26)

$$C_{m',n'} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_\mathrm{c}\{x,y\} \sin\left\{\frac{m'\pi x}{a}\right\} \sin\left\{\frac{n'\pi y}{b}\right\} \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \quad . \tag{5.35}$$

Setzt man nun diese Koeffizienten $C_{m',n'}$ mit $m = m'$ und $n = n'$ in die Entwicklung (5.28) ein, so bekommt man die allgemeine Lösung für diese Geometrie:

$$V\{x,y,z\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b V_\mathrm{c}\{x',y'\} \sin\left\{\frac{m\pi x'}{a}\right\} \sin\left\{\frac{n\pi y'}{b}\right\} \mathrm{d}x' \ \mathrm{d}y' \right) \cdot \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} \sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\} \frac{\sinh\left\{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\, z\right\}}{\sinh\left\{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}\, c\right\}} . \tag{5.36}$$

Diese Funktion ist offenbar Lösung der Laplacegleichung. Sie erfüllt aber auch alle Randbedingungen. Die Randbedingungen $V = 0$ auf den Randflächen außer $z = c$ werden trivialerweise erfüllt. Speziell für $z = c$ gilt

$$V\{x,y,z=c\} = \int_0^a \int_0^b V_\mathrm{c}\{x',y'\} \left(\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{m\pi x'}{a}\right\} \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} \right) \cdot \left(\frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{n\pi y'}{b}\right\} \sin\left\{\frac{n\pi y}{b}\right\} \right) \mathrm{d}x' \ \mathrm{d}y' \quad . \tag{5.37}$$

Einsetzen der

Vollständigkeitsrelation

$$\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\left\{\frac{m\pi x'}{a}\right\} \sin\left\{\frac{m\pi x}{a}\right\} = \delta\{x - x'\} \quad , \tag{5.38}$$

die im Intervall $0 \le x \le a$ gilt, in $V\{x, y, z = c\}$ aus (5.37) liefert

$$V\{x, y, z = c\} = \int\limits_0^a \int\limits_0^b V_c\{x', y'\}\,\delta\{x - x'\}\,\delta\{y - y'\}\;\mathrm{d}x'\;\mathrm{d}y' = V_c\{x, y\}\;, \tag{5.39}$$

wie ja in (5.20) gefordert war. Die Lösung des Randwertproblems ist damit eindeutig bestimmt.

Das allgemeinere Dirichlet-Problem, bei dem das Potenzial auf der gesamten Quaderoberfläche (mit $V = 0$ an den Kanten aber sonst beliebig) vorgegeben ist, lässt sich durch Superposition von sechs Lösungen des Ansatzes (5.28) mit den Koeffizienten gemäß (5.35) erledigen, wobei entsprechend der Ursprung verschoben bzw. die Koordinatenachsen vertauscht werden müssen.

5.1.2 Verallgemeinerung der Orthogonalentwicklung

In der Vektorgeometrie wird das Skalarprodukt von Vektoren verwendet, um die Koeffizienten für die Basisvektoren bei der Synthese eines beliebigen Vektors zu berechnen. Mit dem Ansatz

$$\vec{r} = r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + r_3\vec{e}_3 \tag{5.40}$$

und der für Basisvektoren geltenden Orthogonalität

$$\vec{e}_m \circ \vec{e}_n = \delta_{m,n}\,; \quad m, n \in \{1, 2, 3\} \tag{5.41}$$

lassen sich die Koeffizienten r_m aus dem Skalarprodukt

$$r_m = \vec{r} \circ \vec{e}_m\,; \quad m \in \{1, 2, 3\} \tag{5.42}$$

bestimmen. Das Skalarprodukt findet also zum einen bei der Bestimmung der Orthogonalität und zum anderen bei der Koeffizientenbestimmung Verwendung. Vorausgesetzt wurde dabei, dass das Basissystem $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ vollständig und orthonormal ist, sonst lassen sich nicht beliebige Vektoren in der oben angegebenen Weise darstellen.

Stellt man sich eine Funktion $V\{x\}$ als Vektor mit beliebig vielen Komponenten

$$\vec{r} = r_1\vec{e}_1 + r_2\vec{e}_2 + \ldots + r_\infty\vec{e}_\infty \tag{5.43}$$

vor, sollte diese Funktion mit Hilfe eines, noch zu definierenden, Skalarprodukts in Basisfunktionen $g_m\{x\}$ analog zu (5.43) zerlegbar sein

$$V\{x\} = c'_1 g_1\{x\} + c'_2 g_2\{x\} + \ldots + c'_\infty g_\infty\{x\}\,. \tag{5.44}$$

Für die konstanten Koeffizienten c'_m müsste sich dann analog zu (5.42) eine Bestimmungsgleichung herleiten lassen.

Kapitel 5.1.1 hat bereits ein Verfahren zur Entwicklung einer beliebigen Funktion $V\{x, y, z\}$ nach orthogonalen Funktionen in einem eingeschränkten Gebiet vorgestellt. Hier soll diese Methode zunächst beschränkt auf eine Dimension näher untersucht werden, um sie auf andere Fälle übertragbar zu machen und im weiteren auch auf Funktionen mehrerer Variablen zu erweitern.

Schreiben wir zunächst (5.44) in kürzerer Form

$$V\{x\} = \sum_{m=1}^{\infty} c'_m g_m\{x\}\,, \tag{5.45}$$

und vergleichen die Orthogonalitätsrelationen (5.32) und (5.41), so bietet sich folgende allgemeine Formulierung an

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} g_m\{x\} g^*_{m'}\{x\}\,\mathrm{d}x = \delta_{m,m'}\,, \tag{5.46}$$

wobei g^* wie üblich für das konjugiert Komplexe von g steht, weil im allgemeinen auch komplexe Funktionen zugelassen werden müssen. In (5.32) waren nur reelle Werte zugelassen.

Damit dies möglich ist, müssen die $g_m\{x\}$ im Intervall $[x_1, x_2]$ mindestens quadratintegrabel sein. Es bleibt jedoch die Frage, ob die Entwicklungsreihe nach (5.45) auch tatsächlich konvergiert. Um dies zu untersuchen definieren wir nach (5.45) zunächst

$$V_N\{x\} = \sum_{m=1}^{N} c'_m g_m\{x\}\,. \tag{5.47}$$

Konvergenz bedeutet dann, dass die Fläche S_ϵ zwischen den Kurven von $V_N\{x\}$ und $V\{x\}$ einen minimalen Wert annimmt. Mathematisch heißt das

$$S_\epsilon = \int_{x_1}^{x_2} |V\{x\} - V_N\{x\}|^2 \,\mathrm{d}x \to \text{Minimum}\,. \tag{5.48}$$

Genaugenommen wollen wir sogar, dass die obige Differenz für $N \to \infty$ im Minimum zu Null wird, also gelten soll

$$\lim_{N\to\infty} S_\epsilon = \lim_{N\to\infty} \int_{x_1}^{x_2} |V\{x\} - V_N\{x\}|^2 \,\mathrm{d}x = 0\,. \tag{5.49}$$

Wir setzen (5.47) in die linke Seite von (5.48) ein und erhalten

$$\begin{aligned} S_\epsilon = & \int_{x_1}^{x_2} \left(V\{x\} - \sum_{m=1}^{N} c'_m g_m\{x\}\right)\left(V^*\{x\} - \sum_{m'=1}^{N} {c'_{m'}}^* g^*_{m'}\{x\}\right) \mathrm{d}x \\ = & \int_{x_1}^{x_2} V\{x\}V^*\{x\}\,\mathrm{d}x - \sum_{m=1}^{N} c'_m \int_{x_1}^{x_2} g_m\{x\}V^*\{x\}\,\mathrm{d}x - \sum_{m'=1}^{N} {c'_{m'}}^* \int_{x_1}^{x_2} g^*_{m'}\{x\}V\{x\}\,\mathrm{d}x \\ & + \underbrace{\sum_{m=1}^{N}\sum_{m'=1}^{N} c'_m {c'_{m'}}^* \underbrace{\int_{x_1}^{x_2} g_m\{x\} g_{m'}\{x\}\,\mathrm{d}x}_{=\delta_{m,m'}}}_{\Rightarrow \sum_{m=1}^{N} c'_m {c'_m}^*} \end{aligned} \tag{5.50}$$

Um das gesuchte Minimum zu finden leiten wir (5.50) zunächst nach einem beliebigen Koeffizienten c'_{m_0} und dessen konjugiertkomplexem ${c'_{m_0}}^*$ ab

$$
\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial}{\partial c'_m}\right|_{m=m_0} : \\
&\qquad -\int\limits_{x_1}^{x_2} g_{m_0}\{x\} V^*\{x\}\,\mathrm{d}x + {c'_{m_0}}^* \qquad (5.51)\\
&\left.\frac{\partial}{\partial {c'_m}^*}\right|_{m=m_0} : \\
&\qquad -\int\limits_{x_1}^{x_2} g^*_{m_0}\{x\} V\{x\}\,\mathrm{d}x + c'_{m_0}\,. \qquad (5.52)
\end{aligned}
$$

Nullsetzen der beiden Gleichungen liefert Bestimmungsgleichungen für jeden beliebigen Koeffizienten $c'_{m=m_0}$ und dessen konjugiertkomplexes

$$
{c'_m}^* = \int\limits_{x_1}^{x_2} g_m\{x\} V^*\{x\}\,\mathrm{d}x \tag{5.53}
$$

$$
c'_m = \int\limits_{x_1}^{x_2} g^*_m\{x\} V\{x\}\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.54}
$$

Dies ist das Analogon zu (5.42), welches wir oben gesucht hatten. Außerdem rechtfertigt dieses Ergebnis das Vorgehen im Spezialfall des quaderförmigen Gebietes, wo wir zur Bestimmung der Koeffizienten (5.31) durch Aufintegrieren von (5.30) erhalten hatten. Setzen wir (5.54) in (5.45) ein,

$$
\begin{aligned}
V\{x\} &= \sum_{m=1}^{\infty} c'_m g_m\{x\} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{x_1}^{x_2} g^*_m\{x'\} V\{x'\}\,\mathrm{d}x' g_m\{x\} && (5.55)\\
&= \int\limits_{x_1}^{x_2} V\{x'\} \sum_{m=1}^{\infty} g^*_m\{x'\} g_m\{x\}\,\mathrm{d}x' && (5.56)
\end{aligned}
$$

so folgt die Forderung nach der Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m^*\{x'\}g_m\{x\} \stackrel{!}{=} \delta\{x-x'\} \tag{5.57}$$

da sonst (5.56) nicht erfüllt werden kann. Unter den obigen Voraussetzungen handelt es sich bei den Funktionen g_m um ein vollständiges Orthonormalsystem von Basisfunktionen, wie es zur Entwicklung beliebiger Funktionen $V\{x\}$ erforderlich ist.

Im allgemeinen findet man bei der Lösung der Laplacegleichung nicht gleich orthonormale Funktionen. Zum Beispiel sind $\sin\{mx\}$ und $\cos\{mx\}$, wie sie bei der Lösung in kartesischen Koordinaten resultieren, wohl orthogonal, nicht jedoch normiert. Außerdem können, wie im kartesischen Fall auch sichtbar wird, durchaus zwei verschiedene Lösungen $f_{1,m} = \sin\{mx\}$ und $f_{2,m} = \cos\{mx\}$ der Laplacegleichung existieren. Damit diese Lösungen als Ansatz zur Entwicklung von Funktionen verwendet werden können, schreibt man die orthonormalen Funktionen g_m um in

$$g_m\{x\} = w_{1,m}\{x\}f_{1,m}\{x\} + w_{2,m}\{x\}f_{2,m}\{x\} = \sum_{j=1}^{2} w_{j,m}\{x\}\cdot f_{j,m}\{x\} \quad , \tag{5.58}$$

wobei die $f_{j,m}\{x\}$ die Lösungen der Laplacegleichung und $w_{j,m}\{x\}$ die zugehörigen Gewichte darstellen, die erforderlich sind, um Orthonormalität der $g_m\{x\}$ herzustellen. Als neuer Ansatz zur Darstellung der Funktion $V\{x\}$ wird nun

$$V\{x\} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{1,m}f_{1,m}\{x\} + c_{2,m}f_{2,m}\{x\}\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c_{j,m}f_{j,m}\{x\} \tag{5.59}$$

herangezogen. Hier wird vorausgesetzt, dass

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} f_{j,m}\{x\}w_{l,n}\{x\}\cdot w_{l,n}^*\{x\}f_{l,n}^*\{x\}\,\mathrm{d}x &= \\ \int_{x_1}^{x_2} f_{j,m}\{x\}|w_{l,n}\{x\}|^2 f_{l,n}^*\{x\}\,\mathrm{d}x &= \delta_{j,l}\cdot\delta_{m,n} \end{aligned} \tag{5.60}$$

gilt, was im einzelnen für die Lösungsfunktionen der Laplacegleichung überprüft werden muss. Die Bestimmung der Koeffizienten $c_{j,m}$ in (5.59) erfolgt wieder durch Multiplikation beider Seiten der Gleichung mit $|w_{j,n}\{x\}|^2 \cdot f_{j,n}^*\{x\}$ und anschließender Integration. Wegen der Orthonormalität reduziert sich die rechte Seite nach Ausführung der Integration auf den Koeffizienten $c_{l,m}$, wie im folgenden nochmals ausführlich gezeigt wird:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{x_1}^{x_2} \left(|w_{j,n}\{x\}|^2 f_{j,n}^*\{x\}\right) \cdot \overbrace{\sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{1,m} f_{1,m}\{x\} + c_{2,m} f_{2,m}\{x\}\right)}^{(5.59)} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \int\limits_{x_1}^{x_2} c_{1,m} f_{1,m}\{x\} |w_{j,n}\{x\}|^2 f_{j,n}^*\{x\} + c_{2,m} f_{2,m}\{x\} |w_{j,n}\{x\}|^2 f_{j,n}^*\{x\} \,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \left(c_{1,m}\delta_{1,j}\delta_{m,n} + c_{2,m}\delta_{2,j}\delta_{m,n}\right) = c_{j,m} \quad .
\end{aligned}
\tag{5.61}
$$

Einsetzen führt auf die Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten

$$
c_{j,m} = \int\limits_{x_1}^{x_2} V\{x\} |w_{j,m}\{x\}|^2 f_{j,m}^*\{x\} \,\mathrm{d}x \quad . \tag{5.62}
$$

Somit ergibt sich als allgemeiner Lösungsansatz

$$
\boxed{V\{x\} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2} \int\limits_{x_1}^{x_2} V\{x'\} |w_{j,m}\{x'\}|^2 f_{j,m}^*\{x'\} \,\mathrm{d}x' \cdot f_{j,m}\{x\}} \tag{5.63}
$$

5.1.2.1 Spezialfall: Fourierentwicklung

Der wohl bekannteste Spezialfall der Orthogonalentwicklung von allgemeinen Funktionen nach Basisfunktionen ist die **Fourierentwicklung**. Durch Anpassen der Basisfunktionen und der Gewichtsfaktoren

$$
\begin{array}{llll}
f_{1,m}\{x\} = \cos\{mx\} & w_{1,m} = \sqrt{\frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi}} & & m \geq 0 \\
f_{2,n}\{x\} = \sin\{nx\} & w_{2,n} = \sqrt{\frac{2-\delta_{n,0}}{2\pi}} = \sqrt{\frac{1}{\pi}} & & n > 0
\end{array}
$$

sowie der Integrationsgrenzen

$$x_1 = 0\,, \qquad x_2 = 2\pi \tag{5.64}$$

und anschließende Variablensubstitution

$$x = 2\pi\nu t = 2\pi\frac{t}{T} \tag{5.65}$$

erhält man die bekannte Darstellung zur Berechnung der Spektralkomponenten

$$
\begin{aligned}
c_{1,m} &= \int_{x_1}^{x_2} V\{x\} |w_{1,m}|^2 f^*_{1,m}\{x\}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{2\pi} V\{x\} \frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi} \cos\{mx\}\;\mathrm{d}x \\
&= \frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi} \int_0^T V\{t\} \cos\{m2\pi\nu t\}\, 2\pi\nu\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{2-\delta_{m,0}}{T} \int_0^T V\{t\} \cos\{m2\pi\nu t\}\;\mathrm{d}t
\end{aligned} \tag{5.66}
$$

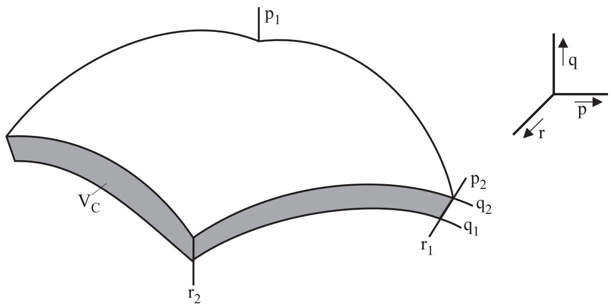
und entsprechend

$$c_{2,n} = \frac{2}{T}\int_0^T V\{t\} \sin\{n2\pi\nu t\}\;\mathrm{d}t \quad . \tag{5.67}$$

5.1.3 Allgemeine dreidimensionale Orthogonalentwicklung

In Abschnitt 5.1.2 wurde eine allgemeine eindimensionale Entwicklung vorgestellt. Tatsächlich treten, wie in Abschnitt 5.1.1, fast immer mehrdimensionale Probleme auf.

Abbildung 5.2: Orthogonalentwicklung an einem beliebig geformten Körper. Das Koordinatensystem wurde so gewählt, dass die Körperoberflächen mit Koordinatenflächen zusammenfallen.



Beispielhaft soll ein allgemeines (p, q, r)-Koordinatensystem angenommen werden. Wir verwenden hier absichtlich nicht die Koordinaten (x, y, z), um die Allgemeinheit der vorgestellten Idee deutlich zu machen. Wie in Abbildung 5.2 gezeigt, sei ein beliebiger Körper durch die sechs Koordinatenflächen $r \in \{r_1; r_2\}$, $p \in \{p_1; p_2\}$ und $q \in \{q_1; q_2\}$ begrenzt. Auf den Oberflächen des Körpers gelte

$$V\{p, q, r\} = \begin{cases} 0 & \text{für } r = r_1 \text{ oder } p \in \{p_1; p_2\} \text{ oder } q \in \{q_1; q_2\} \\ V_c\{p, q\} & \text{für } r = r_2 \quad . \end{cases} \tag{5.68}$$

Analog zu Abschnitt 5.1.1 wird zur Lösung der Laplacegleichung

$$\Delta V = \frac{\partial^2}{\partial p^2}V + \frac{\partial^2}{\partial q^2}V + \frac{\partial^2}{\partial r^2}V = 0 \tag{5.69}$$

ein Produktansatz

$$V\{p, q, r\} = \mathcal{P}\{p\}\ \mathcal{Q}\{q\}\ \mathcal{R}\{r\} \tag{5.70}$$

verwendet. Auf Grund der analogen Randbedingungen wie im kartesischen Beispiel wird es auch in diesem Fall zwei Sätze diskreter Eigenwerte des Problems geben, die wie zuvor durch die Indizes m und n beschrieben werden. Somit ist durch

$$V_{m,n}\{p, q, r\} = \mathcal{P}_{m,n}\{p\}\ \mathcal{Q}_{m,n}\{q\}\ \mathcal{R}_{m,n}\{r\} \tag{5.71}$$

eine partikuläre Lösung des Problems gegeben. Nun soll jede der Funktionen $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ und $\mathcal{R}$ in ein geeignetes orthonormales Funktionensystem entwickelt werden, wobei die partikulären

Lösungen als Grundlage dienen. Um die Übersichtlichkeit etwas zu erhöhen, behandeln wir zunächst nur die Funktion $\mathcal{P}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left\{p\right\} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c'_{m,n}\mathcal{P}_{m,n}\left\{p\right\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c'_{m,n}\left(w^{\mathcal{P}}_{1,m,n}\cdot f^{\mathcal{P}}_{1,m,n}\left\{p\right\} + w^{\mathcal{P}}_{2,m,n}\cdot f^{\mathcal{P}}_{2,m,n}\left\{p\right\}\right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2} c^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\cdot f^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\left\{p\right\} \end{aligned} \tag{5.72}$$

Wobei die Basisfunktionen f und ihre Gewichte w unten mit den Eingenwertindizes und rechts oben mit ihrem Funktionsindex bezeichnet sind, da wir für alle drei Funktionen jeweils ein eigenes Orthonormalsystem wählen können sollten. Auch die c' sind für alle drei Funktionen unterschiedlich, der Index wurde der Übersichtlichkeit halber jedoch weggelassen. Wir verfahren genauso mit den anderen Lösungen

$$\mathcal{Q}_{m,n}\left\{q\right\} = w^{\mathcal{Q}}_{1,m,n}\cdot f^{\mathcal{Q}}_{1,m,n}\left\{q\right\} + w^{\mathcal{Q}}_{2,m,n}\cdot f^{\mathcal{Q}}_{2,m,n}\left\{q\right\} = \sum_{\ell=1}^{2} c^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\cdot f^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\left\{q\right\} \tag{5.73}$$

$$\mathcal{R}_{m,n}\left\{r\right\} = w^{\mathcal{R}}_{1,m,n}\cdot f^{\mathcal{R}}_{1,m,n}\left\{r\right\} + w^{\mathcal{R}}_{2,m,n}\cdot f^{\mathcal{R}}_{2,m,n}\left\{r\right\} = \sum_{h=1}^{2} c^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\cdot f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\left\{r\right\} \tag{5.74}$$

und erhalten als vollständigen Lösungsansatz:

$$\boxed{\begin{aligned} V\left\{p,q,r\right\} &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} c^{\mathcal{P}}_{j,m,n}f^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\left\{p\right\} c^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}f^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\left\{q\right\} c^{\mathcal{R}}_{h,m,n}f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\left\{r\right\} \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} C_{j,\ell,h,m,n}f^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\left\{p\right\} f^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\left\{q\right\} f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\left\{r\right\}\ . \end{aligned}} \tag{5.75}$$

Wobei wir für alle einzelnen f_j die Orthogonalitätsrelationen

$$\int_{x_1}^{x_2} f_{j,m',n}\{x\}|w_{j,m,n}\{x\}|^2 f^{*}_{j,m,n}\{x\}\,\mathrm{d}x = \delta_{m,m'} \tag{5.76}$$

im entsprechenden Variablenraum, sowie die Vollstängigkeitsrelationen

$$\sum_{m=1}^{\infty} f_{j,m,n}\{x'\}|w_{j,m,n}\{x\}|^2 f^*_{j,m,n}\{x\} = \delta\{x - x'\} \tag{5.77}$$

voraussetzen. Unter dieser Bedingung lassen sich die Koeffizienten wieder durch Multiplikation und Integration bestimmen:

$$\boxed{\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} C_{j,\ell,h,m,n} = \qquad (5.78)\\ &\quad\int\limits_{p_1}^{p_2}\int\limits_{q_1}^{q_2}\int\limits_{r_1}^{r_2} V\{p,q,r\} \quad |w^{\mathcal{P}}_{j,m,n}|^2 |w^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}|^2 |w^{\mathcal{R}}_{h,m,n}|^2 f^{*\mathcal{P}}_{j,m,n}\{p\}\, f^{*\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\{q\}\, f^{*\mathcal{R}}_{h,m,n}\{r\}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p\end{aligned}}$$

Wir ersparen uns das Einsetzen und weisen noch darauf hin, dass die Gewichte w selbstverständlich von der jeweiligen Koordinate abhängen können.

Dieser allgemeinste Ansatz kommt fast nie zur Anwendung! Wir wollen im weiteren davon ausgehen, dass, wie in Abbildung 5.2, die Randbedingungen stets auf Flächen vorgegeben sind, für die eine Koordinate konstant ist. Um (5.78) weiter zu vereinfachen schreiben wir die Randbedingung aus (5.68) als

$$V\{p,q,r\} = V_c\{p,q\}\delta\{r - r_2\} \quad \text{für} \quad p \in \{p_1; p_2\} \quad \text{und} \quad q \in \{q_1; q_2\}\,. \tag{5.79}$$

Einsetzen in (5.78) lässt das Integral über r in sich zusammenfallen und es bleibt

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} C_{j,\ell,h,m,n} = \qquad (5.80)\\ &\quad\int\limits_{p_1}^{p_2}\int\limits_{q_1}^{q_2} V_c\{p,q\} \quad |w^{\mathcal{P}}_{j,m,n}|^2 |w^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}|^2 f^{*\mathcal{P}}_{j,m,n}\{p\}\, f^{*\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\{q\}\, f^{*\mathcal{R}}_{h,m,n}\{r_2\}\,\mathrm{d}q\,\mathrm{d}p\end{aligned}$$

übrig. Wir hätten auch die Randbedingung aus (5.68) in (5.75) einsetzen können und daraus die Bedingung

$$V_{\mathrm{c}}\{p,q\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} C_{j,\ell,h,m,n} f^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\{p\} f^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\{q\} f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\{r_2\} \quad . \tag{5.81}$$

erhalten. Durch die Abkürzung

$$C'_{j,\ell,h,m,n} = C_{j,\ell,h,m,n} \cdot f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\{r_2\} \tag{5.82}$$

lässt sich nun das Potenzial in der Form

$$V\{p,q,r\} = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\sum_{\ell=1}^{2}\sum_{h=1}^{2} C'_{j,\ell,h,m,n} f^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\{p\} f^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\{q\} \frac{f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\{r\}}{f^{\mathcal{R}}_{h,m,n}\{r_2\}} \tag{5.83}$$

darstellen. Wir benutzen (5.81) und (5.82) um mit den Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen die Koeffizienten $C'_{j,\ell,h,m,n}$ zu bestimmen

$$\begin{aligned}\sum_{h=1}^{2} C'_{j,\ell,h,m,n} &= C'_{j,\ell,1,m,n} + C'_{j,\ell,2,m,n} \\ &= \int_{p_1}^{p_2}\int_{q_1}^{q_2} V_{\mathrm{c}}\{p,q\} \cdot |w^{\mathcal{P}}_{j,m,n}\{p\}|^2 |w^{\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\{q\}|^2 \cdot f^{*\mathcal{P}}_{j,m,n}\{p\} f^{*\mathcal{Q}}_{\ell,m,n}\{q\}\, \mathrm{d}q\, \mathrm{d}p\,.\end{aligned} \tag{5.84}$$

Aus der Randbedingung $V\{p,q,r=0\} = 0$ wird eine zweite Bestimmungsgleichung für die Koeffizienten

$$C'_{j,\ell,1,m,n} \cdot \frac{f^{\mathcal{R}}_{1,m,n}\{0\}}{f^{\mathcal{R}}_{1,m,n}\{r_2\}} + C'_{j,\ell,2,m,n} \cdot \frac{f^{\mathcal{R}}_{2,m,n}\{0\}}{f^{\mathcal{R}}_{2,m,n}\{r_2\}} = 0 \tag{5.85}$$

hergeleitet.

Es lässt sich nach dem gesagten eine Art “Kochrezept“ für das Lösen der Laplacegleichung angeben:

1. Geeignetes Koordinatensystem wählen, welches den Randbedingungen angepasst ist.
2. Basisfunktionen finden, welche die Laplacegleichung lösen. Dies kann, wie bereits für kartesische Koordinaten gezeigt, z.B. durch einen Produktansatz geschehen und soll im weiteren auch für andere Koordinatensysteme durchgeführt werden.

3. Nachweis der Orthonormalität der gefundenen Funktionen.

4. Nachweis der Vollständigkeit der gefundenen Funktionen.

5. Bestimmung der Koeffizienten aus den Randbedingungen.

Die Schritte 2 bis 4 können meist durch Nachschlagen in der Literatur bewältigt werden. Angemerkt sei noch, dass einzelne Funktionen f den Wert Null annehmen können, wenn man das Koordinatensystem geschickt wählt, wie wir ja bereits bei den kartesischen Koordinaten gesehen haben.

5.1.3.1 Kartesische Koordinaten: Quaderförmiges Gebiet

Wir wollen den vorgestellten allgemeinen Produktansatz

$$V\left\{p,q,r\right\} = \mathcal{P}\left\{p\right\} \cdot \mathcal{Q}\left\{q\right\} \cdot \mathcal{R}\left\{r\right\} \tag{5.86}$$

mit

$$\mathcal{P}\left\{p\right\} = w^{\mathcal{P}}_{1,m,n} \cdot f^{\mathcal{P}}_{1,m,n}\left\{p\right\} + w^{\mathcal{P}}_{2,m,n} \cdot f^{\mathcal{P}}_{2,m,n}\left\{p\right\} \tag{5.87}$$

$$\mathcal{Q}\left\{q\right\} = w^{\mathcal{Q}}_{1,m,n} \cdot f^{\mathcal{Q}}_{1,m,n}\left\{q\right\} + w^{\mathcal{Q}}_{2,m,n} \cdot f^{\mathcal{Q}}_{2,m,n}\left\{q\right\} \tag{5.88}$$

$$\mathcal{R}\left\{r\right\} = w^{\mathcal{R}}_{1,m,n} \cdot f^{\mathcal{R}}_{1,m,n}\left\{r\right\} + w^{\mathcal{R}}_{2,m,n} \cdot f^{\mathcal{R}}_{2,m,n}\left\{r\right\} \tag{5.89}$$

auf den in Abschnitt 5.1.1 behandelten Fall der kartesischen Koordinaten übertragen. Dazu benutzen wir die folgenden Variablenzuodnungen:

$$\left.\begin{array}{rlrl} p = & x\,; & \mathcal{P} = & X \\ q = & y\,; & \mathcal{Q} = & Y \\ r = & z\,; & \mathcal{R} = & Z \end{array}\right\} \tag{5.90}$$

Für das Potenzial im inneren eines Quaders, der das Gebiet

$$x - x' \in [0, x_0] ,$$
$$y - y' \in [0, y_0] ,$$
$$z - z' \in [0, z_0]$$

umschließt, lassen sich die Lösungen aus Tabelle 5.1.1 zusammensetzen, falls das Potenzial auf der Quaderoberfläche bei $z = z_0$ beliebig vorgegeben und auf den anderen Quaderflächen Null ist. Dies kann durch geeignete Wahl des Koordinatensystems stets erreicht werden.

Tabelle 5.1.1: Lösung der Laplacegleichung in einem quaderförmigen Gebiet.

	$f_{1,m,n}$	$w_{1,m,n}$	$f_{2,m,n}$	$w_{2,m,n}$	p_1	p_2	Bem.
$\mathcal{P}$	-	-	$\sin\left\{m\pi\frac{x-x'}{x_0}\right\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{m,0}}{x_0}}$	x'	$x' + x_0$	$m \geq 0$
$\mathcal{Q}$	-	-	$\sin\left\{n\pi\frac{y-y'}{y_0}\right\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{n,0}}{y_0}}$	y'	$y' + y_0$	$n \geq 0$
$\mathcal{R}$	$\cosh\{k_\text{z} \cdot (z - z')\}$	-	$\sinh\{k_\text{z} \cdot (z + z')\}$	-	-	-	-

Dabei ist k_z festgelegt durch

$$k_\text{z}^2 = \left(\frac{m\pi}{x_0}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{y_0}\right)^2 . \tag{5.91}$$

Wir hatten in Abschnitt 5.1.1.2 diesen Fall bereits für $(x', y', z') = (0, 0, 0)$ und $x_0 = a$, $y_0 = b$, $z_0 = c$ behandelt.

5.1.4 Lösung der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten

In Zylinderkoordinaten soll die Radialkomponente mit ρ bezeichnet werden. Es gilt hier $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ wohingegen der allgemeine Radius r, wie er auch in Polarkoordinaten benutzt werden wird, als $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ definiert ist.

Die vollständige **Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten**

$$\Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V\right) + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V = 0 \tag{5.92}$$

wird durch den **Produktansatz**

$$V\{\rho,\phi,z\} = R\{\rho\}\ \Phi\{\phi\}\ Z\{z\} \tag{5.93}$$

analog zu dem in 5.1.1 für kartesischen Koordinaten vorgestellten Weg gelöst. Einsetzen liefert nach Division durch $R\Phi Z$

$$\frac{1}{R\{\rho\}}\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}R\{\rho\}\right) + \frac{1}{\rho^2\Phi\{\phi\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2}\Phi\{\phi\} + \frac{1}{Z\{z\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Z\{z\} = 0 \quad . \tag{5.94}$$

Die ersten beiden Glieder hängen nur von ρ und ϕ ab, der letzte Term nur von z. Deshalb kann man die Terme separieren und schreiben:

$$\frac{1}{Z\{z\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}Z\{z\} = -{k'_\mathrm{z}}^2 \quad . \tag{5.95}$$

Dies ist die bereits aus Abschnitt (5.1.1) bekannte DGL (5.6). Dabei muss k'_z im allgemeinen als komplexwertig angenommen werden. Die allgemeine Lösung lautet

$$Z = \begin{cases} A_\mathrm{z}\cosh\{k_\mathrm{z}z\} + B_\mathrm{z}\sinh\{k_\mathrm{z}z\} & \text{für } k'_\mathrm{z} \text{ imaginär mit } k_\mathrm{z} = ik'_\mathrm{z} \\ A'_\mathrm{z}\cos\{k'_\mathrm{z}z\} + B'_\mathrm{z}\sin\{k'_\mathrm{z}z\} & \text{für } k'_\mathrm{z} \text{ reell} \quad . \end{cases} \tag{5.96}$$

Im weiteren wird hier nur noch der erste Fall k'_z imaginär betrachtet, der dann relevant ist, wenn die Potenzialverteilung auf Boden oder Deckel eines Kreiszylinders mit geerdetem Mantel bekannt ist. Dieser Fall ist in Abbildung 5.4 dargestellt. Ist das Potenzial auf dem Mantel bei geerdetem Boden und Deckel vorgegeben, müssen Lösungen der Laplacegleichung für den zweiten Fall gesucht werden. Formal kann aber die im weiteren vorgestellte Lösung verwendet werden, wenn k_z durch ik_z ersetzt wird.

Einsetzen von (5.95) in (5.94) liefert mit $k_\mathrm{z} = ik'_\mathrm{z}$ und nach Multiplikation mit ρ^2

$$\frac{\rho}{R\left\{\rho\right\}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} R\left\{\rho\right\}\right) + k_\mathrm{z}^2 \rho^2 + \frac{1}{\Phi\left\{\phi\right\}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} \Phi\left\{\phi\right\} = 0 \quad . \tag{5.97}$$

Man kann nun den dritten Term separieren und setzt

$$\frac{1}{\Phi\left\{\phi\right\}} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\phi^2} \Phi\left\{\phi\right\} = -m^2 \quad . \tag{5.98}$$

Die allgemeine Lösung dieser harmonischen Differentialgleichung ist ebenfalls bereits bekannt

$$\Phi\left\{\phi\right\} = A_\phi \cos\left\{m\phi\right\} + B_\phi \sin\left\{m\phi\right\} \tag{5.99}$$

führt aber hier nur dann zu eindeutigen Potenzialen $V\left\{\vec{r}\right\}$, wenn m eine ganze Zahl ist. Für $R\left\{\rho\right\}$ ergibt sich nach Einsetzen von (5.98) in (5.97) und Dividieren durch ρ^2 die Gleichung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\rho^2} R\{\rho\} + \frac{1}{\rho} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho} R\{\rho\} + \left(k_\mathrm{z}^2 - \frac{m^2}{\rho^2}\right) R\{\rho\} = 0 \quad . \tag{5.100}$$

Dies ist die **Besselsche Differentialgleichung** . Man bringt sie durch Variablentransformation $x = k_\mathrm{z}\rho$ in die Standardform

$$\boxed{\frac{d^2}{dx^2} R_x\{x\} + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} R_x\{x\} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R_x\{x\} = 0 \quad . \qquad (5.101)}$$

Mit

$$\boxed{\mathrm{J}_m\left\{x\right\} = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma\left\{j+m+1\right\}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad . \qquad (5.102)}$$

definiert man die **Besselfunktion erster Art** der Ordnung m. Dabei ist die Gammafunktion als das Eulersche Integral zweiter Gattung

$$\Gamma\{p\} = \int_0^\infty e^{-t} \cdot t^{p-1}\,\mathrm{d}t \tag{5.103}$$

definiert. Sie stellt die Erweiterung der Fakultät $p!$ auf beliebige, auch komplexe, Zahlen p dar. Für nichtganzzahlige m sind $\mathrm{J}_m\{x\}$ und $\mathrm{J}_{-m}\{x\}$ zwei linear unabhängige Lösungen von (5.101).

An dieser Stelle soll nicht auf den Lösungsweg für die Besselsche Differentialgleichung eingegangen werden. Er wird in Anhang F.1.3 dargestellt und ist auch in der einschlägigen Literatur oft zu finden. Hier werden die Lösungen als bekannt vorausgesetzt und nur ihre Eigenschaften soweit notwendig diskutiert.

Wir sind wegen $m \in \mathbb{N}$ nur an Besselfunktionen ganzzahliger Ordnung interessiert. Eine zweite linear unabhängige Lösung erhält man durch

$$\boxed{\mathrm{N}_m\{x\} = \lim_{\alpha \to m} \frac{\mathrm{J}_\alpha\{x\}\cos\{\alpha\pi\} - \mathrm{J}_{-\alpha}\{x\}}{\sin\{\alpha\pi\}} \quad .} \tag{5.104}$$

$\mathrm{N}_m\{x\}$ heißt **Neumannfunktion** oder **Besselfunktion zweiter Art** der Ordnung m. Auch auf ihre Entstehung soll hier nicht näher eingegangen werden. Bessel- und Neumannfunktionen niedriger Ordnung sind in Abbildung 5.3 dargestellt. Dazu ist zu sagen, dass die Neumannfunktion alle bei Null divergieren, während für $\mathrm{J}_m\{0\} = 0$ gilt, falls $m > 0$.

Die Lösung der Besselschen Differentialgleichung lautet demnach

$$R\{\rho\} = A_\rho\,\mathrm{J}_m\{k_z\rho\} + B_\rho\,\mathrm{N}_m\{k_z\rho\} \ . \tag{5.105}$$

Dieses Ergebnis ist durchaus überraschend, denn es gibt offenbar kein unabhängiges k_ρ. Stattdessen steht in der Radialabhängigkeit ein k_z. Dies hat im weiteren Auswirkungen, wenn wir Randbedingungen in radialer Richtung einführen.

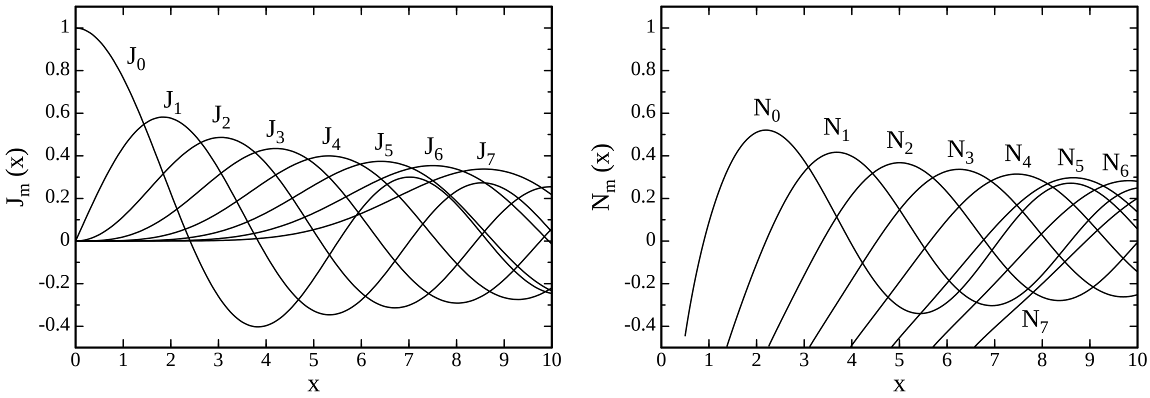


Abbildung 5.3: Bessel- und Neumannfunktionen niedriger Ordnung

Nach dem Gesagten ist

$$
\begin{aligned}
V\{\rho,\phi,z\} = \quad & \left(A_\rho \, \mathrm{J}_m\{k_\mathrm{z}\rho\} + B_\rho \, \mathrm{N}_m\{k_\mathrm{z}\rho\}\right) \\
& \cdot \left(A_\phi \cos\{m\phi\} + B_\phi \sin\{m\phi\}\right) \\
& \cdot \left(A_\mathrm{z} \cosh\{k_\mathrm{z} z\} + B_\mathrm{z} \sinh\{k_\mathrm{z} z\}\right)
\end{aligned}
\tag{5.106}
$$

mit Konstanten $A_\mathrm{z}, B_\mathrm{z}, A_\phi, B_\phi, A_\rho, B_\rho$ und ganzzahligem m eine partikuläre Lösung der Laplacegleichung (5.92). Dies ist unter den genannten Randbedingungen die allgemeinste separierbare Lösung in Zylinderkoordinaten. Aber es gibt noch weitere Lösungen, die nicht separierbar sind, zum Beispiel die Summe von zwei Lösungen der Form (5.106). Somit ist wie in Abschnitt 5.1.1 auch die Summe über alle Werte von k_z eine Lösung der Laplacegleichung. Wegen des kontinuierlichen Charakters von k_z muss auch hier wieder die Integraldarstellung

$$
\boxed{
\begin{aligned}
V = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \quad & \left(A_\rho \, \mathrm{J}_m\{k_\mathrm{z}\rho\} \quad + B_\rho \, \mathrm{N}_m\{k_\mathrm{z}\rho\}\right) \\
& \cdot \left(A_\phi \cos\{m\phi\} \quad + B_\phi \sin\{m\phi\}\right) \\
& \cdot \left(A_z \cosh\{k_\mathrm{z} z\} \quad + B_z \sinh\{k_\mathrm{z} z\}\right) \, \mathrm{d}k_\mathrm{z}
\end{aligned}
\qquad (5.107)
}
$$

herangezogen werden. Wobei die Konstanten alle von beiden Koeffizienten m und k_z abhängen können! Sie müssen aus den Randbedingungen bestimmt werden.

5.1.4.1 Orthogonalentwicklung bei zwei- und eindimensionalen zylindrischen Problemen

Fällt eine der Abhängigkeiten aus Symmetriegründen weg, reduziert sich, wie bereits im kartesischen Fall angemerkt, die Darstellung von einem drei- auf ein zweidimensionales Problem.

So wird z.B. bei Rotationssymmetrie $\Phi = 1$ und damit $m = 0$.

Im eindimensionalen Fall, z.B. bei Zylindersymmetrie, kann $\Delta V = 0$ durch integrieren gelöst werden. Es genügt schon die Bedingung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} Z = 0 \tag{5.108}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \Phi = 0 \tag{5.109}$$

mit den homogenen Lösungen

$$Z = d_1 z + d_2 \tag{5.110}$$

$$\Phi = d_3 \phi + d_4 \tag{5.111}$$

die sich im Fall der Zylindersymmetrie auf $Z = d_2$ und $\Phi = d_4$ reduzieren. Für die radiale Abhängigkeit bleibt $\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} R\right) = 0$ mit der homogenen Lösung

$$R = d_5 \ln\left\{\frac{\rho}{\rho_0}\right\} + d_6 \tag{5.112}$$

Ist das Problem von z unabhängig, wird $Z = 1$ gesetzt und es resultiert $k_z = 0$.

5.1.4.2 Spezialfall: Zylindrischer Bereich

Wir untersuchen nach Abbildung 5.4 die Potenzialverteilung in einem Zylinder, in dem keine Raumladungen vorhanden sind. Als Randbedingung ist das Potenzial auf der Boden- und Mantelfläche zu Null vorgegeben, und auf der Deckelfläche sei das Potenzial durch

$$V\left\{\rho,\phi,z=h\right\}=V_h\left\{\rho,\phi\right\} \tag{5.113}$$

bestimmt. Es handelt sich um das zylindrische Analogon zum Problem des Quaders in Abschnitt 5.1.1.2.

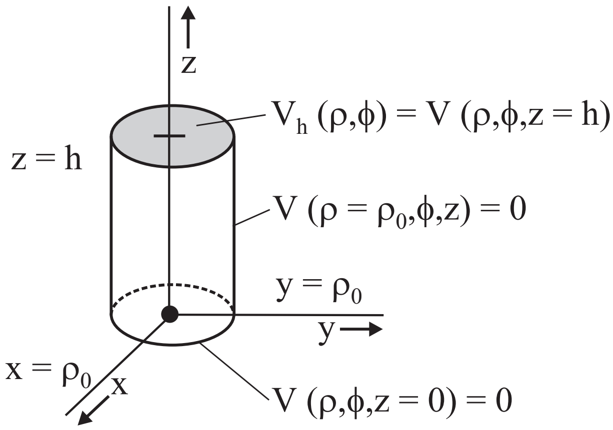


Abbildung 5.4: Zur Berechnung des Potenzials in einem zylindrischen Bereich.

Die allgemeine Lösung (5.107) der Laplacegleichung lässt sich für diesen Fall vereinfachen. Zum ersten kann der $\cosh$ die Randbedingung auf dem Boden $V\left\{0\leq\rho<\rho_0,\phi,z=0\right\}=0$ nicht erfüllen. Zum anderen können wir die Neumann-Funktionen als Lösungen ausschließen, da diese bei $\rho=0$ divergieren. Damit bleibt der Lösungsansatz

$$\begin{aligned}V\{\rho,\phi,z\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} & A_\rho\,\mathrm{J}_m\left\{k_z\rho\right\}\left(A_\phi\cos\left\{m\phi\right\}+B_\phi\sin\left\{m\phi\right\}\right)\\ & \cdot B_z\sinh\left\{k_z z\right\}\,\mathrm{d}k_z\,.\end{aligned} \tag{5.114}$$

Weiterhin muss auf dem Zylinderdeckel gelten

$$\begin{aligned}V\{\rho,\phi,z=h\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} & A_\rho\,\mathrm{J}_m\left\{k_z\rho\right\}\left(A_\phi\cos\left\{m\phi\right\}+B_\phi\sin\left\{m\phi\right\}\right)\\ & \cdot B_z\sinh\left\{k_z h\right\}\,\mathrm{d}k_z\,,\end{aligned} \tag{5.115}$$

so dass wir (5.114) umschreiben können in

$$V\{\rho,\phi,z\} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} A_\rho \, \mathrm{J}_m\{k_z\rho\} \left(A_\phi \cos\{m\phi\} + B_\phi \sin\{m\phi\}\right) \cdot B_z' \frac{\sinh\{k_z z\}}{\sinh\{k_z h\}} \, \mathrm{d}k_z \, . \tag{5.116}$$

Wegen der Randbedingung $V\{\rho = \rho_0, \phi, 0 < z < h\} = 0$ werden die k_z nur diskrete Werte annehmen können, welche durch die Nullstellen der Besselfunktionen bestimmt sind. Die ersten Nullstellen $\mathcal{J}_{m,n}$ mit $\mathrm{J}_m\{\mathcal{J}_{m,n}\} = 0$ und $n > 0$ sind:

$$\begin{aligned} m = 0 \;\; \mathcal{J}_{0,n} &= 2.405\,,\, 5.520\,,\, 8.654 \\ m = 1 \;\; \mathcal{J}_{1,n} &= 3.832\,,\, 7.016\,,\, 10.173 \\ m = 2 \;\; \mathcal{J}_{2,n} &= 5.136\,,\, 8.417\,,\, 11.620 \end{aligned} \tag{5.117}$$

$$\tag{5.118}$$

Für höhere Nullstellen gilt die asymptotische Formel

$$\mathcal{J}_{m,n} \approx n\pi + \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad . \tag{5.119}$$

Angemerkt werden soll noch, dass im allgemeinen gilt

$$\mathrm{J}_m\{\mathcal{J}_{m',n}\} \neq 0 \quad \text{für} \quad m \neq m'\,,\, n > 0\,. \tag{5.120}$$

Damit wird es günstig, zu schreiben

$$k_z\{m,n\} = \frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}\,. \tag{5.121}$$

Setzen wir dies in den angepassten Ansatz (5.116) ein, so erhalten wir den allgemeinen Ansatz für diese Geometrie

$$\boxed{V = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} A_\rho \, \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}\rho\right\}\left(A_\phi \cos\{m\phi\} + B_\phi \sin\{m\phi\}\right) B'_z \frac{\sinh\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0} z\right\}}{\sinh\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0} h\right\}} \,. \qquad (5.122)}$$

Dabei ist das Integral über die k_z wegen deren Diskretheit in eine Summe über n übergegangen.

Um die Koeffizienten zu bestimmen benötigt man noch die Orthonormalitätsrelation

$$\frac{2}{\rho_0^2 \, \mathrm{J}_{m+1}^2\{\mathcal{J}_{m,n}\}} \int_0^{\rho_0} \rho \, \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n'}}{\rho_0}\rho\right\} \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}\rho\right\} \mathrm{d}\rho = \delta_{n,n'} \qquad (5.123)$$

und die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\rho\rho'} \, \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}\rho'\right\} \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}\rho\right\}}{\rho_0^2 \, \mathrm{J}_{m+1}^2\{\mathcal{J}_{m,n}\}} = \delta\{\rho - \rho'\} \quad . \qquad (5.124)$$

Auch für das Potenzial in einem zylindrischen Bereich lässt sich der in Abschnitt 5.1.3 diskutierte allgemeine Ansatz benutzen. Für den Zylinder, der den Bereich

$$\begin{aligned} \rho &\in [0, \rho_0] \\ \phi &\in [0, 2\pi] \\ z - z' &\in [0, z_0] \end{aligned} \qquad (5.125)$$

umgibt, sei das Potenzial auf dem Zylinderdeckel bei $z = z_0$ beliebig vorgegeben und alle anderen Oberflächen auf Potenzial Null. Mit den Variablenersetzungen

$$\begin{aligned} p &= \rho \,, \\ q &= \phi \,, \\ r &= z \end{aligned}$$

lassen sich die Funktionen aus Tabelle 5.1.2 in den allgemeinen Ansatz einsetzen.

Tabelle 5.1.2: Potenzial auf dem Zylinderdeckel vorgegeben.

	$f_{1,m,n}$	$w_{1,m,n}$	$f_{2,m,n}$	$w_{2,m,n}$	p_1	p_2	Bem.
$\mathcal{P}$	$\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}\rho\right\}$	$\frac{\sqrt{2}\rho}{\rho_0 J_{m+1}\{\mathcal{J}_{m,n}\}}$	-	-	0	ρ_0	$m \geq 0$
$\mathcal{Q}$	$\cos\{m\cdot\phi\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi}}$	$\sin\{m\phi\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi}}$	0	2π	$m \geq 0$
$\mathcal{R}$	$\cosh\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}(z-z')\right\}$	-	$\sinh\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}}{\rho_0}(z-z')\right\}$	-	-	-	-

Ist in dem durch (5.125) definierten Bereich ein Zylinder gegeben, dessen Deckel und Boden auf Potenzial Null liegen und für dessen Mantel ein beliebiges Potenzial vorgegeben ist, so können mit den Variablenersetzungen von oben die Funktionen aus Tabelle in den allgemeinen Ansatz eingesetzt werden.

Tabelle 5.1.3: Potenzial auf dem Zylindermantel vorgegeben.

	$f_{1,m,n}$	$w_{1,m,n}$	$f_{2,m,n}$	$w_{2,m,n}$	p_1	p_2	Bem.
$\mathcal{P}$	$\mathrm{J}_m\left\{i\pi n\frac{\rho}{z_0}\right\}$	-	-	-	-	-	$n \geq 0$
$\mathcal{Q}$	$\cos\{m\phi\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi}}$	$\sin\{m\phi\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{m,0}}{2\pi}}$	0	2π	$m \geq 0$
$\mathcal{R}$	-	-	$\sin\left\{\pi n\frac{z-z'}{z_0}\right\}$	$\sqrt{\frac{2-\delta_{n,0}}{2\pi}}$	z'	$z'+z_0$	$n \geq 0$

Beispiel 5.1.1: Zylindersymmetrisches Potenzial auf dem Zylinderdeckel

Als weitere Einschränkung sei nun das Potenzial auf dem Zylinderdeckel unabhängig von ϕ. Ansonsten ist die in Abbildung 5.5 gezeigte Geometrie die gleiche, wie sie eben behandelt wurde.

Da das Potenzial auf der Deckfläche unabhängig von ϕ ist, muss man $m = 0$ fordern. Aus dem selben Grund verschwinden die $\sin$- *und* $\cos$-*Terme aus (5.122). Es kommen weiterhin nur solche k_z-Werte in Betracht, die*

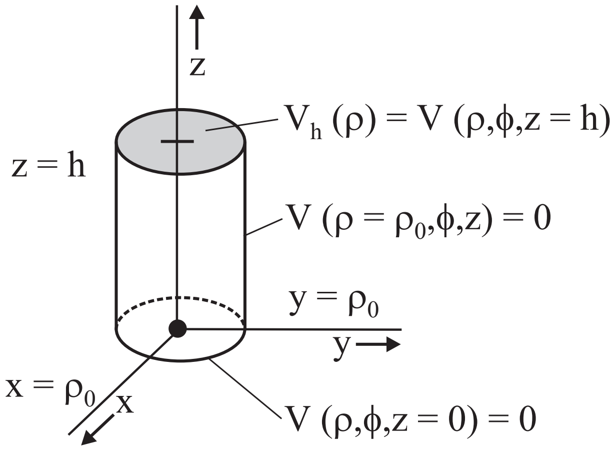


Abbildung 5.5: Zur Berechnung des Potenzials im Zylinder bei zylindersymmetrischem Potenzial auf dem Zylinderdeckel

$$k_z\{0, n\} = \frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0} = k_{0,n} \tag{5.126}$$

erfüllen. Damit machen wir für die Potenzialverteilung den Ansatz

$$V\{\rho, \phi, z\} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n}\,\mathrm{J}_0\{k_{0,n}\rho\}\frac{\sinh\{k_{0,n}z\}}{\sinh\{k_{0,n}h\}} \tag{5.127}$$

mit konstanten Koeffizienten $C_{0,n}$, die hier aus der Multiplikation der ursprünglichen Einzelkoeffizienten hervorgegangen sind. Diese Funktion erfüllt offenbar die Randbedingungen auf der Boden- und Mantelfläche, wo $V = 0$ gilt. Auf der Deckfläche ist

$$V_h\{\rho\} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{0,n}\;\mathrm{J}_0\{k_{0,n}\cdot\rho\} \quad , \tag{5.128}$$

mit den Koeffizienten

$$C_{0,n} = \frac{2}{\rho_0^2\,\mathrm{J}_1^2\{\mathcal{J}_{0,n}\}}\int_0^{\rho_0} V_h\{\rho\}\,\rho\,\mathrm{J}_0\left\{\frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0}\rho\right\}\,\mathrm{d}\rho \quad . \tag{5.129}$$

Die Lösung

$$\boxed{V = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\rho_0^2\,\mathrm{J}_1^2\{\mathcal{J}_{0,n}\}}\int_0^{\rho_0} V_h\{\rho'\}\,\rho'\,\mathrm{J}_0\left\{\frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0}\rho'\right\}\mathrm{d}\rho'\;\mathrm{J}_0\{k_{0,n}\rho\}\frac{\sinh\{k_{0,n}z\}}{\sinh\{k_{0,n}h\}}} \tag{5.130}$$

ist nach dem allgemeinen Satz eindeutig bestimmt, jedoch alles andere als übersichtlich.

Beispiel 5.1.2: Konstantes Potenzial auf dem Zylinderdeckel

Als weitere Vereinfachung sei ein konstantes Potenzial $V_h\left\{\rho\right\} = V_0 = const$ auf dem Zylinderdeckel vorgegeben. Wir bestimmen die Koeffizienten durch einsetzen dieses Potenzials in (5.129)

$$C_{0,n} = \frac{2}{\rho_0^2 \, \mathrm{J}_1^2\left\{\mathcal{J}_{0,n}\right\}} \int\limits_0^{\rho_0} V_0 \rho \, \mathrm{J}_0\left\{\frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0}\rho\right\} \, \mathrm{d}\rho \, . \tag{5.131}$$

Für die Besselfunktionen gibt es in der Literatur eine große Anzahl bekannter Beziehungen. Dazu zählt

$$\int \rho \, \mathrm{J}_0\left\{\rho\right\} \, \mathrm{d}\rho = \rho \, \mathrm{J}_1\left\{\rho\right\} \, . \tag{5.132}$$

Anwenden auf (5.131) liefert

$$C_{0,n} = \frac{2}{\mathcal{J}_{0,n} \, \mathrm{J}_1\left\{\mathcal{J}_{0,n}\right\}} V_0 \tag{5.133}$$

und damit folgt aus (5.127)

$$V\left\{\rho, \phi, z\right\} = 2V_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_0\left\{k_{0,n}\rho\right\}}{\mathcal{J}_{0,n} \, \mathrm{J}_1\left\{\mathcal{J}_{0,n}\right\}} \frac{\sinh\left\{k_{0,n}z\right\}}{\sinh\left\{k_{0,n}h\right\}} \tag{5.134}$$

wobei $k_{0,n} = \frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0}$ gilt. Die Auswertung der Reihe ist aufwendig. Für $z = h$ muss $V\left\{\rho, \phi, z\right\} = V_0$ sein. Damit folgt für $0 < \rho < \rho_0$

$$2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_0\left\{\frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0}\rho\right\}}{\mathcal{J}_{0,n} \, \mathrm{J}_1\left\{\mathcal{J}_{0,n}\right\}} = 1 \quad . \tag{5.135}$$

Beispiel 5.1.3: Besselförmiges-Potenzial auf dem Zylinderdeckel

Die Lösung wird dann sehr übersichtlich, wenn außer einem alle Koeffizienten $C_{0,n}$ in (5.127) verschwinden. Dies lässt sich mit einer Potenzialverteilung gemäß

$$V_h\{\rho\} = \mathrm{J}_0\left\{k_{0,n'}\rho\right\} \tag{5.136}$$

auf der Deckfläche erreichen. Die Koeffizienten ergeben sich wieder durch einsetzen dieses Potenzials in (5.129)

$$C_{0,n} = \frac{2}{\rho_0^2\,\mathrm{J}_1^2\left\{\mathcal{J}_{0,n}\right\}}\int\limits_0^{\rho_0} \mathrm{J}_0\left\{\frac{\mathcal{J}_{0,n'}}{\rho_0}\rho\right\}\rho\,\mathrm{J}_0\left\{\frac{\mathcal{J}_{0,n}}{\rho_0}\rho\right\}\,\mathrm{d}\rho = \delta_{n,n'} \quad . \tag{5.137}$$

Die Lösung in diesem Fall lautet dann

$$V\left\{\rho,\phi,z\right\} = \mathrm{J}_0\left\{k_{0,n'}\rho\right\}\frac{\sinh\left\{k_{0,n'}z\right\}}{\sinh\left\{k_{0,n'}h\right\}} \quad . \tag{5.138}$$

Beispiel 5.1.4: Potenzial auf dem Zylindermantel vorgegeben

Ist das Potenzial auf dem Mantel bei $\rho = \rho_0$ gegeben, so gilt im Bereich

$$0 \le \rho \le \rho_0 \tag{5.139}$$

$$0 \le \phi \le 2\pi \tag{5.140}$$

$$0 \le z \le h \tag{5.141}$$

für das Potenzial auf dem Zylinder:

$$V = \begin{cases} V_c\{z,\phi\} & \text{für} \quad \rho = \rho_0 \\ 0 & \text{für} \quad \begin{cases} & z = h \\ \text{oder} & z = 0 \end{cases} \end{cases} \quad . \tag{5.142}$$

Wir benötigen also einen Lösungsansatz nach Tabelle 5.1.3:

$$V = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{J}_m\{in\pi\frac{\rho}{h}\}}{\mathrm{J}_m\{in\pi\frac{\rho_0}{h}\}} \left(A'_{m,n} \sin\{m\phi\} + B'_{2,m,n} \cos\{m\phi\}\right) \sin\left\{n\pi\frac{z}{h}\right\} \tag{5.143}$$

5.1.5 Zur Lösung der Laplacegleichung in Polarkoordinaten

Die **Laplacegleichung in Polarkoordinaten** lautet

$$\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V\right) + \frac{1}{r^2\sin\{\theta\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}V\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\{\theta\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}V = 0 \quad . \tag{5.144}$$

Der **Produktansatz**

$$V\{r,\theta,\varphi\} = R\{r\}\ \Theta\{\theta\}\ \Phi\{\varphi\} \tag{5.145}$$

ist angebracht, wenn Randbedingungen auf Kugelflächen vorliegen. Einsetzen des Ansatzes liefert nach Multiplikation mit

$$\frac{r^2\sin^2\{\theta\}}{R\{r\}\,\Theta\{\theta\}\,\Phi\{\varphi\}} \tag{5.146}$$

die Beziehung

$$\frac{\sin^2\{\theta\}}{R\{r\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R\{r\}\right) + \frac{\sin\{\theta\}}{\Theta\{\theta\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Theta\{\theta\}\right) + \frac{1}{\Phi\{\varphi\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi\{\varphi\} = 0 \quad . \tag{5.147}$$

Die ersten beiden Summanden hängen nur von r und θ, der letzte nur von φ ab. Man kann separieren und setzt

$$\frac{1}{\Phi\{\varphi\}}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\Phi\{\varphi\} = -m^2 \tag{5.148}$$

mit der allgemeinen Lösung

$$\Phi\{\varphi\} = A'_\varphi \cos\{m\varphi\} + B'_\varphi \sin\{m\varphi\} \;, \tag{5.149}$$

die wir dieses Mal für den späteren Gebrauch in den Kugelflächenfunktionen mit Exponentialfunktionen schreiben wollen

$$\Phi\{\varphi\} = A_\varphi \exp\{im\varphi\} + B_\varphi \exp\{-im\varphi\} \quad . \tag{5.150}$$

Dies stellt für $m \geq 0$ die Lösung des Azimutalanteils dar. Auch die Exponentialfunktionen erfüllen auf dem Intervall $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ eine Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\{im\varphi\}\exp\{-im'\varphi\}\,\mathrm{d}\varphi = \delta_{m,m'} \,. \tag{5.151}$$

Weiterhin bilden die Exponentialfunktionen ein vollständiges System mit der Vollständigkeitsrelation

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \exp\{im\varphi\}\exp\{-im\varphi'\} = \delta\{\varphi - \varphi'\} \quad . \tag{5.152}$$

Eindeutigkeit von $\Phi\{\varphi\}$ verlangt m ganzzahlig. Aus (5.147) folgt durch Einsetzen von (5.148) und nach Division durch $\sin^2\{\theta\}$

$$\frac{1}{R\{r\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R\{r\}\right) + \frac{1}{\sin\{\theta\}\,\Theta\{\theta\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\Theta\{\theta\}\right) - \frac{m^2}{\sin^2\{\theta\}} = 0 \quad . \tag{5.153}$$

Der erste Term hängt hier nur von r, die beiden übrigen hängen nur von θ ab. Wir schreiben mit der Separationskonstanten $\ell(\ell+1)$

$$\frac{1}{R\{r\}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}R\{r\}\right) = \ell(\ell+1)\,. \tag{5.154}$$

Diese Differentialgleichung hat für $\ell \neq -\frac{1}{2}$ die allgemeinen Lösung

$$R\{r\} = A'_r r^\ell + B'_r \frac{1}{r^{\ell+1}} = A_r \left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell + B_r \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1} \quad . \tag{5.155}$$

Somit erhalten wir durch einsetzten von (5.154) in (5.153) nach Multiplikation mit $\Theta\{\theta\}$ und umsortieren

$$\frac{1}{\sin\{\theta\}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\sin\{\theta\} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \Theta\{\theta\}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\{\theta\}}\right) \Theta\{\theta\} = 0 \quad . \tag{5.156}$$

Üblicherweise transformiert man (5.156) mit $x = \cos\{\theta\}$ auf die Form

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left((1-x^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \Theta_x\{x\}\right) + \left(\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right) \Theta_x\{x\} = 0 \quad .} \tag{5.157}$$

Dies ist eine verallgemeinerte **Legendresche Differentialgleichung**. Wiederum soll hier keine Lösung hergeleitet werden. Diese ist im Anhang F.1.4 zu finden. Hier werden zur Lösung der Laplacegleichung zunächst die

Legendre Polynome

$$\tilde{P}_\ell\{x\} = \frac{1}{2^\ell \, \ell\,!} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell} (x^2 - 1)^\ell \quad . \tag{5.158}$$

definiert. Für $m \neq 0$, aber m ganzzahlig findet man nur Polynomlösungen von (5.157), die für ganzzahlige $\ell \geq 0$ bei $x = \pm 1$ nicht divergieren, wenn

$$\begin{aligned} & m \in \{-\ell; -(\ell-1); \ldots; 0; \ldots; (\ell-1); \ell\} \\ \text{also} \quad & |m| \leq \ell \end{aligned} \tag{5.159}$$

gilt. Für ein vorgegebenes ℓ gibt es also nur $(2\ell+1)$ mögliche Werte von m. Hierbei erinnern wir uns, dass nach (5.155) ℓ gerade die radiale Form des Potenzials charakterisiert. Die Lösungsfunktionen von (5.157) heißen **zugeordnete Legendre Polynome** und lauten

$$P_{\ell,m}\{x\} = (-1)^{|m|} (1-x^2)^{|m|/2} \frac{\mathrm{d}^{|m|}}{\mathrm{d}x^{|m|}} \tilde{P}_\ell\{x\} \quad . \tag{5.160}$$

Es ist also $P_{\ell,m} = P_{\ell,-m}$. Die zugeordneten Legendre Polynome heißen auch **Legendre-Funktionen** und werden häufig in der Form P_ℓ^m geschrieben. Wegen der Verwechslungsgefahr mit der Potenzierung wurde hier die Schreibweise $\mathrm{P}_{\ell,m}$ mit zwei Indizes unten gewählt. Für festes m bilden die Funktionen $\mathrm{P}_{\ell,m}\{x\}$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$ ein vollständiges Orthogonalsystem, mit

$$\frac{\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\int\limits_{-1}^{1}\mathrm{P}_{\ell,m}\{x\}\,\mathrm{P}_{\ell',m}\{x\}\,\mathrm{d}x = \delta_{\ell,\ell'} \quad . \tag{5.161}$$

Außerdem erfüllen sie die Vollständigkeitsrelation

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}\mathrm{P}_{\ell,m}\{x\}\,\mathrm{P}_{\ell',m}\{x'\} = \delta\{x-x'\} \quad . \tag{5.162}$$

Es werde daran erinnert, dass $\cos\{\theta\}$ durch x ersetzt wurde. Rücktransformation von (5.160) führt auf

$$\Theta\{\theta\} = P_{\ell,m}\{\cos\{\theta\}\} = (-1)^m(1-\cos^2\{\theta\})^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\left(\cos\{\theta\}\right)^m}\tilde{P}_\ell\{\cos\{\theta\}\} \tag{5.163}$$

Fassen wir zusammen, so erhalten wir eine partikuläre Lösung $V_\mathrm{P}\{r,\theta,\varphi\}$ von (5.144) durch einsetzen von (5.150), (5.155) und (5.163) in den Produktansatz (5.145)

$$\boxed{\begin{aligned} V_\mathrm{P}\{r,\theta,\varphi\} = &\left(A_r\left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell + B_r\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1}\right)P_{\ell,m}\{\cos\{\theta\}\} \\ &\cdot\left(A_\varphi\exp\{im\varphi\} + B_\varphi\exp\{-im\varphi\}\right) \end{aligned} \qquad (5.164)}$$

Die Lösungen des Azimutalanteils lassen sich statt als Summe auch als eine einzige Exponentialfunktion darstellen, falls m nicht von Null bis Unendlich, sondern von minus Unendlich an gezählt wird. Die Funktion $\exp\{im\varphi\}$ ist für positive und negative ganzzahlige m vollständig im Intervall $0 \le \varphi \le 2\pi$ und mit dieser werden nun die

Kugelflächenfunktionen

$$\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\} = \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}\,\mathrm{P}_{\ell,m}\left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\}\exp\left\{im\varphi\right\} \tag{5.165}$$

gebildet. Sie sind auf der Kugeloberfläche orthogonal

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{Y}^*_{\ell',m'}\left\{\theta,\varphi\right\}\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\}\sin\left\{\theta\right\}\;\mathrm{d}\theta\;\mathrm{d}\varphi = \delta_{\ell,\ell'}\,\delta_{m,m'} \quad . \tag{5.166}$$

und sie sind auch vollständig

$$\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\left\{\theta',\varphi'\right\}\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\} = \delta\left\{\varphi-\varphi'\right\}\,\delta\left\{\cos\left\{\theta\right\}-\cos\left\{\theta'\right\}\right\} \quad , \tag{5.167}$$

weil $\mathrm{P}_{l,m}$ und $\exp\{im\varphi\}$ vollständig sind. Kugelflächenfunktionen niedriger Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\ell = 0 \quad & \left\{ \mathrm{Y}_{0,0} = \tfrac{1}{\sqrt{4\pi}} \right. \\
\ell = 1 \quad & \begin{cases} \mathrm{Y}_{1,1} = -\sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\left\{\theta\right\}\exp\left\{i\varphi\right\} \\ \mathrm{Y}_{1,0} = \sqrt{\tfrac{3}{4\pi}}\cos\left\{\theta\right\} \\ \mathrm{Y}_{1,-1} = \sqrt{\tfrac{3}{8\pi}}\sin\left\{\theta\right\}\exp\left\{-i\varphi\right\} \end{cases} \\
\ell = 2 \quad & \begin{cases} \mathrm{Y}_{2,2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\sin^2\left\{\theta\right\}\exp\left\{i2\varphi\right\} \\ \mathrm{Y}_{2,1} = -\sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\sin\left\{\theta\right\}\cos\left\{\theta\right\}\exp\left\{i\varphi\right\} \\ \mathrm{Y}_{2,0} = \sqrt{\tfrac{5}{4\pi}}\left(\tfrac{3}{2}\cos^2\left\{\theta\right\}-\tfrac{1}{2}\right) \\ \mathrm{Y}_{2,-1} = \sqrt{\tfrac{15}{8\pi}}\sin\left\{\theta\right\}\cos\left\{\theta\right\}\exp\left\{-i\varphi\right\} \\ \mathrm{Y}_{2,-2} = \tfrac{1}{4}\sqrt{\tfrac{15}{2\pi}}\sin^2\left\{\theta\right\}\exp\left\{-i2\varphi\right\} \quad . \end{cases}
\end{aligned} \tag{5.168}$$

Die allgemeine Lösung der Laplacegleichung (5.144) lässt sich als

$$\boxed{\begin{aligned} V\left\{r,\theta,\varphi\right\} &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A'_{\ell,m}r^{\ell}+B'_{\ell,m}r^{-(\ell+1)}\right)\,\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\} \\ &= \sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell}\left(A_{\ell,m}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\ell}+B_{\ell,m}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1}\right)\mathrm{P}_{\ell,m}\left\{\cos\{\theta\}\right\}\exp\left\{im\varphi\right\} \end{aligned}} \tag{5.169}$$

schreiben und ist im gesamten Raum gültig. Für jede quadratintegrable Funktion lässt sich die Randbedingung auf einer Kugeloberfläche erfüllen. Ist das Potenzial im Kugelmittelpunkt endlich, wird $B_{\ell,m} = 0$ und der Koeffizient $A_{\ell,m}$ lässt sich z.B. aus der Vorgabe eines Potenzials auf der Kugeloberfläche mit Radius $r = r_0$ unter Verwendung von Orthogonalitätsrelationen berechnen.

5.1.5.1 Orthogonalentwicklung bei zwei- und eindimensionalen polaren Problemen

Im Fall der Azimutalsymmetrie wird im Produktansatz (5.145) $\Phi = 1$ gesetzt, bei Elevationssymmetrie setzt man die Polarkomponente $\Theta = 1$ und im unphysikalischen Fall der radialen Unabhängigkeit wird $R = 1$ gesetzt.

Für die beiden eindimensionalen Fälle $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}V = 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}V = 0$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}V = 0$, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi}V = 0$ werden Lösungen durch einfaches Integrieren gefunden. Im ersten Fall setzt man $R = 1$ und $\Theta = 1$ und erhält

$$V = \Phi = d_1 \cdot \varphi + d_2 \quad , \tag{5.170}$$

im zweiten Fall mit $\Theta = 1$ und $\Phi = 1$ resultiert

$$V = \mathrm{R} = \frac{d_3}{r} + d_4 \quad . \tag{5.171}$$

Der Fall der Unabhängigkeit von r und φ führt nach etwas Rechnung mit $R = 1$ und $\Phi = 1$ auf die Lösung

$$V = \Theta = d_5 \cdot \operatorname{artanh}\left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\} + \mathrm{d}_6 \tag{5.172}$$

Die zweidimensionalen Lösungen können als Spezialfälle der oben hergeleiteten dreidimensionalen Lösungen aufgefasst werden.
Die Zuordnung zum allgemeinen Lösungsansatz lautet

$$p = r \tag{5.173}$$

$$q = \cos\{\theta\} \tag{5.174}$$

$$r = \varphi \tag{5.175}$$

Ist das Potenzial auf einer Kugel vom Radius r_0 vorgegeben, so kann man die Funktionen aus Tabelle 5.1.4 in den allgemeinen Lösungsansatz einsetzen und so einen Lösungsansatz erhalten, falls der Mittelpunkt der Kugel im Ursprung liegt.

Tabelle 5.1.4: Lösung der Laplacegleichung in Polarkoordinaten

	$f_{1,\ell,m}$	$w_{1,\ell,m}$	$f_{2,\ell,m}$	$w_{2,\ell,m}$	p_1	p_2	Bem.
$\mathcal{P}$	$\left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell$	-	-	-	-	-	-
$\mathcal{Q}$	$\mathrm{P}_{\ell,m}\{\cos\{\theta\}\}$	$\sqrt{\frac{2\ell+1}{2}\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}}$	-	-	-1	1	$\lvert m\rvert \leq \ell$ $\ell \geq 0$
$\mathcal{R}$	$\exp\{im\varphi\}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	-	-	0	2π	-

Beispiel 5.1.1: Dielektrische Kugel im homogenen Feld

Wir untersuchen nach Abbildung 5.6 eine dielektrische Kugel vom Radius r_0 mit Dielektrizitätskonstante ε_i in einem homogenen elektrischen äußeren Feld $\vec{E}_0 = E_0\vec{e}_z$, das von einem Kondensator mit fester Flächenladungsdichte erzeugt sein möge. Im elektrischen Feld wird die Kugel polarisiert, und ihr Feld überlagert sich dem äußeren, ursprünglich vorhandenen Feld. Das Potenzial muss die Laplacegleichung im gesamten Raum unter Beachtung der Randbedingungen an der Kugeloberfläche für $r = r_0$ und für $r \to \infty$ erfüllen.

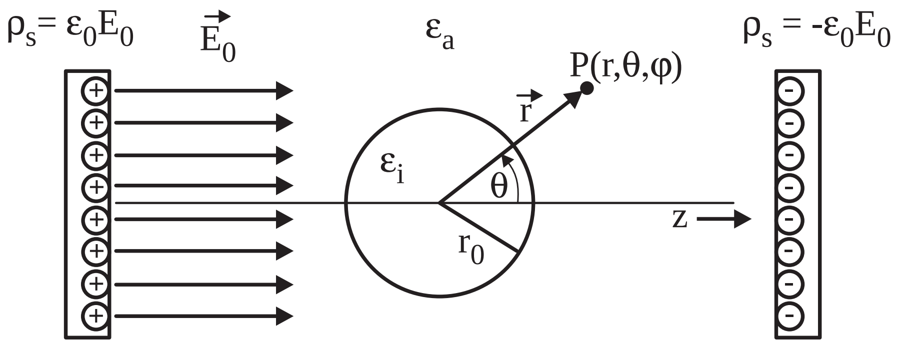


Abbildung 5.6: Dielektrische Kugel im homogenen elektrischen Feld.

Wir führen Polarkoordinaten mit Ursprung im Kugelmittelpunkt ein. Da das System rotationssymmetrisch zur z-Achse ist, hängt das Potenzial nur von r und θ, nicht dagegen vom Azimutwinkel φ ab. Wir können im Produktansatz $\Phi = 1$ setzen und es folgt: $m = 0$. Somit ist $V = V\{r, \theta\}$ und lässt sich darstellen als

$$V\{r,\theta\} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\ell} + B_\ell \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1} \right) \mathrm{P}_{\ell,0}\{\cos\{\theta\}\} \tag{5.176}$$

$$\begin{aligned} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(A_\ell \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\ell} \cdot \mathrm{P}_{\ell,0}\{\cos\{\theta\}\} \right) \\ &\quad + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(B_\ell \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1} \cdot \mathrm{P}_{\ell,0}\{\cos\{\theta\}\} \right) \end{aligned} \tag{5.177}$$

Da das Potenzial für $r \to \infty$ nicht divergieren darf, muss die erste Summe in (5.177) abbrechen, wenn Terme mit Potenzen größer Eins in r auftreten. Mit

$$\mathrm{P}_{0,0}\{x\} = 1 \tag{5.178}$$

$$\mathrm{P}_{1,0}\{x\} = x \tag{5.179}$$

$$\textit{und allgemein} \qquad \mathrm{P}_{l,0}\{x\} = \tilde{P}_\ell\{x\} \tag{5.180}$$

gilt somit für den Außenraum $r > r_0$ die Entwicklung

$$V_{\mathrm{a}}\left\{r,\theta\right\} = A_0 + A_1 \frac{r}{r_0}\cos\left\{\theta\right\} + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell \left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1} \tilde{P}_\ell\left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\} \tag{5.181}$$

Das elektrische Feld resultiert aus der Definition des Potenzials

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -\vec{\nabla} V \\ &= -\left(\vec{e}_\varphi \frac{1}{r\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial\varphi}V + \vec{e}_{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r}V + \vec{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}V\right) .\end{aligned}$$

Betrachten wir die Terme zunächst einzeln:

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}V_a\{r,\theta\} = 0 \tag{5.182}$$

$$\vec{e}_{\mathrm{r}}\frac{\partial}{\partial r}V_a = \vec{e}_{\mathrm{r}}\cdot\left(\frac{A_1}{r_0}\cos\{\theta\} + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell(\ell+1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell}\left(-\frac{r_0}{r^2}\right)\right) \tag{5.183}$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}V_a = \frac{A_1 r}{r_0}\left(-\sin\{\theta\}\right) + \sum_{\ell=0}^{\infty} B_\ell\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1}\left(\left.\frac{\partial\tilde{P}_\ell\left\{x\right\}}{\partial x}\right|_{x=\cos\{\theta\}}\right)\left(-\sin\{\theta\}\right) \tag{5.184}$$

Und fassen dann wieder zusammen:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\mathrm{a}} = &-\vec{e}_r\left(\frac{A_1}{r_0}\cos\{\theta\} - \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell}{r_0}(\ell+1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+2}\tilde{P}_\ell\left\{\cos\{\theta\}\right\}\right) \\ &-\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\left(-\frac{A_1 r}{r_0}\sin\{\theta\} - \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell}{r_0}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1}\sin\{\theta\}\left.\frac{\partial\tilde{P}_\ell\left\{x\right\}}{\partial x}\right|_{x=\cos\{\theta\}}\right)\end{aligned} \tag{5.185}$$

Die z-Komponente des Feldes hat man auf der positiven z-Achse, also für $\theta = 0$, und damit

$$E_{\mathrm{z,a}}\left\{x=0,y=0,z>r_0\right\} = -\frac{A_1}{r_0} + \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{B_\ell}{r_0}(\ell+1)\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+2}\tilde{P}_\ell\left\{x\right\}\Big|_{x=1} . \tag{5.186}$$

Im Außenraum mit $r \to \infty$ muss das Feld wegen der Randbedingungen an den Kondensatorplatten gleich dem ursprünglich vorhandenen Feld $E_0\vec{e}_\mathrm{z}$ sein. Damit folgt aus (5.186)

$$A_1 = -E_0 \cdot r_0 \tag{5.187}$$

Im ladungsfreien Innenraum der Kugel muss das Potenzial endlich bleiben. Dies erfordert für $r \leq r_0$ die Darstellung

$$V_\mathrm{i}\left\{r,\theta\right\} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A'_\ell \left(\frac{r}{r_0}\right)^\ell \tilde{P}_\ell \left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\} \quad . \tag{5.188}$$

Für $r = r_0$ ist das Potenzial so zu bestimmen, dass die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ und die Normalkomponente von $\vec{D}$ stetig sind. Ersteres erfordert die Stetigkeit von V, also

$$V_\mathrm{i}\left\{r_0,\theta\right\} = V_\mathrm{a}\left\{r_0,\theta\right\} \quad , \tag{5.189}$$

letzteres die Bedingung

$$\varepsilon_i \left.\frac{\partial V_\mathrm{i}\left\{r,\theta\right\}}{\partial r}\right|_{r=r_0} = \varepsilon_a \left.\frac{\partial V_\mathrm{a}\left\{r,\theta\right\}}{\partial r}\right|_{r=r_0} \quad . \tag{5.190}$$

Damit folgt aus (5.181) mit (5.187) und (5.188)

$$-E_0 r_0 \cos\left\{\theta\right\} + A_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(B_\ell - A'_\ell\right) \tilde{P}_\ell \left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\} = 0 \tag{5.191}$$

sowie für die Ableitungen auf dem Rand der Kugel

$$-\varepsilon_a E_0 \cos\left\{\theta\right\} - \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\varepsilon_\mathrm{a}(\ell+1)\frac{B_\ell}{r_0} + \varepsilon_\mathrm{i}\ell\frac{A'_\ell}{r_0}\right) \tilde{P}_\ell \left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\} = 0 \quad . \tag{5.192}$$

Da die Legendre Polynome orthogonal sind, müssen die Koeffizienten der Legendre Reihen selbst verschwinden. Nach (5.178) und (5.179) ist es günstig (5.192) umzuschreiben

$$-\varepsilon_\mathrm{a}\frac{B_0}{r_0} - \left(\varepsilon_a E_0 + \varepsilon_\mathrm{a} 2\frac{B_1}{r_0} + \varepsilon_\mathrm{i}\frac{A'_1}{r_0}\right)\cos\left\{\theta\right\} - \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\varepsilon_\mathrm{a}(\ell+1)\frac{B_\ell}{r_0} + \varepsilon_\mathrm{i}\ell\frac{A'_\ell}{r_0}\right) \tilde{P}_\ell \left\{\cos\left\{\theta\right\}\right\} = 0\,. \tag{5.193}$$

Man sieht dann, dass für $\ell = 0$ *in (5.193)* $B_0 = 0$ *gefordert werden muss. Schreiben wir auch (5.191) um,*

$$A_0 + B_0 - A_0' + (B_1 - A_1' - E_0 r_0)\cos\{\theta\} + \sum_{\ell=2}^{\infty} (B_\ell - A_\ell')\,\tilde{P}_\ell\{\cos\{\theta\}\} = 0 \tag{5.194}$$

so folgt mit $B_0 = 0$ *die Bedingung* $A_0 = A_0'$*. Für* $\ell = 1$ *ergibt sich aus (5.194)*

$$-E_0 r_0 + B_1 - A_1' = 0 \tag{5.195}$$

und aus (5.193)

$$-\varepsilon_\mathrm{a} E_0 - 2\varepsilon_\mathrm{a}\frac{B_1}{r_0} - \varepsilon_\mathrm{i}\frac{A_1'}{r_0} = 0 \tag{5.196}$$

mit dem Ergebnis

$$B_1 = -E_0 r_0 \frac{\varepsilon_\mathrm{a} - \varepsilon_\mathrm{i}}{2\varepsilon_\mathrm{a} + \varepsilon_\mathrm{i}} \tag{5.197}$$

und

$$A_1' = -E_0 r_0 \frac{3\varepsilon_\mathrm{a}}{2\varepsilon_\mathrm{a} + \varepsilon_\mathrm{i}} \quad . \tag{5.198}$$

Für $\ell \geq 2$ *folgt aus (5.193) und (5.194)*

$$B_\ell - A_\ell' = 0 \tag{5.199}$$

$$\varepsilon_\mathrm{a}(\ell+1)\frac{B_\ell}{r_0} + \varepsilon_\mathrm{i}\ell\frac{A_\ell'}{r_0} = 0 \tag{5.200}$$

mit der Lösung

$$A_\ell' = B_\ell = 0 \quad \text{für } \ell \geq 2 \quad . \tag{5.201}$$

Damit ist das Potenzial bis auf eine willkürliche Konstante A_0 *festgelegt. Wir wählen* $A_0 = 0$ *und erhalten für das Potenzial im Innenraum*

$$V_{\mathrm{i}} = -\frac{3\varepsilon_{\mathrm{a}}}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}E_0 z = -\frac{3\varepsilon_{\mathrm{a}}}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}E_0 r\cos\{\theta\} \tag{5.202}$$

und im Außenraum nach (5.181)

$$V_{\mathrm{a}} = -\left[1+\frac{\varepsilon_{\mathrm{a}}-\varepsilon_{\mathrm{i}}}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}\frac{r_0^3}{r^3}\right]E_0 r\cos\{\theta\} \quad . \tag{5.203}$$

Dies ist das Potenzial des ungestörten Feldes, dem das Potenzial eines Punktdipols im Ursprung mit Dipolmoment (vergleiche (2.53))

$$\vec{p} = 4\pi\varepsilon_0 r_0^3\frac{\varepsilon_{\mathrm{a}}-\varepsilon_{\mathrm{i}}}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}E_0\vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{5.204}$$

überlagert wird. Im Innenraum herrscht ein homogenes Feld

$$\vec{E}_{\mathrm{i}} = \frac{3\varepsilon_{\mathrm{a}}}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}\vec{E}_0 \quad , \tag{5.205}$$

das wegen $\varepsilon_{\mathrm{i}} > \varepsilon_{\mathrm{a}}$ *geringer als im ungestörten Fall ist. Die dielektrische Verschiebung im Innenraum ist*

$$\vec{D}_{\mathrm{i}} = \varepsilon_{\mathrm{i}}\varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{i}} = \frac{3\varepsilon_{\mathrm{a}}\varepsilon_{\mathrm{i}}}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}\varepsilon_0\vec{E}_0 = \varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{i}} + \vec{P}_{\mathrm{i}} \quad , \tag{5.206}$$

wobei für die letzte Gleichheit (2.74) benutzt wurde. Für die Polarisation erhält man

$$\vec{P}_{\mathrm{i}} = \vec{D}_{\mathrm{i}} - \varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{i}} = 3\frac{\varepsilon_{\mathrm{i}}-1}{2\varepsilon_{\mathrm{a}}+\varepsilon_{\mathrm{i}}}\varepsilon_0\varepsilon_{\mathrm{a}}\vec{E}_0 \quad . \tag{5.207}$$

Da das Feld konstant ist, gilt für die Polarisationsladungsdichte

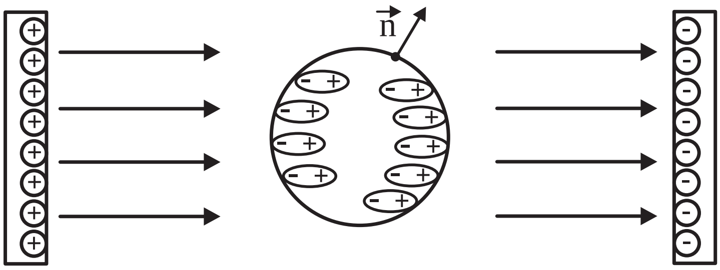
$$\varrho_{\mathrm{P}} = -\vec{\nabla}\circ\vec{P}_{\mathrm{i}} = 0 \tag{5.208}$$

im Innern der Kugel. An der Oberfläche befindet sich, da das Feld $\vec{E}$ *einen Sprung macht, die Polarisationsoberflächenladungsdichte*

$$\varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{a}}\circ\vec{n} - \varepsilon_0\vec{E}_{\mathrm{i}}\circ\vec{n} = -\vec{n}\circ\left(\vec{P}_{\mathrm{a}}-\vec{P}_{\mathrm{i}}\right) = \varrho_{\mathrm{PS}} \quad , \tag{5.209}$$

wobei $\vec{n}$ einen nach außen weisenden Normaleneinheitsvektor auf der Kugeloberfläche darstellt und beachtet wurde, dass die Normalkomponente von $\vec{D}$ stetig ist. Wie in Abbildung 5.7 veranschaulicht ist, wird die Oberflächenpolarisationsladungsdichte durch die ausgerichteten Dipole an der Oberfläche verursacht.

Abbildung 5.7: Ausgerichtete Dipole an der Kugeloberfläche



Diese Dipole erzeugen ein Gegenfeld, das die Feldstärke im Innern der Kugel reduziert. Im Vakuum-Außenraum gilt $\vec{P}_\mathrm{a} = 0, \varepsilon_\mathrm{a} = 1$ und somit ist

$$\varrho_\mathrm{PS} = \vec{P}_\mathrm{i} \circ \vec{n} = 3\varepsilon_0 \frac{\varepsilon_\mathrm{i} - 1}{2 + \varepsilon_\mathrm{i}} E_0 \cos\{\theta\} \quad . \tag{5.210}$$

5.1.5.2 Entelektrisierung

Die durch die Polarisationsoberflächenladungsdichte verursachte Verringerung des Feldes im Kugelinnern bezeichnet man als **Entelektrisierung** . Die Differenz

$$\vec{E}_\mathrm{N} = \vec{E}_\mathrm{i} - \vec{E}_0 = -\frac{\varepsilon_\mathrm{i} - 1}{\varepsilon_\mathrm{i} + 2} \vec{E}_0 = -\frac{1}{3} \frac{\vec{P}_\mathrm{i}}{\varepsilon_0} \tag{5.211}$$

heißt entelektrisierendes Feld. $\vec{E}_\mathrm{N}$ und $\vec{P}_\mathrm{i}$ haben entgegengesetzte Richtung. Einen ähnlichen einfachen Zusammenhang mit einem homogenen Feld im Dielektrikum erhält man für Körper, die die Gestalt eines Rotationsellipsoids besitzen oder Grenzfälle davon sind. Allgemein gilt die Beziehung

$$\vec{E}_\mathrm{i} = \vec{E}_0 - N \frac{\vec{P}_\mathrm{i}}{\varepsilon_0} \quad , \tag{5.212}$$

wobei sich die **Entelektrisierungsfaktoren** unterscheiden. Es ist $N = \frac{1}{3}$ für Kugeln, $N = \frac{1}{2}$ für Kreiszylinder mit äußerem Feld senkrecht zur Achse und $N = 1$ für unendlich ausgedehnte Platten mit äußerem Feld senkrecht zur Platte.

Beispiel 5.1.2: Punktladung im freien Raum

Das Potenzial einer Punktladung Q im freien Raum nach (2.20) soll mit Kugelflächenfunktionen dargestellt werden. Dazu müssten wir eigentlich $\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$ nach Kugelflächenfunktionen entwickeln. Wir wählen hier einen anderen Weg und beschreiben die Punktladung Q, die sich am Ort (r', θ', φ') befinde, als eine inhomogene Flächenladungsdichte ϱ_S auf einer Kugel vom Radius r'. Wir setzen zunächst $\varrho_\mathrm{S} = Q_\mathrm{S} \cdot \delta\{\theta - \theta'\}\delta\{\varphi - \varphi'\}$ und erhalten als Raumladungsdichte $\varrho_\mathrm{V} = \varrho_\mathrm{S} \cdot \delta\{r - r'\}$. Nun können wir die Flächenladungsdichte ϱ_S aus der Gesamtladung Q der Kugel

$$Q = \iiint \varrho_\mathrm{V} \, \mathrm{d}^3 r = Q_\mathrm{S} \cdot r'^2 \cdot \sin\{\theta'\} \tag{5.213}$$

zu

$$\varrho_\mathrm{S} = Q_\mathrm{S} \cdot \delta\{\theta - \theta'\} \cdot \delta\{\varphi - \varphi'\} = \frac{Q}{r'^2 \sin\{\theta'\}} \delta\{\theta - \theta'\} \cdot \delta\{\varphi - \varphi'\} \tag{5.214}$$

bestimmen.

Für das Potenzial innerhalb und außerhalb der Kugel machen wir den Ansatz

$$V = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta, \varphi\} \cdot \begin{cases} A_{1,\ell,m} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} + B_{1,\ell,m} \left(\frac{r}{r'}\right)^{-(\ell+1)} & \text{für } 0 \leq r \leq r' \\ A_{2,\ell,m} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} + B_{2,\ell,m} \left(\frac{r}{r'}\right)^{-(\ell+1)} & \text{für } r' \leq r \end{cases} . \tag{5.215}$$

Mit den Randbedingungen, dass das Potenzial im Kugelmittelpunkt endlich bleiben muss und auf der Fernkugel nicht divergieren darf sowie auf der Kugeloberfläche stetig sein muss, ergeben sich für die Konstanten $B_{1,\ell,m} = 0$, $A_{2,\ell,m} = 0$ und $A_{1,\ell,m} = B_{2,\ell,m} = A_{\ell,m}$ und somit

$$V = \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \cdot \begin{cases} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} & \text{für } 0 \leq r \leq r' \\ \left(\frac{r}{r'}\right)^{-(\ell+1)} & \text{für } r' \leq r \quad . \end{cases} \tag{5.216}$$

Die Konstante $A_{\ell,m}$ in (5.216) wird aus dem Sprung im Normal-, also Radialanteil, der dielektrischen Verschiebung an der Kugeloberfläche $\vec{e}_\mathrm{r} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)\,|_{r=r'} = \varrho_\mathrm{S}$ berechnet und führt zunächst auf

$$\varrho_\mathrm{S} = \varepsilon_0 \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} A_{\ell,m}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}\, \frac{2\ell+1}{r'} = Q_\mathrm{S} \cdot \delta\{\theta-\theta'\} \cdot \delta\{\varphi-\varphi'\} \tag{5.217}$$

woraus nach Orthogonalentwicklung

$$\varepsilon_0 A_{\ell,m} \cdot \frac{2\ell+1}{r'} = Q_\mathrm{S} \cdot \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \cdot \sin\{\theta'\} = \frac{Q}{r'^2}\, \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \tag{5.218}$$

folgt. Somit ist

$$V = \frac{Q}{\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r'} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \cdot \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \cdot \begin{cases} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} & \text{für } 0 \leq r \leq r' \\ \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell+1} & \text{für } r' \leq r \quad . \end{cases} \tag{5.219}$$

offenbar das Potenzial einer Punktladung Q am Ort (r',θ',φ'). Wir erhalten aus dem Vergleich mit $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|}$ ganz allgemein

$$\frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r'}|} = \frac{1}{r'} \cdot \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} \frac{1}{2\ell+1}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \cdot \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \cdot \begin{cases} \left(\frac{r}{r'}\right)^{\ell} & \text{für } 0 \leq r \leq r' \\ \left(\frac{r'}{r}\right)^{\ell+1} & \text{für } r' \leq r \quad . \end{cases} \tag{5.220}$$

5.1.6 Multipolentwicklung

Das Potenzial einer beliebigen Ladungsverteilung lautet außerhalb der Quellen

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \cdot \iiint \frac{\varrho}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}^3 r' \,. \tag{5.221}$$

Das Potenzial in großer Entfernung von den Quellen soll systematisch diskutiert werden. Für diesen Sachverhalt kann man annehmen, dass sich die Quellverteilung im Zentrum einer Kugel mit dem Radius r_0 befindet. Wegen der großen Kugelausdehnung erscheint es zweckmäßig den Radialteil und den Winkelteil voneinander zu separieren, wie es mit dem Ansatz

$$V = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \sum_{m=-\ell}^{\ell} q_{\ell,m} \cdot \frac{1}{2\ell+1} \, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \cdot r^{-(\ell+1)} \tag{5.222}$$

geschieht. Bei dem Ansatz wurde gleich berücksichtigt, dass das Potenzial auf der Fernkugel nicht divergieren darf. Die **Multipolmomente** $q_{\ell,m}$ errechnen sich, indem man in (5.221) das Ergebnis (5.220) aus Beispiel 5.1.2 des vorigen Abschnittes einsetzt, (5.221) und (5.222) gleichsetzt und schließlich eine Orthogonalentwicklung durchführt. Man erhält

$$q_{\ell,m} = \iiint \varrho \cdot r'^{\ell} \cdot \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \, \mathrm{d}^3 r' \tag{5.223}$$

mit dem charakteristischen Produkt aus Ladung und Entfernung zum Ursprung zur Potenz ℓ. Der Ausdruck Moment rührt aus dem Vergleich zur Mechanik, wo das Drehmoment aus dem Produkt von Kraft und Abstand zum Drehpunkt errechnet wird. Höhere Momente errechnen sich aus der Kraft und dem zur Potenz ℓ erhobenen Abstand. Für einen Monopol $\rho_\mathrm{r} = q \cdot d^3\{\vec{r}\}$ ist $\ell = 0$, der Dipol wird durch $\ell = 1$ gekennzeichnet, wie durch direktes Ausrechnen von

$$q_{0,0} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}} \cdot \iiint \varrho \, \mathrm{d}^3 r' = q \cdot \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$$

$$
\begin{aligned}
q_{1,1} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{1}{2}} \cdot \iiint \varrho \cdot r' \exp\{i\varphi'\} \cdot \mathrm{d}^3 r' \\
&= \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \cdot \iiint \varrho(x' - iy')\, \mathrm{d}^3 r' = -\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, (\vec{p_\mathrm{x}} \circ \vec{e_\mathrm{x}} - i\vec{p_\mathrm{y}} \circ \vec{e_\mathrm{y}}) \\
q_{1,0} &= \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cdot \iiint \varrho z'\, \mathrm{d}^3 r' = -\sqrt{\frac{3}{4\pi}} \vec{p_\mathrm{z}} \circ \vec{e_\mathrm{z}}
\end{aligned} \tag{5.224}
$$

leicht einsehbar ist. Multipolmomente mit negativer Azimutalordnung m können aus denen mit positivem m wegen (5.165) aus

$$
q_{\ell,-m} = (-1)^m \cdot q^*_{\ell,m} \tag{5.225}
$$

ermittelt werden.

5.2 Die Spiegelungsmethode

In diesem Abschnitt geht es darum, das Potenzial einer Ladungsverteilung zu bestimmen, wenn zusätzlich gefordert wird, dass das Potenzial auf einer Fläche verschwindet bzw. konstant ist. Aber auch der Einfluss einer Grenzfläche zwischen Materialien kann mit Hilfe der Spiegelungsmethode erfasst werden. Zur Lösung des Problems wird der Einfluss der Grenzfläche durch eine virtuelle Ladungsverteilung außerhalb des betrachteten Gebietes erfasst. Es ergibt sich, dass die virtuellen Ladungsverteilungen so angeordnet sind, als seien sie Spiegelbilder der ursprünglichen Verteilung, die an der Grenzfläche sichtbar wären. Daher rührt auch der Name **Spiegelungsmethode**. Die virtuelle Ladungsverteilung wird auch als **Spiegelladung** bezeichnet. Das Potenzial berechnet sich dann als Überlagerung der Potenziale der ursprünglichen und der virtuellen Ladungsverteilung. Dieses Problem hat bereits für sich Bedeutung. Es erweist sich aber zudem als nützliche Vorbereitung für die nachfolgend zu behandelnde Methode der Lösung der Poissongleichung mit der Greenschen Funktion, bei der die ursprüngliche Ladungsverteilung eine Punktladung an einem beliebigen Ort ist. Zur Vereinfachung wird im folgenden immer davon ausgegangen, dass die Grenzfläche durch eine geerdete Metallfläche gebildet wird, sie kann aber auch durch zwei verschiedene Materialien gebildet werden. In diesem Fall sind die Spiegelladungen genauso wie bei einer metallischen Grenzfläche anzuordnen, sie haben nur eine modifizierte Ladung.

5.2.1 Die Spiegelungsmethode für ebene Flächen

Zunächst soll hier der Einfluss einer ebenen geerdeten Metallfläche auf die Potenzialverteilung einer Punktladung im freien Raum untersucht werden. Wir betrachten nach Abbildung 5.8 eine Punktladung Q bei $z = z' > 0$ auf der z-Achse und fordern, dass das Potenzial in der xy-Ebene bei $z = 0$ verschwinden möge. Beispiel hierfür ist ein Elektron vor einer geerdeten Metallplatte. Wir suchen das Potenzial in der Halbebene $z > 0$ vor der Platte.

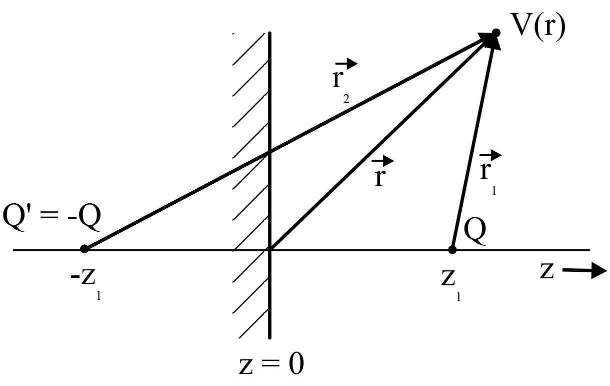


Abbildung 5.8: Punktladung vor geerdeter Ebene

Bei der Spiegelungsmethode geht man folgendermaßen vor. Man setzt im Lösungsgebiet $z > 0$ zunächst das Potenzial der ungestörten Punktladung Q an und versucht dann durch Anbringen zusätzlicher Ladungen außerhalb des Lösungsgebietes die Randbedingung auf der Grenzfläche zu erfüllen. Wie wir sehen werden, reicht bei einer ebenen Grenzfläche eine zusätzliche Ladung aus. Setzt man nämlich eine sogenannte elektrische Spiegelladung

$$\boxed{Q' = -Q \qquad (5.226)}$$

an die Stelle

$$\boxed{z = -z' \quad ,} \tag{5.227}$$

so ist das von Ladung und Spiegelladung erzeugte Potenzial

$$\begin{aligned}
V(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{|\vec{r}_1|} + \frac{Q'}{|\vec{r}_2|}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z-z')^2}} - \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+(z+z')^2}}\right) \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q}{\sqrt{\rho^2+(z-z')^2}} - \frac{Q}{\sqrt{\rho^2+(z+z')^2}}\right)
\end{aligned} \tag{5.228}$$

mit $\rho^2 = x^2 + y^2$.

Offenbar ist die Randbedingung $V\{x, y, z = 0\} = 0$ erfüllt. Das System der beiden Punktladungen erzeugt dasselbe Potenzial wie eine Punktladung und die auf einer Metallplatte influenzierte Oberflächenladung. Da das Innere der Metallplatte feldfrei ist, erhält man für die influenzierte Oberflächenladungsdichte

$$\begin{aligned}
\varrho_{\mathrm{S}}\{x, y\} = D_{\mathrm{z}}\{x, y, z = 0\} \quad &= \quad -\varepsilon_0 \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{z=0} \\
&= \frac{-Q}{4\pi}\left[\frac{-(z-z')}{(\rho^2+(z-z')^2)^{3/2}} - \frac{-(z+z')}{(\rho^2+(z+z')^2)^{3/2}}\right]_{z=0} \\
&= -\frac{Q}{2\pi}\frac{z'}{(\rho^2+z'^2)^{3/2}} \quad .
\end{aligned} \tag{5.229}$$

Integration über die x, y-Ebene liefert die gesamte influenzierte Ladung $(\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\phi)$

$$\begin{aligned}
Q_{\mathrm{inf}} &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \varrho_{\mathrm{S}}\{x, y\}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \\
&= -\frac{Qz'}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\rho}{(\rho^2+z'^2)^{3/2}}\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi
\end{aligned} \tag{5.230}$$

$$= -Qz' \left[\frac{-1}{(\rho^2 + z'^2)^{1/2}} \right]_{\rho=0}^{\rho=\infty} = -Q \quad .$$

Die gesamte influenzierte Oberflächenladung ist also gleich dem Negativen der influenzierenden Ladung.

Man kann nun einfach das Superpositionsprinzip und die Spiegelungsmethode kombinieren, um das Potenzial einer im positiven Halbraum befindlichen kontinuierlichen Ladungsverteilung $\varrho_\mathrm{V}\{x, y, z > 0\}$ anzugeben, das der Randbedingung $V\{x, y, z = 0\} = 0$ genügt. Man erhält es in Analogie einfach als Summe zweier Coulombintegrale

$$V\{x, y, z \geq 0\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varrho\{x', y', z'\}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}} \,\mathrm{d}z' \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}y'$$
$$+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\varrho\{x', y', z''\}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z'')^2}} \,\mathrm{d}z'' \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}y' \quad . \tag{5.231}$$

Mit der Abbildungsvorschrift $z'' = -z'$ und $\rho\{z''\} = -\rho\{z'\}$ resultiert in völliger Analogie zu (5.228) im Raumbereich $z > 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{0}^{\infty} \frac{\rho\{x', y', z'\}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}$$
$$- \frac{\rho\{x', y', z'\}}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}} \,\mathrm{d}x' \,\mathrm{d}y' \,\mathrm{d}z' \quad . \tag{5.232}$$

Ist die Metallfläche auf einem konstanten Potenzial, so resultiert das ganze Potenzial aus der Überlagerung von dem hier dargestellten mit der Potenzialverteilung, die die Metallplatte allein erzeugen würde.

5.2.2 Die Spiegelungsmethode für Kugelflächen

Leider lässt sich die Spiegelungsmethode nur für wenige Flächen explizit durchführen. Für eine geerdete Metallkugel in Abbildung 5.9 kann man Ort und Größe der erforderlichen

Spiegelladungsverteilung einfach angeben. Man benötigt nämlich für eine influenzierende Punktladung nur eine punktförmige Spiegelladung. Aus Symmetriegründen müssen Ladung Q' und Spiegelladung Q'' auf einer Achse angeordnet sein, die durch den Kugelmittelpunkt verläuft. Mit den Bezeichnungen von Abbildung 5.9 befinden sich Q' bei $(0, 0, z')$ und Q'' bei $(0, 0, z'')$. Der Kugelmittelpunkt liegt im Ursprung, und der Kugelradius ist r_0.

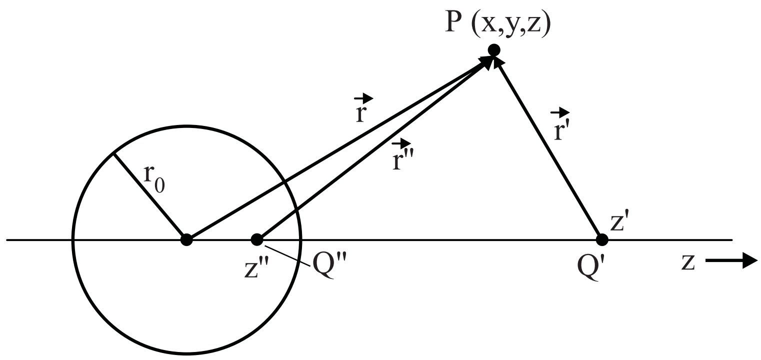


Abbildung 5.9: Zur Spiegelungsmethode bei Kugelflächen

Das von Ladung Q' und Spiegelladung Q'' erzeugte Potenzial ist

$$\begin{aligned} V\{\vec{r}\} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q'}{|\vec{r}_{Q'}|} + \frac{Q''}{|\vec{r}_{Q''}|}\right) \\ &= \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+y^2+(z-z')^2\right)}} + \frac{Q''}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{\left(x^2+y^2+(z-z'')^2\right)}} \quad . \end{aligned} \tag{5.233}$$

Die Randbedingung $V = 0$ auf der Kugeloberfläche erfordert zum Beispiel $V\{0, 0, z = r_0\} = 0$ und $V\{0, 0, z = -r_0\} = 0$. Dies führt auf

$$\frac{Q'}{\sqrt{(r_0 - z')^2}} = \frac{-Q''}{\sqrt{(r_0 - z'')^2}} \tag{5.234}$$

und

$$\frac{Q'}{\sqrt{(r_0 + z')^2}} = \frac{-Q''}{\sqrt{(r_0 + z'')^2}} \quad . \tag{5.235}$$

Nun ist $z' > r_0 > 0$ aber $0 < z'' < r_0$ anzunehmen, so dass für die Position der Spiegelladung folgt

$$\boxed{z' \cdot z'' = r_0^2} \tag{5.236}$$

und für deren Ladung

$$\boxed{Q'' = -\frac{Q' r_0}{z'} \quad .} \tag{5.237}$$

Hiermit ist das Potenzial

$$V\{x,y,z\} \;=\; \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2zz'+z'^2}} - \frac{r_0/z'}{\sqrt{x^2+y^2+z^2-2z\frac{r_0^2}{z'}+\frac{r_0^4}{z'^2}}}\right] \quad . \tag{5.238}$$

Durch Einsetzen überzeugt man sich leicht davon, dass für alle Punkte auf der Kugeloberfläche mit $x^2+y^2+z^2=r_0^2$ die Randbedingung $V=0$ erfüllt ist. Der zweite Summand ist der Beitrag der Bildladung.

In Polarkoordinaten $r^2 = x^2+y^2+z^2 = |\vec{r}|^2, r' = z'$ lässt sich das Potenzial schreiben als

$$V\{r,\theta,\varphi\} = V_0 + V_{\mathrm{i}} = \frac{Q'}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r'}|} - \frac{r_0}{r'}\cdot\frac{1}{|\vec{r}-\left(\frac{r_0}{r'}\right)^2\vec{r'}|}\right), \tag{5.239}$$

wobei V_0 das Potenzial der Originalladung und V_{i} das Potenzial der Bildladung bezeichnet. Man erkennt

$$V_{\mathrm{i}}\left\{\vec{r},\vec{r'}\right\} = -\frac{r_0}{r'}V_0\left\{\vec{r},\left(\frac{r_0}{r'}\right)^2\ \vec{r'}\right\} \tag{5.240}$$

Diese Inversion des Potenzials an einer geerdeten Kugeloberfläche gilt ganz allgemein für beliebige Ladungsverteilungen.

5.2.2.1 Spiegelung einer achsparallelen Linienladung am Zylinder

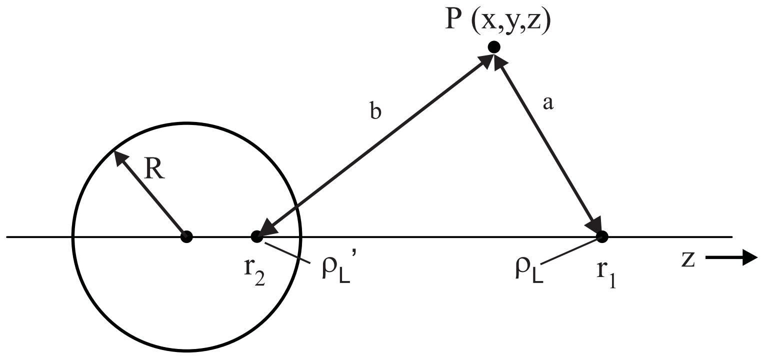


Abbildung 5.10: Spiegelung einer achsparallelen Linienladung an einem metallischen Zylinder bzw. einer zylindrischen Äquipotenzialfläche.

Für die Spiegelung einer achsparallelen Linienladung an einer zylindrischen Äquipotenzialfläche wird die Geometrie in Bild 5.10 verwendet. Die Stärke der Spiegelladung ist

$$\varrho_{\mathrm{L}'} = -\varrho_{\mathrm{L}} \quad , \tag{5.241}$$

der Abstand aus dem Mittelpunkt des Zylinders folgt dem Gesetz

$$r_2 \cdot r_1 = R^2 \quad . \tag{5.242}$$

Das Potenzial an einem beliebigen Punkt außerhalb des Zylinders resultiert mit den Abständen zur Originalladung und zur Spiegelladung a und b

$$V\{P\} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\left\{\frac{r_1}{R} \cdot \frac{b}{a}\right\} \tag{5.243}$$

5.3 Lösung der Poissongleichung

Wir waren bislang an ladungsfreien Gebieten interessiert und hatten dafür die Laplacegleichung zu lösen. Jetzt wollen wir auch Ladungsverteilungen zulassen.

5.3.1 Lösung der Poissongleichung mit der Greenschen Funktion

Die Greensche Funktion ist das normierte Potenzial einer Punktladung in einem bestimmten Raum mit festgelegten Randbedingungen. Das in der Elektrostatik gewonnene Ergebnis kann vorteilhaft in der Elektrodynamik zur Berechnung verschiedener Feldgrößen, z.B. bei Abstrahlungsproblemen von Antennen, eingesetzt werden.

Ausgangspunkt ist dabei die Lösung der Poissongleichung für eine δ-förmige Ladungsverteilung (Punktladung). Zusätzlich wollen wir noch verlangen, dass das Potenzial auf dem Rand δ_{K} des betrachteten Volumenbereichs K verschwindet. Die Geometrie ist in Abbildung 5.11 dargestellt.

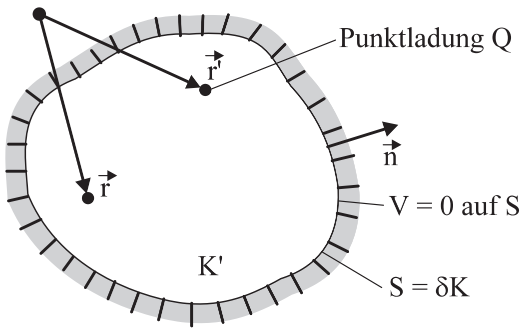


Abbildung 5.11: Zur Greenschen Funktion

Gesucht wird also das Potenzial $V\{\vec{r}\}$ im Gebiet K, das von einer Punktladung $\varrho\{\vec{r}\} = Q\delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{r}'\}$ am Ort $\vec{r}'$ erzeugt wird. Zusätzlich soll für Aufpunkte $\vec{r}$ auf dem Rand δ_{K} das Potenzial verschwinden, also $V\{\vec{r}\} = 0$ für $\vec{r} \in \delta_{\mathrm{K}}$. Wir schreiben $V\{\vec{r}\} = G\{\vec{r},\vec{r}'\} \cdot \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ und haben zu lösen

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{r}} G\{\vec{r},\vec{r}'\} = -\delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{r}'\} \qquad (5.244)}$$

mit

$$\boxed{G\{\vec{r},\vec{r}'\}\,|_{\delta_{\mathrm{K}}} = 0 \qquad (5.245)}$$

G wird als **Greensche Funktion** des Problems bezeichnet. Sie ist das Potenzial einer Punktladung am Ort $\vec{r}'$, das auf δ_K die Randbedingung $V = 0$ erfüllt.

Wird als Gebiet K der gesamte dreidimensionale Raum gewählt, so ist die **elektrostatische Greensche Funktion des freien Raumes**

$$G_\mathrm{R}\left\{\vec{r}, \vec{r}'\right\} = \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad . \tag{5.246}$$

Offenbar ist für $|\vec{r}| \to \infty$ die Randbedingung $G_\mathrm{R}\left\{\vec{r}, \vec{r}'\right\} = 0$ erfüllt. Zum Nachweis, ob eine Funktion $G\left\{\vec{r}, \vec{r}'\right\}$ wirklich eine Greensche Funktion ist, wird das Integral

$$\iiint\limits_K \left(\Delta_\mathrm{r} G\left\{\vec{r}, \vec{r}'\right\}\right) \cdot f\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3r = -\iiint\limits_K \delta^{(3)}\left\{\vec{r} - \vec{r}'\right\} \cdot f\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3r = -4\pi\, f\{\vec{r}'\} \tag{5.247}$$

berechnet. Dabei ist $f\{\vec{r}\}$ eine beliebige quadratintegrable Funktion mit der Eigenschaft $f\{\vec{r}\}|_{\delta_\mathrm{K}} = 0$.

Aus (5.247) resultiert also als Test für das Vorliegen einer Greenschen Funktion

$$\boxed{\iiint\limits_K \left(\Delta_\mathrm{r} G\left\{\vec{r}, \vec{r}'\right\}\right) \cdot f\{\vec{r}\}\,\mathrm{d}^3r \stackrel{!}{=} -f\{\vec{r}'\} \quad .} \tag{5.248}$$

Beispiel 5.3.1: Greensche Funktion des freien Raums

Für die Greensche Funktion des freien Raums (5.246) folgt mit partieller Integration:

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\Delta_\mathrm{r} \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|}\right) f\left\{\vec{r}\right\}\;\mathrm{d}^3r = -\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}_\mathrm{r} \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \circ \vec{\nabla}_\mathrm{r} f\left\{\vec{r}\right\}\;\mathrm{d}^3r$$

$$= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}_{\mathrm{r}'} \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \circ \vec{\nabla}_\mathrm{r} f\left\{\vec{r}\right\}\;\mathrm{d}^3r = \vec{\nabla}_{\mathrm{r}'} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi|\vec{r} - \vec{r}'|} \circ \vec{\nabla}_\mathrm{r} f\left\{\vec{r}\right\}\;\mathrm{d}^3r$$

$$= -\vec{\nabla}_{\mathrm{r}'} \circ \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{\nabla}_{\mathrm{r}} \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) f\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r \tag{5.249}$$

$$= -\vec{\nabla}_{\mathrm{r}'} \circ \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} f\{\vec{r}\} \frac{\vec{r}\,'-\vec{r}}{4\pi|\vec{r}\,'-\vec{r}|^3}\ \mathrm{d}^3 r$$

$$= -f\{\vec{r}\,'\}$$

Für die letzte Gleichheit haben wir die Ergebnisse aus den Abschnitten 1.4.2 und 1.4.3 benutzt. Insgesamt haben wir also

$$\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(-\Delta_{\mathrm{r}} \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\right) f\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r = f\{\vec{r}\,'\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{r}\,'\}\, f\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r \tag{5.250}$$

also

$$\Delta_{\mathrm{r}} \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = -\delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{r}\,'\} \tag{5.251}$$

und damit erfüllt (5.246) die Bedingungen der Greenschen Funktion (5.244).

Nach den Ergebnissen der Spiegelungsmethoden für ebene Flächen und für Kugelflächen ist die **elektrostatische Greensche Funktion für den Halbraum** $z > 0$

$$G_{\mathrm{H}}\{\vec{r},\vec{r}\,'\} = \frac{1}{4\pi}\left[\frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} - \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z+z')^2}}\right] \tag{5.252}$$

und die **elektrostatische Greensche Funktion für eine Kugel mit Radius** r_0 ist

$$G_{\mathrm{K}}\{\vec{r},\vec{r}\,'\} = \left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} - \frac{r_0}{|\vec{r}|}\frac{1}{\left|\frac{r_0^2}{|\vec{r}|^2}\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\right) \quad . \tag{5.253}$$

Nachdem wir einige Greensche Funktionen kennengelernt haben, wollen wir noch zeigen, dass die Greensche Funktion im Gebiet K symmetrisch ist, also

$$\boxed{G\left\{\vec{r},\vec{r}'\right\} = G\left\{\vec{r}',\vec{r}\right\}} \tag{5.254}$$

gilt. Diese Eigenschaft hat wichtige Auswirkungen im Hinblick auf die Reziprozität. Sie besagt, dass der Beobachtungspunkt $\vec{r}$ und der Quellpunkt $\vec{r}'$ ohne Auswirkung auf die Potenzialverteilung austauschbar sind. Zum Nachweis benutzen wir das **zweite Greensche Theorem**

$$\begin{aligned}\iiint\limits_K \left(\phi\Delta\psi - \psi\Delta\phi\right)\,\mathrm{d}^3r = d^2r \\ = \iint\limits_{S_\mathrm{K}} \left(\phi\vec{\nabla}\psi - \psi\vec{\nabla}\phi\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r}\end{aligned} \tag{5.255}$$

setzen

$$\phi\{\vec{r}\} = G\{\vec{r},\vec{x}\} \tag{5.256}$$

$$\psi\{\vec{r}\} = G\{\vec{r},\vec{x'}\} \tag{5.257}$$

und beachten, dass $\phi\left\{\vec{r}\right\}$ und $\psi\left\{\vec{r}\right\}$ als Greensche Funktionen auf dem Rand δ_K verschwinden. Es folgt

$$\begin{aligned}0 &= \iiint\limits_K \left[G\{\vec{r},\vec{x}\}\left(-\delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{x}'\}\right) - G\{\vec{r},\vec{x}'\}\left(-\delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{x}\}\right)\right]\ \mathrm{d}^3r \\ &= -\left(G\{x',x\} - G\{x,x'\}\right)\end{aligned} \tag{5.258}$$

und damit die Symmetrie (5.254).

5.3.2 Allgemeine Lösung der Poissongleichung

Ist die Greensche Funktion für ein Gebiet K mit $\vec{\nabla}\varepsilon = 0$ (homogenes Dielektrikum) bekannt, dann lässt sich die Lösung der Poissongleichung in K

$$\Delta V\left\{\vec{r}\right\} = -\frac{\varrho\left\{\vec{r}\right\}}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{5.259}$$

für eine vorgeschriebene Randbedingung

$$V\left\{\vec{r}\right\}|_{\delta_{\mathrm{K}}} = f\left\{\vec{r}\right\} \tag{5.260}$$

auf δ_{K} sofort angeben. Es ist nämlich

$$\boxed{V\left\{\vec{r}\right\} = \iiint\limits_{K} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} G\left\{\vec{r},\vec{r}'\right\} \varrho\left\{\vec{r}'\right\}\,\mathrm{d}^3 r' - \iint\limits_{S_{\mathrm{K}}} f\left\{\vec{r}'\right\} \vec{\nabla}_{\mathrm{r}'} G\left\{\vec{r},\vec{r}'\right\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}' \quad .} \tag{5.261}$$

Zum Nachweis wenden wir das zweite Greensche Theorem (5.255) auf $\phi\left\{\vec{r}\right\} = V\left\{\vec{r}\right\}$ und $\psi\left\{\vec{r}\right\} = G\left\{\vec{r},\vec{r}'\right\}$ an und erhalten für die linke Seite

$$\begin{aligned} &\iiint\limits_{K} \left(V\left\{\vec{r}'\right\}\left(-\delta^{(3)}\left\{\vec{r}' - \vec{r}\right\}\right) + G\left\{\vec{r},\vec{r}'\right\}\frac{\varrho\left\{\vec{r}'\right\}}{\varepsilon\varepsilon_0}\right)\,\mathrm{d}^3 r' \\ &\qquad = -V\{\vec{r}\} + \iiint\limits_{K} G\left\{\vec{r},\vec{r}'\right\} \cdot \frac{\varrho\left\{\vec{r}'\right\}}{\varepsilon\varepsilon_0}\,\mathrm{d}^3 r' \end{aligned} \tag{5.262}$$

und für die rechte Seite

$$\begin{aligned} \iint\limits_{S_{\mathrm{K}}} \left(V\{\vec{r}'\}\vec{\nabla}\{\vec{r},\vec{r}'\} - G\{\vec{r},\vec{r}'\}\vec{\nabla}\{\vec{r}'\}\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r}' &= \iint\limits_{S_{\mathrm{K}}} V\{\vec{r}'\}\vec{\nabla}G\{\vec{r},\vec{r}'\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}' \\ &= \iint\limits_{S_{\mathrm{K}}} f\{\vec{r}'\}\vec{\nabla}G\{\vec{r},\vec{r}'\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r}' \end{aligned} \tag{5.263}$$

denn auf dem Rand $\delta_{\rm K}$ gelten $G = 0$ und $V = f\{\vec{r}\}$. Aus (5.262) und (5.263) folgt unmittelbar (5.261).

Zwei Spezialfälle von (5.261) sind interessant. Für die allgemeine Lösung der Laplacegleichung $\Delta V = 0$ in raumladungsfreien Gebieten mit $\varrho = 0$ erhält man die allgemeine Lösung

$$V\{\vec{r}\} = -\iint\limits_{S_{\rm K}} f\{\vec{r}'\}\,\vec{\nabla}_{r'}G\{\vec{r},\vec{r}'\}\circ \mathrm{d}^2\vec{r}' \quad , \tag{5.264}$$

die eine vorgegebene Randbedingung $V|_{\delta_{\rm K}} = f\{\vec{r}\}$ auf dem Rand erfüllt. Ist andererseits das Potenzial auf dem Rand $\delta_{\rm K}$ gleich Null, dann vereinfacht sich die allgemeine Lösung der Poissongleichung zu

$$V\{\vec{r}\} = \iiint\limits_{K} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} G\{\vec{r},\vec{r}'\}\,\varrho\{\vec{r}'\}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{5.265}$$

In jedem Fall muss man aber die Greensche-Funktion G kennen, deren Auffinden im allgemeinen nicht ganz einfach ist.

Beispiel 5.3.1:

Wir wollen das Potenzial im ladungsfreien Außenraum $\big(\varrho\{\vec{r}\} = 0\big)$ *einer Kugel mit Radius* r_0 *berechnen, wenn* $f\{\vec{r}\} = f\{r_0,\theta,\varphi\}$ *auf der Kugeloberfläche vorgegeben ist. Wir gehen nach (5.264) vor und bemerken zunächst*

$$\vec{\nabla}_{\rm r'}G_{\rm K}\{\vec{r},\vec{r}'\}\circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \vec{\nabla}_{\rm r'}G_{\rm K}\circ\frac{-\vec{r}'}{|\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^2r' \quad , \tag{5.266}$$

weil der Normalenvektor vom Außenraum auf den Kugelmittelpunkt gerichtet ist. Mit $G_{\rm K}$ *nach (5.253) kann man nach einiger Rechnung zeigen, dass gilt*

$$\vec{\nabla}_{\rm r'}G_{\rm K}\circ\vec{n} = \vec{\nabla}_{\rm r'}G_K\circ\left.\frac{-\vec{r}'}{|\vec{r}'|}\right|_{r'=r_0} = \frac{-(r^2-r_0^2)}{4\pi r_0(r^2+r_0^2-2r_0r\cos\{\gamma\})^{3/2}} \tag{5.267}$$

mit

$$\cos\{\gamma\} = \frac{\vec{r} \circ \vec{r}'}{|\vec{r}||\vec{r}'|} \tag{5.268}$$
$$= \sin\{\theta\}\sin\{\theta'\}\Big(\cos\{\varphi\}\cos\{\varphi'\} + \sin\{\varphi\}\sin\{\varphi'\}\Big) + \cos\{\theta\}\cos\{\theta'\} \quad .$$

Auf der Kugeloberfläche ist $\mathrm{d}^2 r = {r_0}^2 \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$*, so dass das gesuchte Potenzial in Polarkoordinaten geschrieben werden kann*

$$V\{r,\theta,\varphi\} = -\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f\{r_0,\theta',\varphi'\}\,\frac{-(r^2-r_0^2)r_0^2}{4\pi r_0(r^2+r_0^2-2r_0 r\cos\{\gamma\})^{3/2}}\sin\{\theta'\}\,\mathrm{d}\theta'\,\mathrm{d}\varphi' \quad , \tag{5.269}$$

wobei $\cos\{\gamma\}$ *die Abhängigkeit nach (5.269) besitzt. Wegen der komplizierten Abhängigkeit des Integranden muss man das Integral im allgemeinen numerisch auswerten. Für Aufpunkte auf der* z*-Achse mit* $\theta = 0$ *reduziert sich die letzte Gleichung auf*

$$V\{r,\theta=0,\varphi\} = \frac{r^2-r_0^2}{4\pi r_0}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1}\frac{r_0^2\cdot f\{r_0,\theta',\varphi'\}}{(r^2+r_0^2-2r_0 r\cos\{\theta'\})^{3/2}}\,\mathrm{d}\{\cos\{\theta'\}\}\,\mathrm{d}\varphi' \tag{5.270}$$

Dieses Integral lässt sich zum Beispiel für zwei auf verschiedenem Potenzial befindliche Halbkugeln geschlossen auswerten.

5.4 Lösung der zweidimensionalen Poissongleichung

Ist das Potenzial einer Anordnung auf Grund von Symmetrien nur noch von zwei Raumrichtungen abhängig, spricht man von zweidimensionalen Potenzialproblemen. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann davon ausgegangen werden, dass das Problem bei kartesischen Koordinaten nicht von der z-Richtung abhängt. Tatsächlich lässt sich der im folgenden dargestellte Sachverhalt auch auf andere Koordinatensysteme übertragen.

5.4.1 Zweidimensionale Potenzialprobleme

Wie bereits gesagt sind das Potenzial und die Ladungsverteilung von der z-Koordinate unabhängig, also $V\{\vec{r}\} = V\{x,y\}$ und $\varrho\{\vec{r}\} = \varrho\{x,y\}$. Die Poissongleichung vereinfacht sich zu

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = -\frac{\varrho\{x,y\}}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad , \tag{5.271}$$

und in raumladungsfreien Bereichen gilt die Laplacegleichung

$$\frac{\partial^2 V\{x,y\}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V\{x,y\}}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{5.272}$$

Wir betrachten nun eine komplexe Variable

$$\mathcal{Z} = x + iy\,, \quad x = \frac{1}{2}(\mathcal{Z} + \mathcal{Z}^*)\,, \quad y = \frac{-i}{2}(\mathcal{Z} - \mathcal{Z}^*) \tag{5.273}$$

in der komplexen Gaußschen Zahlenebene und eine Abbildung

$$V = \Phi\{x,y\} + i\,\Psi\{x,y\} = f\{\mathcal{Z}\} = f\{x + i\,y\} \tag{5.274}$$

der komplexen Zahlenebene auf sich. Für eine analytische Funktion $f\{\mathcal{Z}\}$ ist die Abbildung winkeltreu, und es müssen die

Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi\{x,y\}}{\partial x} &= \frac{\partial\Psi\{x,y\}}{\partial y} \\ \frac{\partial\Phi\{x,y\}}{\partial y} &= -\frac{\partial\Psi\{x,y\}}{\partial x} \end{aligned} \tag{5.275}$$

gelten. Hieraus folgt durch Differentiation nach $\partial/\partial x$ bzw. $\partial/\partial y$

$$\frac{\partial^2\Phi\{x,y\}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi\{x,y\}}{\partial y^2} = 0 \tag{5.276}$$

und

$$\frac{\partial^2 \Psi\{x,y\}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi\{x,y\}}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{5.277}$$

Der Realteil $\Phi = \mathrm{Re}\{f\{\mathcal{Z}\}\}$ und Imaginärteil $\Psi = \mathrm{Im}\{f\{\mathcal{Z}\}\}$ jeder analytischen Funktion genügt der Laplacegleichung, und man kann folglich den Real- oder dem Imaginärteil einer analytischen Funktion als Potenzialverteilung V_R eines zweidimensionalen elektrostatischen Problems auffassen. Die Aufgabe besteht nun darin, eine mögliche Elektrodenanordnung zu finden, mit der die Potenzialverteilung realisiert werden kann. Dies gelingt offenbar durch Anbringen von (infinitesimal dünnen) Elektroden auf den Äquipotenzialflächen.
Das elektrische Feld wird aus $\vec{E} = \vec{\nabla} V_\mathrm{R}$ bestimmt. Auch die Feldstärke ist nur von den zwei Koordinatenrichtungen abhängig und kann komplex mit

$$E = E_\mathrm{x} + iE_\mathrm{y} \tag{5.278}$$

zusammengefasst werden. Falls Φ als Potenzial V_R aufgefasst wird, gilt $E_\mathrm{x} = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi$ und $E_\mathrm{y} = -\frac{\partial}{\partial y}\Phi$. In der komplexen Darstellung folgt mit (5.275)

$$-E^* = \frac{\partial}{\partial x}\Phi - i\frac{\partial}{\partial y}\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + \frac{\partial}{\partial y}\Psi\right) - i\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Phi - \frac{\partial}{\partial x}\Psi\right) \tag{5.279}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}\Phi + i\frac{\partial}{\partial x}\Psi\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\Psi - i\frac{\partial}{\partial y}\Phi\right) \tag{5.280}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)(\Phi + i\Psi) \quad . \tag{5.281}$$

Beim Übergang in die komplexe Zahlenebene bietet es sich an, nicht länger mit x und y zu rechnen, sondern gleich die Variable $\mathcal{Z}$ zu verwenden. Dazu ist es vorteilhaft, zunächst den **Nabla-** und **Laplaceoperator** umzuschreiben in

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla}_\mathcal{Z} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\vec{\nabla}^*_\mathcal{Z} &= \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right) \\
\Delta_\mathcal{Z} &= \vec{\nabla}_\mathcal{Z} \circ \vec{\nabla}^*_\mathcal{Z} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \quad .
\end{aligned} \tag{5.282}$$

Das zunächst recht merkwürdig erscheinende Minuszeichen ist auf die Verwendung der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (5.275) bei der Berechnung des komplexen elektrischen Feldes aus dem komplexen Potenzial zurückzuführen.
Anwenden des komplexen Nabla-Operators auf das komplexe Potenzial muss das komplexe elektrische Feld ergeben. Es gilt die bekannte Formel

$$\boxed{E^* = -\vec{\nabla}_{\mathcal{Z}} V \quad .} \tag{5.283}$$

Wird der Realteil von V als Potenzial identifiziert, spricht man vom **Originalproblem**, im anderen Fall, also wenn der Imaginärteil von V als Potenzial betrachtet wird, handelt es sich um das sogenannte **Duale Problem**. Das elektrische Feld resultiert dann aus $E_\mathrm{x} = -\frac{\partial}{\partial x}\Psi$ und $E_\mathrm{y} = -\frac{\partial}{\partial y}\Psi$, was ähnlich wie oben zu

$$\boxed{E^* = -i\vec{\nabla}_{\mathcal{Z}} V} \tag{5.284}$$

zusammengefasst werden kann.

Beispiel 5.4.1: Plattenkondensator

Die analytische Funktion

$$V = V_0 \frac{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2 - \mathcal{Z}_1} = V_0 \frac{\mathcal{Z} - \mathcal{Z}_1}{d} \tag{5.285}$$

mit reellem d und V_0 führt auf das Potenzial des Plattenkondensators (2.152). Es resultiert zunächst

$$V = \frac{V_0}{d}\left[x - x_1 + i(y - y_1)\right] \tag{5.286}$$

wie in Abbildung 5.12 zu sehen ist.

Die Elektroden werden durch $x = x_1$ bzw. $x = x_1 + d$ beschrieben. Daraus resultiert sofort $\phi = konst$ für $x = konst$. Es handelt sich hier also um ein Originalproblem und das reelle Potenzial folgt aus $V_R = \mathrm{Re}\{V\} = V_0 \frac{x-x_1}{d}$.

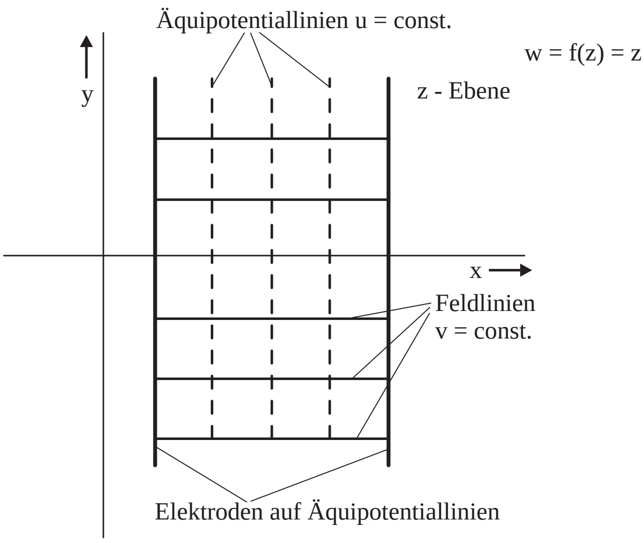


Abbildung 5.12: Beschreibung eines Plattenkondensators durch die analytische Funktion $V = f\{\mathcal{Z}\} = \frac{\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_1}{\mathcal{Z}_2-\mathcal{Z}_1} \cdot V_0$

Wenn die Beschreibung der Elektroden durch $y = y_1$ bzw. $y = y_1 + d$ erfolgen muss, der Kondensator also um 90^o in der x-y-Ebene gedreht liegt, folgt $\mathrm{Im}\{V\} = konst$ auf den Elektroden und es handelt sich um das duale Problem. Das reelle Potenzial folgt dann aus $V_\mathrm{R} = \mathrm{Im}\{V\} = V_0 \frac{y-y_1}{d}$.
Die elektrische Feldstärke erhält man in diesem Beispiel als negativen Gradienten des Potenzials

$$\vec{E}\{x,y\} = -\vec{\nabla} V_\mathrm{R} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \vec{e}_\mathrm{x} - \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \vec{e}_\mathrm{y} \quad . \tag{5.287}$$

In der komplexen Darstellung folgt für das Originalproblem aus (5.283) und (5.285)

$$E^* = E_\mathrm{x} + iE_\mathrm{y} = -\vec{\nabla}_\mathcal{Z} V = -\frac{V_0}{d} \quad . \tag{5.288}$$

Die **Feldlinien** in zweidimensionalen Feldern sind gerade durch die Flächen

$$\Psi\left\{x,y\right\} = \text{const.} \tag{5.289}$$

gegeben, denn wegen

$$\vec{\nabla}\Phi \circ \vec{\nabla}\Psi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\frac{\partial\Psi}{\partial y} = 0 \tag{5.290}$$

sind die Linienscharen Φ =const. und Ψ =const. zueinander orthogonal. Im betrachteten Beispiel des Plattenkondensators sind die Feldlinien durch y =const. gegeben.

Beispiel 5.4.2: Schneide auf konstantem Potenzial

Wir betrachten als weiteres Beispiel die analytische Funktion

$$V = V_0 \operatorname{arcosh}\left\{\frac{\mathcal{Z}}{a}\right\} = V_0 \cosh^{-1}\left\{\frac{\mathcal{Z}}{a}\right\} \quad . \tag{5.291}$$

Hierfür ist

$$\mathcal{Z} = a\cosh\left\{\frac{V}{V_0}\right\} = a\cosh\left\{\frac{\Phi}{V_0} + i\,\frac{\Psi}{V_0}\right\} \tag{5.292}$$

$$= a\cos\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\}\cosh\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\} + i\,a\sin\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\}\sinh\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\} \tag{5.293}$$

und damit

$$x = a\cos\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\}\cosh\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\}, \qquad y = a\sin\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\}\sinh\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\} \quad . \tag{5.294}$$

Außerdem gilt

$$\frac{x^2}{a^2\cosh^2\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\}} + \frac{y^2}{a^2\sinh^2\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\}} = \cos^2\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\} + \sin^2\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\} = 1 \tag{5.295}$$

und

$$\frac{x^2}{a^2\cos^2\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\}} - \frac{y^2}{a^2\sin^2\left\{\frac{\Psi}{V_0}\right\}} = \cosh^2\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\} - \sinh^2\left\{\frac{\Phi}{V_0}\right\} = 1 \quad . \tag{5.296}$$

Wir fassen $\Phi\{x,y\}$ als Potenzial und $\Psi\{x,y\}$ als zugehörige Feldlinien auf. Die Äquipotenziallinien $\Phi\{x,y\}$ =const. sind nach Gleichung (5.295) konzentrische Ellipsen und die Feldlinien $\Psi\{x,y\}$ =const. sind nach (5.296) konzentrische Hyperbeln bzw. im Dreidimensionalen elliptische und hyperbolische Zylinder. Die Kurvenscharen sind in Abbildung 5.13 dargestellt. Speziell erhält man für das Potenzial einer Schneide der Breite $2a$, die sich auf konstantem Potenzial befindet, elliptische Äquipotenziallinien und hyperbolische Feldlinien.

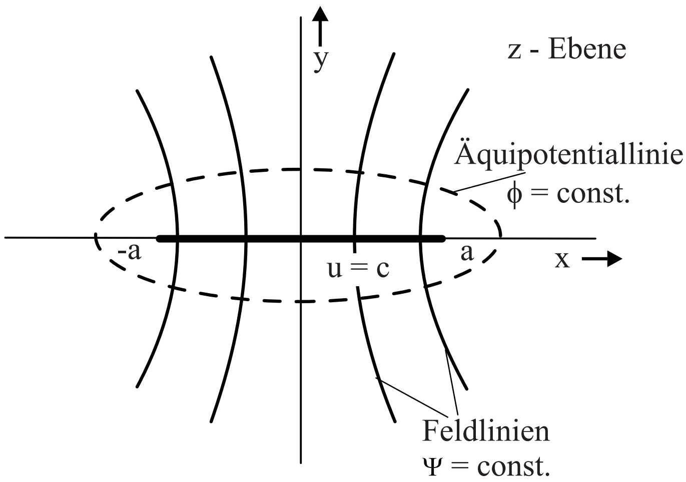


Abbildung 5.13: Äquipotenziallinien und Feldlinien einer auf konstantem Potenzial liegenden Schneide $y = 0, -a \leq x \leq a$.

5.4.2 Zur Lösung zweidimensionaler Potenzialaufgaben mit konformen Abbildungen

Bisher haben wir ausgehend von einer analytischen Funktion die zugehörige Potenzialverteilung untersucht und mögliche Lagen von Elektroden auf Äquipotenzialflächen angegeben. Die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einer vorgegebenen Elektrodenanordnung, d. h. aus Äquipotenzialflächen, auf das Potenzial zu schließen, ist viel komplizierter. Die hier zu praktizierende Methode besteht darin, mittels einer geeigneten konformen Abbildung die

Elektrodenkonfiguration auf eine bekannte Anordnung zu transformieren, dort das Potenzial zu berechnen und dann zurückzutransformieren.

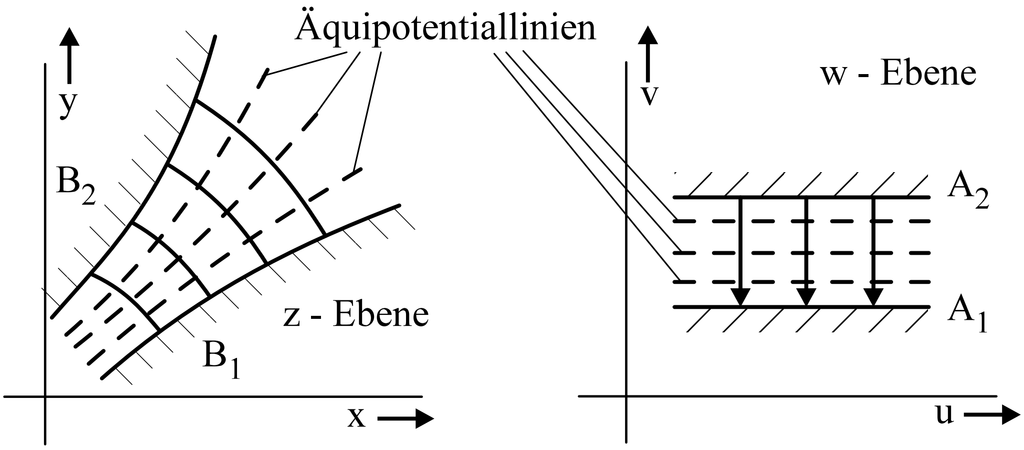


Abbildung 5.14: Konforme Abbildung zwischen den komplexen Zahlenebenen $\mathcal{Z}$ und $\mathcal{W}$.

Es sei also in der komplexen $\mathcal{Z}$-Ebene nach Abbildung 5.14 eine Elektrodenanordnung B_1, B_2 gegeben. Gesucht ist das (reelle) Potenzial $\Phi\{x, y\}$, das auf den Elektroden einen konstanten Wert annehmen muss und außerdem die Potenzialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \tag{5.297}$$

erfüllen muss. Wir bilden nun vermöge einer konformen Abbildung

$$\mathcal{W} = f\{\mathcal{Z}\} = u + iv \tag{5.298}$$

die Elektrodenkonfiguration B_1, B_2 der $\mathcal{Z}$-Ebene auf die Elektrodenkonfiguration A_1, A_2 der $\mathcal{W}$-Ebene ab. Die Konfiguration A_1, A_2 sei so gestaltet, dass wir die Lösung des Potenzials in der $\mathcal{W}$-Ebene, die wir mit $\Phi\{u, v\}$ bezeichnen, bereits kennen. Wir ordnen der Potenzialfunktion $\Phi\{u, v\}$ vermöge der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (5.275) eine reelle Funktion $\Psi\{u, v\}$ zu, so dass das komplexe Potenzial

$$V\{u, v\} = \Phi\{x, y\} + i\,\Psi\{x, y\} = \Phi\{\mathcal{W}\} + i\Psi\{\mathcal{W}\} = V\{\mathcal{W}\} \tag{5.299}$$

eine analytische Funktion darstellt. Dann bilden wir die Funktion

$$V\{\mathcal{W}\} = V\{f\{\mathcal{Z}\}\} \quad , \tag{5.300}$$

die als analytische Funktion einer analytischen Funktion selbst wieder analytisch ist. Dies bedeutet, dass ihr Realteil

$$\Phi\{x,y\} = \mathrm{Re}\Big\{V\{\mathcal{W}\}\Big\} = \mathrm{Re}\Big\{V\Big\{f\{\mathcal{Z}\}\Big\}\Big\} \tag{5.301}$$

die Laplacegleichung (5.297) erfüllt. Da $\Phi\{u,v\}$ auf den Elektroden A_1, A_2 konstant ist, muss $\Phi\{x,y\}$ nach (5.300) und damit das Urbild wegen (5.298) auf B_1, B_2 konstant sein. Die Funktion

$$\Phi\{x,y\} = \mathrm{Re}\Big\{V\Big\{f\{\mathcal{Z}\}\Big\}\Big\} \tag{5.302}$$

ist also Lösung des Potenzialproblems. Man spricht beim Einsetzen der Abbildung (5.298) in die komplexe Potenzialfunktion auch von der **Rücktransformation** in die $\mathcal{Z}$-Ebene. Wir werden keine systematische Methode zum Auffinden einer geeigneten Abbildung $f\{\mathcal{Z}\}$ behandeln, sondern nur zwei die Methode veranschaulichende Beispiele vorstellen.

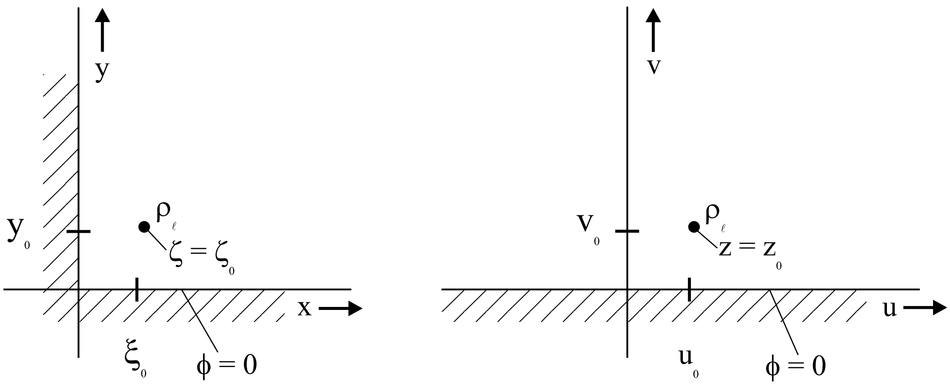


Abbildung 5.15: Linienladung ϱ_L parallel zur Kante einer geerdeten rechtwinkligen Ecke in der $\mathcal{W}$-Ebene und Abbildung in die $\mathcal{Z}$-Ebene

Beispiel 5.4.1: Linienladung in einer Ecke

In einer geerdeten, unendlich ausgedehnten, rechtwinkligen Ecke befinde sich nach Abbil-

dung 5.15 , parallel zur Kante angeordnet, eine Linienladung ϱ_L. Die konforme Abbildung

$$\mathcal{W} = f\{\mathcal{Z}\} = \mathcal{Z}^2 = x^2 - y^2 + i2xy \tag{5.303}$$

bildet den ersten Quadranten der $\mathcal{Z}$-Ebene, also $x > 0$, $y > 0$, auf die obere Halbebene $v > 0$ der $\mathcal{W}$-Ebene ab. Die Halbgeraden $x > 0, y = 0$ und $y > 0, x = 0$ werden auf die u-Achse abgebildet. Damit folgt die Randbedingung $\Phi\{u, v = 0\} = 0$. Die Linienladung gelangt an den Ort $\mathcal{W}_0 = \mathcal{Z}_0^2$. Durch die konforme Abbildung befindet sich jetzt eine Linienladung bei $\mathcal{W}_0$ vor einer geerdeten Halbebene $v = 0$. Eine Linienladung im freien Raum hat das Potenzial (vergl. Abschnitt 1.3.2)

$$\Phi\{u, v\} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left\{\frac{1}{\sqrt{(u-u_0)^2 + (v-v_0)^2}}\right\} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0} \ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{W} - \mathcal{W}_0|}\right\} \tag{5.304}$$

mit $\mathcal{W}_0 = u_0 + iv_0$. Die Randbedingung $\Phi\{u, v = 0\} = 0$ lässt sich durch Anbringen einer Spiegellinienladung $-\varrho_\mathrm{L}$ bei $\mathcal{W}^* = u_0 - iv_0$ erfüllen. Das resultierende Potenzial ist dann

$$\Phi\{u, v\} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{W} - \mathcal{W}_0|}\right\} - \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{W} - \mathcal{W}_0^*|}\right\} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{|\mathcal{W} - \mathcal{W}_0^*|}{|\mathcal{W} - \mathcal{W}_0|}\right\} \quad . \tag{5.305}$$

Mit dem

komplexen Logarithmus

$$\mathrm{Ln}\{\mathcal{W}\} = \ln\{|\mathcal{W}|\} + i\arg\{\mathcal{W}\} \tag{5.306}$$

finden wir sofort das zugehörige komplexe Potenzial in der $\mathcal{W}$-Ebene

$$V\{\mathcal{W}\} = \Phi\{u, v\} + i\,\Psi\{u, v\} = \frac{\varrho_\mathrm{L}}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}\left\{\frac{\mathcal{W} - \mathcal{W}_0^*}{\mathcal{W} - \mathcal{W}_0}\right\} \quad . \tag{5.307}$$

Mit der Abbildung (5.303) erhalten wir nach (5.300)

$$V\{\mathcal{Z}\} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}\left\{\frac{\mathcal{Z}^2-\mathcal{Z}_0^{*2}}{\mathcal{Z}^2-\mathcal{Z}_0^2}\right\} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}\left\{\frac{(\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_0^*)(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0^*)}{(\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_0)(\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0)}\right\} \tag{5.308}$$

$$= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\left(\mathrm{Ln}\left\{\frac{1}{\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_0}\right\}+\mathrm{Ln}\left\{\frac{1}{\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0}\right\}-\mathrm{Ln}\left\{\frac{1}{\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_0^*}\right\}-\mathrm{Ln}\left\{\frac{1}{\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0^*}\right\}\right) .$$

Hieraus folgt für das gesuchte Potenzial in der $\mathcal{Z}$-Ebene

$$\Phi\{x,y\} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\left(\ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_0|}\right\}+\ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0|}\right\}-\ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{Z}-\mathcal{Z}_0^*|}\right\}-\ln\left\{\frac{1}{|\mathcal{Z}+\mathcal{Z}_0^*|}\right\}\right) . \tag{5.309}$$

Das Potenzial der Linienladung bei $\mathcal{Z}_0$ vor einer geerdeten Ecke wird also gemäß Abbildung 5.16 durch die Linienladung bei $\mathcal{Z}_0$ und drei weiteren Linienladungen bei $-\mathcal{Z}_0$, $\mathcal{Z}_0^*$ und $-\mathcal{Z}_0^*$ aufgebaut.

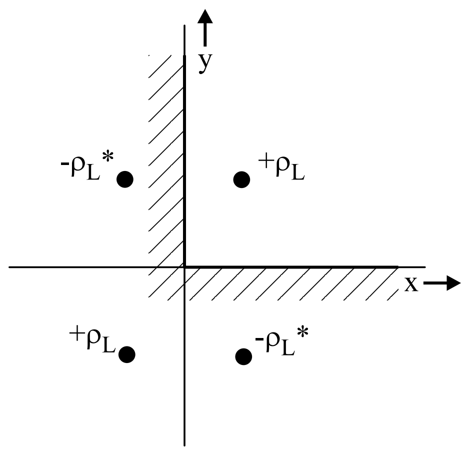


Abbildung 5.16: Anordnung der Spiegelladungen an einer geerdeten Ecke:

Beispiel 5.4.2: Linienladung im Plattenkondensator

Als zweites Beispiel untersuchen wir nach Abbildung 5.17 eine Linienladung in der Mitte eines geerdeten, unendlich ausgedehnten Plattenkondensators.

Die Abbildung (k reell)

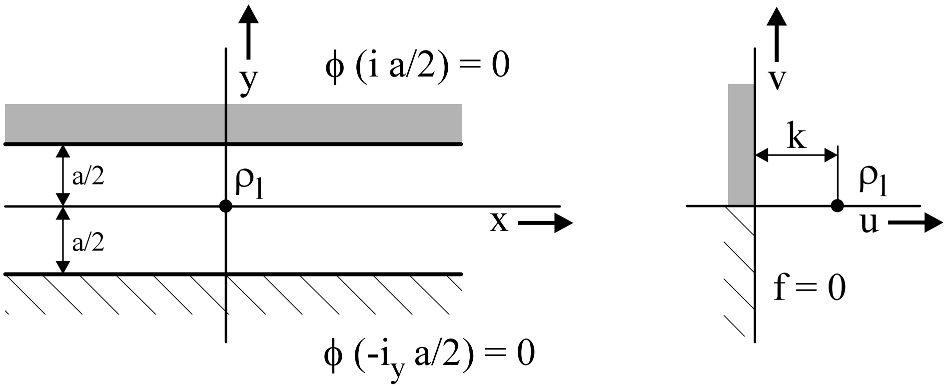


Abbildung 5.17: Linienladung in der Mitte eines Plattenkondensators in der $\mathcal{Z}$-Ebene und äquivalentes Problem in der $\mathcal{W}$-Ebene

$$\mathcal{W} = f\{\mathcal{Z}\} = k\ \exp\left\{\pi\frac{\mathcal{Z}}{a}\right\} = k\ \exp\left\{\pi\frac{x}{a}\right\}\left(\cos\left\{\frac{\pi y}{a}\right\} + i\ \sin\left\{\frac{\pi y}{a}\right\}\right) = u + i\,v \tag{5.310}$$

bildet den Innenraum des Kondensators, also den Streifen $-a/2 \le y \le a/2$, $-\infty < x < \infty$ *auf die Halbebene* $u \ge 0$ *der komplexen* $\mathcal{W}$*-Ebene ab. Die Geraden* $y = \pm a/2$, $-\infty < x < \infty$ *werden in die Halbgeraden*

$$u = k\exp\left\{\pi\frac{x}{a}\right\}\cos\left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\} = 0\,, \quad v = k\exp\left\{\pi\frac{x}{a}\right\}\sin\left\{\pm\frac{\pi}{2}\right\} = \pm k\exp\left\{\pi\frac{x}{a}\right\} \tag{5.311}$$

überführt. Die Linienladung gelangt von $x = y = 0$ *nach* $u = k$, $v = 0$.

Für diese Anordnung einer Linienladung ϱ_{L} *bei* $u = k$ *vor einer geerdeten Halbebene bei* $u = 0$ *ist wie beim vorangegangenen Beispiel das komplexe Potenzial durch*

$$V\{\mathcal{W}\} = \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{2\pi\varepsilon_0}\mathrm{Ln}\left\{\frac{\mathcal{W}+k}{\mathcal{W}-k}\right\} \tag{5.312}$$

gegeben. Rücktransformation mit (5.310) liefert das komplexe Potenzial in der $\mathcal{Z}$*-Ebene und damit das gesuchte Potenzial* $\Phi\{x, y\}$

$$\begin{aligned}\Phi\{x,y\} = \mathrm{Re}\Big\{V\{\mathcal{Z}\}\Big\} &= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\left|\frac{(u+k)^2+v^2}{(u-k)^2+v^2}\right|\right\} \\ &= \frac{\varrho_{\mathrm{L}}}{4\pi\varepsilon_0}\ln\left\{\frac{1+\exp\left\{\frac{2\pi x}{a}\right\}+2\exp\left\{\frac{\pi x}{a}\right\}\cos\left\{\frac{\pi y}{a}\right\}}{1+\exp\left\{\frac{2\pi x}{a}\right\}-2\exp\left\{\frac{\pi x}{a}\right\}\cos\left\{\frac{\pi y}{a}\right\}}\right\} \quad .\end{aligned} \tag{5.313}$$

Bisher haben wir den Fall betrachtet, dass die Abbildung $\mathcal{W} = f\{\mathcal{Z}\}$ bekannt ist, bei der Äquipotenzialflächen der $\mathcal{Z}$-Ebene in die $\mathcal{W}$-Ebene, in der die Lösung der Potenzialgleichung bekannt ist, transformiert werden. Man spricht hier von der Transformation auf ein bekanntes Problem. Die Rücktransformation erfolgt durch Einsetzen von $f\{\mathcal{Z}\}$ anstelle von $\mathcal{W}$. Manchmal ist aber auch nur die nicht analytisch umkehrbare Funktion $\mathcal{Z} = g\{\mathcal{W}\}$ für die Transformation auf das bekannte Problem bekannt. Formal wird dann genau wie oben vorgegangen. Zu jedem Punkt in der $\mathcal{W}$-Ebene gibt es einen Punkt in der $\mathcal{Z}$-Ebene. Man kann $\mathcal{Z} = g\{\mathcal{W}\}$ als parametrische Darstellung von $\mathcal{Z}$ mit dem Parameter $\mathcal{W}$ auffassen. Die Berechnung des elektrischen Feldes erfolgt nun nach Anwendung der Kettenregel auf

$$E^* = -\vec{\nabla}_{\mathcal{Z}}V\{\mathcal{W}\} = -(\vec{\nabla}_{\mathcal{Z}}\mathcal{W})\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}V \tag{5.314}$$

für das

Originalproblem

$$E^*\{\mathcal{Z}\} = -\left.\frac{\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}V\{\mathcal{W}\}}{\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}g\{\mathcal{W}\}}\right|_{\mathcal{Z}=g\{\mathcal{W}\}} \quad . \tag{5.315}$$

Der hierbei verwendete Zusammenhang

$$\vec{\nabla}_{\mathcal{Z}}\mathcal{W} = (\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}g)^{-1} \tag{5.316}$$

folgt aus der (mathematisch nicht einwandfreien) Umformung

$$\vec{\nabla}_{\mathcal{Z}}\mathcal{W} = \frac{\partial}{\partial \mathcal{Z}}\mathcal{W} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \mathcal{W}}\mathcal{Z}} = \frac{1}{\frac{\partial}{\partial \mathcal{W}}g} = \frac{1}{\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}g} \quad . \tag{5.317}$$

Analog ergibt sich für das

Duale Problem

$$E^* = i\,\frac{\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}V}{\vec{\nabla}_{\mathcal{W}}g}\bigg|_{\mathcal{Z}=g} \quad . \tag{5.318}$$

Kapitel 6

Zeitabhängige Felder

6.1 Elektromagnetische Gesetze für zeitabhängige Felder

Bislang hatten wir bis auf das Faradaysche Induktionsgesetz alle anderen elektromagnetischen Gesetze für statische Bedingungen $\partial \varrho_{\mathrm{V}} / \partial t = 0$ formuliert. In der folgenden Diskussion wollen wir prüfen, inwieweit die Beziehungen im allgemeinen Fall zeitlich veränderlicher Felder gültig bleiben.

6.1.1 Das Faradaysche Induktionsgesetz

Faraday fand im Jahre 1831, dass ein sich zeitlich änderndes Magnetfeld eine elektromotorische Kraft erzeugt, die in einem geschlossenen Leiterweg zu einem Stromfluss führt. Die elektromotorische Kraft emf ist als Linienintegral

$$\mathrm{emf} = \oint\limits_{C} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \tag{6.1}$$

definiert. Das **Faradaysche Gesetz** besagt

$$\boxed{\mathrm{emf} = \oint\limits_{C} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint\limits_{S_{\mathrm{C}}} \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{S} \quad , \qquad (6.2)}$$

wobei $\vec{E} = \vec{E}\,\{\vec{r}, t\}$ und $\vec{B} = \vec{B}\,\{\vec{r}, t\}$ gelten.

Hierbei ist C die orientierte Randkurve der Fläche S_{C}, die Richtungen von $\mathrm{d}\vec{\ell}$ und $\mathrm{d}^2\vec{r} \Longrightarrow S$ hängen über die Rechtsschraubenregel zusammen. Wenn die Fläche S_{C} zeitlich konstant ist, kann man auch schreiben

$$\oint\limits_C \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = -\iint\limits_{S_{\mathrm{C}}} \frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \quad . \tag{6.3}$$

Vermöge des Stokesschen Satzes lässt sich das Kurvenintegral in ein Flächenintegral umschreiben

$$\oint\limits_C \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint\limits_{S_{\mathrm{C}}} \vec{\nabla} \times \vec{E} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \quad , \tag{6.4}$$

und der Vergleich mit (6.3) liefert die

differentielle Form des Faradayschen Gesetzes

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{6.5}$$

denn die Beziehungen gelten für alle Flächen S. Das Minuszeichen deutet an, dass die elektromotorische Kraft einen Stromfluss in die Richtung erzeugt, die der Magnetfeldänderung entgegenwirkt. Dieses ist die Lenzsche Regel.

6.1.2 Coulomb- und Gauß-Gesetz

Wir hatten die elektrische Ladung für ruhende Körper definiert. Wir wollen annehmen, dass sich die Ladung für bewegte Körper nicht ändert. Da sich aber erfahrungsgemäß die elektrische Kraftwirkung mit endlicher Geschwindigkeit ausbreitet, kann das Coulombgesetz

$$\vec{F}_{Q'} = \frac{Q'Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{r}\,' - \vec{r}\,\{t\}}{|\vec{r}\,' - \vec{r}\,\{t\}\,|^3} \tag{6.6}$$

für bewegte Ladungen $Q = Q\,\{\vec{r}\,\{t\}\}$ nicht mehr gültig bleiben. Das Gaußsche Gesetz

$$\boxed{\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{\varrho_{\mathrm{V}}}{\varepsilon_0} \quad ,} \tag{6.7}$$

welches bekanntlich allgemeiner ist, muss nicht unbedingt dieser Einschränkung unterliegen. Wir nehmen an, dass es auch im zeitabhängigen Fall weiterhin zutrifft. Dies lässt sich insbesondere dadurch begründen, dass hier das Feld und die Raumladung in einem Punkt miteinander verknüpft werden, so dass eine Ausbreitung nicht berücksichtigt werden muss.

6.1.3 Biot-Savart und Ampère-Gesetz

Wegen der zeitlich verzögerten Wirkung der magnetischen Kraft - man spricht von Nahewirkung - verliert auch das Biot-Savart Gesetz für zeitlich veränderliche Ströme $\vec{j}_{\mathrm{V}} = \vec{j}_{\mathrm{V}}\ \{\vec{r}, t\}$ seine Gültigkeit. Aber auch das aus dem Biot-Savart Gesetz gewonnene und somit allgemeinere Ampèresche Durchflutungsgesetz kann nicht allgemein gültig sein, denn aus

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\mathrm{V}} \tag{6.8}$$

folgt mit der Kontinuitätsgleichung

$$-\frac{\partial \varrho_{\mathrm{V}}}{\partial t} = \vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathrm{V}} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \equiv 0 \quad . \tag{6.9}$$

Demnach kann das Ampèresche Gesetz nur im statischen Fall $\partial \varrho_{\mathrm{V}} / \partial t = 0$ gültig sein. Maxwell machte 1865 den Vorschlag, das Ampèresche Gesetz durch ein allgemeineres zu ersetzen. Erweitert man (6.8) versuchsweise durch Addition eines zunächst unbekannten Vektorfeldes $\mu_0 \vec{j}_{\mathrm{D}}\ \{\vec{r}\}$ zu

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j}_{\mathrm{V}} + \vec{j}_{\mathrm{D}}) \quad , \tag{6.10}$$

dann erfordert $\vec{\nabla} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) = 0$ zusammen mit der Kontinuitätsgleichung und dem Gaußschen Gesetz

$$\vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathrm{D}} = -\vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathrm{V}} = \frac{\partial \varrho_{\mathrm{V}}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \vec{E} = \varepsilon_0 \vec{\nabla} \circ \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \tag{6.11}$$

Die einfachste Lösung für $\vec{j}_\mathrm{D}$ ist offenbar

$$\vec{j}_\mathrm{D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \tag{6.12}$$

Hiermit wird aus dem Ampèreschen Gesetz

$$\boxed{\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_\mathrm{V} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad .} \tag{6.13}$$

Die Größe

$$\vec{j}_\mathrm{D} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \tag{6.14}$$

heißt **Verschiebungsstromdichte**.

6.1.4 Divergenz der magnetischen Kraftflussdichte

Aus dem Faradayschen Gesetz (6.5) folgt

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \{\vec{r}, t\} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \circ \vec{B} \{\vec{r}, t\} \equiv 0 \quad , \tag{6.15}$$

da die Divergenz einer Rotation verschwindet. Dies bedeutet, dass die zeitliche Änderung möglicherweise vorhandener und durch $\vec{\nabla} \circ \vec{B}$ charakterisierter magnetischer Ladungen verschwindet. Es lassen sich keine magnetischen Ladungen erzeugen. Aus dem Biot-Savart Gesetz hatten wir aber für statische Felder $\vec{\nabla} \circ B \{\vec{r}\} = 0$ abgeleitet. Wir wollen im Einklang mit (6.15) annehmen, dass

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} \{\vec{r}, t\} \equiv 0 \tag{6.16}$$

generell gültig ist, also keine magnetischen Ladungen existieren.

6.2 Die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum

Die diskutierten Ergebnisse lassen sich in folgenden Gleichungen zusammenfassen:

1. **Modifiziertes Ampèregesetz**

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_\mathrm{V} + \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} \right) \quad , \tag{6.17}$$

2. **Faraday Gesetz**

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad , \tag{6.18}$$

3. **Gaußsches Gesetz**

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_\mathrm{V} \quad , \tag{6.19}$$

4.

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \quad . \tag{6.20}$$

Diese Maxwellschen Gleichungen nimmt man als Ausgangsaxiome für die Elektrodynamik. Es sind acht (gekoppelte) partielle Differentialgleichungen für die zehn Größen

$$E_\mathrm{x}, E_\mathrm{y}, E_\mathrm{z}, B_\mathrm{x}, B_\mathrm{y}, B_\mathrm{z}, j_\mathrm{x}, j_\mathrm{y}, j_\mathrm{z}, \varrho_\mathrm{V} \quad , \tag{6.21}$$

die von den Ortskoordinaten $\vec{r} = (x, y, z)^T$ und der Zeit t abhängen. Es ist zu beachten, dass die Raumladungsdichte und die Stromdichte nicht unabhängig sind, sondern über die

Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_\mathrm{V} \, \{\vec{r}, t\} + \vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathrm{V} \, \{\vec{r}, t\} = 0 \tag{6.22}$$

miteinander verknüpft sind. Damit steht die neunte Gleichung zur Lösung des Differentialgleichunssystems zur Verfügung. Bei Vorgabe einer Größe als Quelle lassen sich somit (wenigstens formal) alle anderen Größen berechnen. Hinzu kommt die volumenbezogene Lorentzkraft, die Kraftdichte $\vec{f}$, als Verbindung zur Mechanik. Hierfür gilt

$$\vec{F} = \iiint\limits_V \vec{f} \, \mathrm{d}^3 r = \iiint\limits_V \varrho_\mathrm{V} \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right) \mathrm{d}^3 r \tag{6.23}$$

oder

$$\vec{f} = \varrho_\mathrm{V}\vec{E} + \vec{j}_\mathrm{V} \times \vec{B} \quad . \tag{6.24}$$

Im statischen Fall, definiert durch

$$\frac{\partial \varrho_\mathrm{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{j}_\mathrm{V}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad , \tag{6.25}$$

entkoppeln die Maxwellgleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$.

Die **Elektrostatik** ist durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 \\ \vec{\nabla} \circ \vec{E} &= \tfrac{\varrho_\mathrm{V}}{\varepsilon_0} \end{aligned} \tag{6.26}$$

charakterisiert. Die **Magnetostatik** wird entsprechend durch

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_0 \, \vec{j}_\mathrm{V} \\ \vec{\nabla} \circ \vec{B} &= 0 \end{aligned} \tag{6.27}$$

beschrieben. Im statischen Fall sind alle Feldgrößen zeitunabhängig.

In **quasistatischen Feldern** wird die Zeitabhängigkeit der Feldgrößen berücksichtigt, aber die Verschiebungsstromdichte $\varepsilon_0 \partial \vec{E}/\partial t$ wird gegenüber der Konvektionsstromdichte $\vec{j}_\mathrm{V}$ vernachlässigt. Das heißt, das modifizierte Ampèregesetz wird näherungsweise als $\vec{\nabla} \times \vec{B} \simeq \mu_0 \vec{j}_\mathrm{V}$ geschrieben. Für zeitlich schnell veränderliche Felder sind die Maxwellgleichungen in ihrer vollständigen Form zu verwenden.

Kapitel 7

Maxwell Gleichungen und Wellengleichung

7.1 Die Maxwell Gleichungen in polarisierbarer Materie

Wenn man alle Ströme und Ladungen, also z. B. auch Molekularströme und Dipolladungen von Atomen berücksichtigt, gelten die

Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j}_\mathrm{V} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \quad , \tag{7.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{7.2}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \varrho_\mathrm{V} \quad , \tag{7.3}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \quad . \tag{7.4}$$

Die Dipolladungen der Materie werden zweckmäßigerweise pauschal nach räumlicher Mittelung über zahlreiche Atome in einem mikroskopischen Volumen und nach zeitlicher Mittelung über Zeiten groß gegen die Elektronenumlaufzeit im Molekül berücksichtigt, indem man nach (2.72) eine **Polarisationsraumladungsdichte**

$$\boxed{\varrho_{\mathrm{P}} \{\vec{r}, t\} = -\vec{\nabla} \circ \vec{P} \{\vec{r}, t\}} \tag{7.5}$$

einführt. Die Magnetisierung liefert nach (4.60) mit dem **Magnetisierungsstrom** einen Beitrag zur Stromdichte

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{magn}} \{\vec{r}, t\} = \vec{\nabla} \times \vec{M} \{\vec{r}, t\} \quad ,} \tag{7.6}$$

und auch zeitliche Änderungen elektrischer Dipolmomente führen nach (4.46) mit dem **Polarisationsstrom** zu einer Stromdichte

$$\boxed{\vec{j}_{\mathrm{Pol}} \{\vec{r}, t\} = \frac{\partial \vec{P} \{\vec{r}, t\}}{\partial t} \quad .} \tag{7.7}$$

Dagegen liefert die Magnetisierung keinen Beitrag zur Ladungsdichte, denn nach der Kontinuitätsgleichung ist

$$\frac{\partial}{\partial t} \varrho_{\mathrm{magn}} \{\vec{r}, t\} = -\vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathrm{magn}} \{\vec{r}, t\} = \vec{\nabla} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{M} \{\vec{r}, t\}\right) \equiv 0 \quad , \tag{7.8}$$

da die Divergenz einer Rotation generell verschwindet. Die Materie hat also zu allen Zeiten dasselbe $\varrho_{\mathrm{magn}} = \varrho_{\mathrm{magn}} \{\vec{r}, t_0\}$. Da im unmagnetisierten Zustand aber $\varrho_{\mathrm{magn}} = 0$ gilt, muss dies immer gelten.

Die Ladungsdichte setzt sich zusammen aus den sogenannten freien und den elastisch gebundenen Ladungsträgern

$$\boxed{\varrho_{\mathrm{V}} \{\vec{r}, t\} = \varrho \{\vec{r}, t\} - \vec{\nabla} \circ \vec{P} \{\vec{r}, t\} \quad ,} \tag{7.9}$$

und es gibt die drei Strombeiträge der sogenannten freien Ströme, der elastisch gebundenen Ladungsträger in den elektrischen Dipolen und der Magnetisierungsströme

$$\vec{j}_{\mathrm{V}}\left\{\vec{r},t\right\} = \vec{j}\left\{\vec{r},t\right\} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}\left\{\vec{r},t\right\} + \vec{\nabla}\times\vec{M}\left\{\vec{r},t\right\} \quad . \tag{7.10}$$

Geht man hiermit in die Maxwellgleichungen (7.3) bis (7.1) ein und benutzt die das Material charakterisierenden Hilfsfelder der dielektrischen Verschiebung

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} \tag{7.11}$$

in (7.3) und der magnetischen Feldstärke

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B} - \vec{M} \tag{7.12}$$

in (7.1), dann erhält man die

Maxwellgleichungen für polarisierbare und magnetisierbare Materie

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} + \vec{j} \quad , \tag{7.13}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad , \tag{7.14}$$

$$\vec{\nabla}\circ\vec{D} = \varrho \quad , \tag{7.15}$$

$$\vec{\nabla}\circ\vec{B} = 0 \quad . \tag{7.16}$$

Die **Kontinuitätsgleichung** reduziert sich wegen 7.6, 7.7 und 7.8 mit 7.9 und 7.10 ganz allgemein auf

$$\vec{\nabla}\circ\vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\varrho = 0 \quad . \tag{7.17}$$

In linearen isotropen Medien können die Felder $\vec{D}$ und $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ und $\vec{H}$ durch die bekannten Materialgleichungen miteinander verknüpft werden. Üblicherweise nimmt man ideale Isolatoren an, was in der Praxis kaum zutrifft. Eine zumindest schwache Leitfähigkeit der Medien wird durch das mikroskopische ohmsche Gesetz als dritte Materialgleichung berücksichtigt (was eigentlich im Rahmen der strengen Maxwell'schen Theorie nicht erlaubt ist). Weitere Strombeiträge in $\vec{j}_\mathrm{V}$, wie z.B. Diffusionsströme, werden in $\vec{j}$ erfasst, können aber meist vernachlässigt werden. Die Stromdichte (7.10) wird also unter Berücksichtigung der ohmschen Leitfähigkeit zu $\vec{j}_\mathrm{V}\,\{\vec{r},t\} = \vec{j}_\mathrm{R}\,\{\vec{r},t\} + \sigma\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}\,\{\vec{r},t\} + \vec{\nabla}\times\vec{M}\,\{\vec{r},t\}$ modifiziert. Dabei erfolgt die Aufspaltung der Stromdichte $\vec{j}$ nach den noch nicht erfassten Strömen $\vec{j}_\mathrm{R}$ und dem ohmschen Strom $\sigma\vec{E}$. In $\vec{j}_\mathrm{R}$ ist unter anderem Diffusionsstrom enthalten, der normalerweise vernachlässigbar ist. Aber auch der Fall, dass sich ein hoch leitfähiger Draht in einem schwach leitfähigen Medium befindet, kann berücksichtigt werden. Diese Konstellation führt dazu, dass nahezu der gesamte Strom durch den Draht fließt. Der zugehörige Spannungsabfall und damit das elektrische Feld entlang des Drahtes ist klein und kann gegen das sonstige Feld vernachlässigt werden. Damit ist das Modell eines eingeprägten Stromes als Anregung für die Felder beschrieben.

Die **Materialgleichungen** lauten

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \tag{7.18}$$

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B} \tag{7.19}$$

$$\vec{j}_\mathrm{ohm} = \sigma\vec{E} \quad . \tag{7.20}$$

Die Maxwellgleichungen werden mit den Materialgleichungen zu den

Maxwellgleichungen für lineare isotrope leitfähige Materie

$$\vec{\nabla}\times\left(\frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}\right) = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} + \sigma\vec{E} + \vec{j}_\mathrm{R} \quad , \tag{7.21}$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad , \tag{7.22}$$

$$\vec{\nabla}\circ(\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}) = \varrho \quad , \tag{7.23}$$

$$\vec{\nabla}\circ\vec{B} = 0 \quad . \tag{7.24}$$

modifiziert.

Häufig findet man in der Literatur auch die **Maxwell-Gleichungen in integraler Schreibweise**. Mit Hilfe der **Integralsätze von Gauß und Stokes** lassen sich die oben angegebenen Gleichungen sehr einfach umformen. Das Resultat lautet

$$\oint\limits_{C_S} \vec{H} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = \iint\limits_{S} \left(\frac{\partial}{\partial t} \vec{D} + \vec{j} \right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} + J_\mathrm{S} \tag{7.25}$$

$$\oint_{C_S} \vec{E} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S} \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{7.26}$$

$$\oiint\limits_{S_V} \vec{D} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = -\iiint\limits_{V} \varrho \, \mathrm{d}^3 r = Q_\mathrm{V} \tag{7.27}$$

$$\oiint\limits_{S_V} \vec{B} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = 0 \tag{7.28}$$

7.2 Stetigkeitsbedingungen elektrodynamischer Felder an Grenzflächen

Wie schon in der Statik betrachtet, geben die Differentialgleichungen für die Felder Auskunft über das Verhalten an einer Grenzfläche. Mit dem gleichen Vorgehen wie in den Kapiteln 2.2.5 und 4.4 sollen hier die Stetigkeitsbedingungen zunächst allgemein hergeleitet werden. Ist die Divergenz eines Feldes $\vec{W}$ durch

$$\vec{\nabla} \circ \vec{W} = X \quad , \tag{7.29}$$

gegeben, kann im allgemeinen angegeben werden, dass die Normalkomponenten um eine Oberflächendichte X_S mit

$$\vec{n} \circ (\vec{W}_2 - \vec{W}_1) = X_\mathrm{S} \tag{7.30}$$

springen. Gilt für die Rotation des Feldes $\vec{W}$

$$\vec{\nabla} \times \vec{W} = \vec{Y} \quad , \tag{7.31}$$

springen die Tangentialkomponenten um die Oberflächendichte $\vec{Y}_{\mathrm{S}}$

$$\vec{n} \times (\vec{W}_2 - \vec{W}_1) = \vec{Y}_{\mathrm{S}} \quad . \tag{7.32}$$

Wenden wir diese Zusammenhänge auf die Maxwellgleichungen (7.13) bis (7.16) an, resultiert

bei endlichen Zeitableitungen

$$\begin{aligned} \vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) &= \vec{j}_{\mathrm{S}} \\ \vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) &= 0 \\ \vec{n} \circ (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) &= \rho_{\mathrm{S}} \\ \vec{n} \circ (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{7.33}$$

Der Zusatz, dass die Zeitableitungen endlich sein müssen, ist unabdingbar. Die Herleitungen, die zu (7.33) führen, enthalten das Produkt aus einer Fläche $\lim_{\Delta S \to 0}$ oder einer Strecke $\lim_{\Delta h \to 0}$ mit der Zeitableitung der betrachteten Felder. Bei unendlichen Zeitableitungen, wie sie zum Beispiel im Einschaltmoment auftreten können, ist dieses Produkt nicht mehr eindeutig und muss gesondert bestimmt werden.

7.3 Energiesatz der Elektrodynamik

Wir betrachten ein punktförmiges Teilchen mit der Ladung q, das sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}$ in den äußeren Feldern $\vec{B}$ und $\vec{E}$ bewegt. Auf das Teilchen wirkt die

Lorentz Kraft

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad . \tag{7.34}$$

Bei einer Verschiebung um $\mathrm{d}\ell$ verrichtet das Feld am Teilchen die mechanische Arbeit

$$\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}} = \vec{F} \circ \mathrm{d}\ell = q\vec{E} \circ \mathrm{d}\ell \quad , \tag{7.35}$$

denn wegen $\mathrm{d}\ell = \vec{v}\,\mathrm{d}t$ steht die magnetische Kraftkomponente stets senkrecht zur Bewegungsrichtung. Die mechanische Leistung ist

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = q\vec{E} \circ \vec{v} \tag{7.36}$$

Entsprechend erhält man für kontinuierliche Ladungsverteilungen $\varrho\{\vec{r},t\}$ und Geschwindigkeitsfelder $\vec{v}\{\vec{r},t\}$ die Kraftdichte

$$\vec{f}\{\vec{r},t\} = \varrho\{\vec{r},t\}\left[\vec{E}\{\vec{r},t\} + \vec{v}\{\vec{r},t\} \times \vec{B}\{\vec{r},t\}\right] \quad . \tag{7.37}$$

Die zugehörige Leistungsdichte

$$\frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{mech}}\{\vec{r},t\}}{\mathrm{d}t} = \vec{f}\{\vec{r},t\} \circ \vec{v}\{\vec{r},t\} = \varrho\{\vec{r},t\}\,\vec{E}\{\vec{r},t\} \circ \vec{v}\{\vec{r},t\} = \vec{j}\{\vec{r},t\} \circ \vec{E}\{\vec{r},t\} \tag{7.38}$$

ist allein durch das elektrische Feld und die Stromdichte bestimmt. Die gesamte **mechanische Leistung** im Volumen V beträgt

$$P = \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \frac{\mathrm{d}w_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}^3r = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \vec{j}\{\vec{r},t\} \circ \vec{E}\{\vec{r},t\}\,\mathrm{d}^3r \quad . \tag{7.39}$$

Diese mechanische Leistung lässt sich vollkommen durch Feldgrößen ausdrücken. Mit (7.13) schreiben wir

$$\vec{E} \circ \vec{j} = \vec{E} \circ \vec{\nabla} \times \vec{H} - \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{7.40}$$

Wir nutzen nun noch mit (7.14) die Beziehung

$$\vec{\nabla} \circ (\vec{E} \times \vec{H}) = \vec{H} \circ \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \circ \vec{\nabla} \times \vec{H} = -\vec{H} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \circ \vec{\nabla} \times \vec{H} \quad , \tag{7.41}$$

um den Integranden in (7.39) symmetrisch durch Feldgrößen auszudrücken. Dadurch erhält man die allgemeine integrale Form einer Leistungsbilanz

$$P = -\iiint\limits_{V} \left(\vec{E} \circ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{\nabla} \circ (\vec{E} \times \vec{H}) \right) \, \mathrm{d}^3 r = \iiint\limits_{V} \vec{j} \circ \vec{E} \, \mathrm{d}^3 r \quad . \tag{7.42}$$

Dies ist der **Energieerhaltungssatz** der Elektrodynamik. In linearen Medien $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$ bzw. $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$ gilt nun noch

$$\vec{E} \circ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \circ \vec{D}) \tag{7.43}$$

und

$$\vec{H} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\vec{B} \circ \vec{H}) \quad . \tag{7.44}$$

Definieren wir nun in linearen Medien die **elektromagnetische Energiedichte** als

$$w\{\vec{r}, t\} = w_{\mathrm{el}} + w_{\mathrm{magn}} = \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \circ \vec{B} \tag{7.45}$$

mit der

Energiedichte des elektrischen Feldes

$$w_{\mathrm{el}} := \frac{1}{2} \vec{E} \circ \vec{D} \tag{7.46}$$

und der

Energiedichte des magnetischen Feldes

$$w_{\mathrm{magn}} := \frac{1}{2} \vec{H} \circ \vec{B} \tag{7.47}$$

und die Energiestromdichte bzw. den **Poyntingvektor** durch

$$\vec{S}\{\vec{r}, t\} := \vec{E}\{\vec{r}, t\} \times \vec{H}\{\vec{r}, t\} \quad , \tag{7.48}$$

dann lautet (7.42)

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} = -\iiint\limits_{\mathrm{V}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \circ \vec{S} \right) \, \mathrm{d}^3 r = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \vec{j} \circ \vec{E} \, \mathrm{d}^3 r \,. \tag{7.49}$$

Da das Volumen V beliebig ist, muss in linearen Medien die

Kontinuitätsgleichung der Energie

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \vec{\nabla} \circ \vec{S} = -\vec{j} \circ \vec{E} \tag{7.50}$$

gelten. Sie wird auch als **Energieerhaltungssatz** in linearen Medien bezeichnet. Die Größe $\vec{j} \circ \vec{E}$ ist die lokal pro Zeiteinheit gespeicherte kinetische Energie des elektrischen Stromes. Sie ist gleich der (negativen) zeitlichen Änderung der Energiedichte $\partial w / \partial t$ des elektromagnetischen Feldes, wenn die Divergenz der Energiestromdichte $\vec{\nabla} \circ \vec{S}$ verschwindet.

Das Integral

$$\iiint\limits_{\mathrm{V}} \vec{\nabla} \circ \vec{S} \, \mathrm{d}^3 r = \oiint\limits_{\mathrm{S_V}} \vec{S} \circ \mathrm{d}^2 \vec{r} \tag{7.51}$$

beschreibt den Energiefluss aus der Oberfläche des Volumens heraus.

Die gesamte integrale Energiebilanz ist demnach in linearen Medien

$$\frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}W_{\mathrm{Feld}}}{\mathrm{d}t} = \iiint\limits_{\mathrm{V}} \vec{j} \circ \vec{E} \, \mathrm{d}^3 r + \iiint\limits_{\mathrm{V}} \frac{\partial w}{\partial t} \, \mathrm{d}^3 r = -\oiint\limits_{\mathrm{S_V}} \vec{S} \circ \mathrm{d}^2 \vec{r} \quad . \tag{7.52}$$

Das heißt, die zeitliche Änderung der Summe aus mechanischer Energie und elektromagnetischer Feldenergie ist gleich der in das Volumen einströmenden Feldenergie. Diese Interpretation macht die Definition der Größen w und $\vec{S}$ erst sinnvoll. Das Energieerhaltungsprinzip besagt ja, dass die Abnahme der Feldenergie im Volumen $-\,\mathrm{d}W_{\mathrm{Feld}}$ gleich ist dem in mechanische Energie umgewandelten Anteil $\mathrm{d}W_{\mathrm{mech}}$ zuzüglich dem aus dem Volumen herausströmenden Anteil $\mathrm{d}t \oiint\limits_{\mathrm{S_V}} \vec{S} \circ \mathrm{d}^2 \vec{r}$.

In die Interpretation von $\vec{S}$ als lokale Energiestromdichte geht gemäß (7.50) nur die Divergenz des Vektors $\vec{\nabla} \circ \vec{S}$ ein. Die Energiestromdichte ist deshalb auch durch einen Vektor

$$\vec{S'} = \vec{S} + \vec{\nabla} \times \vec{K} \tag{7.53}$$

mit einem beliebigen Vektorfeld $\vec{K}\{\vec{r}\}$ charakterisierbar, denn es gilt $\vec{\nabla} \circ \vec{S'} = \vec{\nabla} \circ \vec{S}$. Es kann also durchaus $\vec{S} \neq 0$ sein, ohne dass ein Energiestrom stattfindet.

Ein Beispiel ist das statische Feld $\vec{E} = (0, E_y, 0)$, $\vec{H} = (0, 0, H_z)$ mit $E_y = const, H_z = const$, für das $\vec{S} = (E_y H_z, 0, 0) \neq 0$ gilt. Da aber $\vec{\nabla} \circ \vec{S} = 0$ ist, tritt keine Energieströmung durch die (geschlossene) Oberfläche eines Volumen auf.

Es sei noch angemerkt, dass im Energieerhaltungssatz (7.50) bzw. (7.52) die elektromagnetische Energie der Moleküle in der Feldenergie berücksichtigt ist. Außerdem waren Proportionalitäten $\vec{D} \propto \vec{E}$ und $\vec{B} \propto \vec{H}$ vorausgesetzt. Deshalb gilt bei Hysterese z. B. in Ferromagneten die einfache Form der Energieerhaltung nach (7.52) nicht mehr. Man muss vielmehr noch die 'Hysterese-Energie' berücksichtigen. Allerdings bleibt (7.42) weiterhin korrekt und man kann die Darstellung (7.50) retten, wenn man etwas allgemeiner als in (7.45)

$$\frac{\partial}{\partial t} w := \vec{E} \circ \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \circ \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{7.54}$$

definiert.

7.4 Reziprozität

Eng mit dem Energiesatz verknüpft ist das Reziprozitätstheorem. Hier geht es darum, den Zusammenhang zwischen zwei verschiedenen Lösungen der Maxwellgleichungen zu untersuchen. Als Beispiel kann die Betrachtung von zwei Antennen herangezogen werden, bei denen die eine sendet und die andere empfängt. Das Feld im Raum kann jeweils mit den Darstellungen bezüglich der Antennen beschrieben werden. Die Frage, was passiert, wenn eine Umschaltung zwischen Senden $\leftrightarrow$ Empfang erfolgt, kann mit dem Reziprozitätstheorem ohne tatsächliche Kenntnis der Felder sofort beantwortet werden.

Zur Herleitung des Reziprozitätstheorems beginnt man mit zwei verschieden Lösungssätzen $\vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1, \vec{j}_1$ und $\vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2, \vec{j}_2$. Für beide Sätze gelten die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}_1 = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_1$$

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{H}_1 &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 + \vec{j}_1 \\
\vec{\nabla} \times \vec{E}_2 &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 \\
\vec{\nabla} \times \vec{H}_2 &= \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 + \vec{j}_2 \qquad .
\end{aligned}
$$

Multiplikation (Skalarprodukt) der ersten beiden Gleichungen mit $\vec{H}_2$ bzw. $\vec{E}_2$ und der letzten beiden mit $\vec{H}_1$ bzw. $\vec{E}_1$ resultiert in

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_2 \circ \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 &= -\vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_1 \\
\vec{E}_2 \circ \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 &= \vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \\
\vec{H}_1 \circ \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 &= -\vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 \\
\vec{E}_1 \circ \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 &= \vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 + \vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 \qquad .
\end{aligned}
$$

Subtraktion der zweiten von der dritten sowie der vierten von der ersten Gleichung ergibt

$$
\begin{aligned}
\vec{H}_1 \circ \vec{\nabla} \times \vec{E}_2 - \vec{E}_2 \circ \vec{\nabla} \times \vec{H}_1 &= -\vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 - \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 - \vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 \\
\vec{H}_2 \circ \vec{\nabla} \times \vec{E}_1 - \vec{E}_1 \circ \vec{\nabla} \times \vec{H}_2 &= -\vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 - \vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 - \vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_1 \qquad .
\end{aligned}
$$

Die linke Seite lässt sich zusammenfassen (siehe Anhang B), so dass folgt

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) &= -\vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 - \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 - \vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 \\
\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2\right) &= -\vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 - \vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 - \vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_1 \qquad . \qquad (7.55)
\end{aligned}
$$

Die Differenz der beiden Gleichungen ist das

Reziprozitätstheorem

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) &+ \vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 - \vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 + \vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 - \vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_1 \\
&= -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \qquad . \qquad (7.56)
\end{aligned}
$$

Auf Grund der völligen Symmetrie der Gleichungen in den Koeffizienten 1 und 2 lässt sich nicht unterscheiden, wie die Zuordnung der Felder erfolgt. Mit anderen Worten, im obigen Beispiel lässt sich Sender und Empfänger nicht unterscheiden, das Resultat ist das gleiche. Diesen Umstand nennt man Reziprozität und daher hat obige Gleichung den Namen.
Bildet man die Summe in (7.55), resultiert eine

alternative Darstellung des Reziprozitätstheorems

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right) + \vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}_2 + \vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D}_1 + \vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_2 + \vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{B}_1 = -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 - \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \quad , \tag{7.57}$$

die ebenfalls völlig symmetrisch ist. Setzt man hier $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = \vec{E}$, $\vec{H}_1 = \vec{H}_2 = \vec{H}$ und $\vec{j}_1 = \vec{j}_2 = \vec{j}$ ergibt sich die Kontinuitätsgleichung der Energie, wie sie im vorherigen Kapitel bereits auf anderem Weg hergeleitet wurde. Die Darstellung (7.57) wird als Ausgangspunkt bei der Betrachtung zeitharmonischer Felder genommen, wie später im Abschnitt 8.1.7 gezeigt wird.
In linearen Medien vereinfacht sich die Darstellungen von (7.56) etwas: es kann $\vec{D}_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \vec{E}_1$, $\vec{D}_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \vec{E}_2$, $\vec{B}_1 = \mu_0 \mu_1 \vec{H}_1$ und $\vec{B}_2 = \mu_0 \mu_2 \vec{H}_2$ sowie $\vec{E} \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} = 1/2 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{E} \circ \vec{D})$ und $\vec{H} \circ \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 1/2 \frac{\partial}{\partial t} (\vec{H} \circ \vec{B})$ verwendet werden. Damit ergibt sich

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1 \right) \vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 + \mu_0 \left(\mu_2 - \mu_1 \right) \vec{H}_1 \circ \vec{H}_2 \right) = -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \quad . \tag{7.58}$$

Wenn das gleiche Problem nur mit zwei verschiedenen Darstellungen beschrieben wird, ist natürlich $\varepsilon_2 = \varepsilon_1 = \varepsilon$ und $\mu_2 = \mu_1 = \mu$ und die Gleichung vereinfacht sich zu

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1 \right) = -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \quad . \tag{7.59}$$

Die differentielle Darstellung des Reziprozitätstheorems kann mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes (siehe Anhang B) leicht in eine integrale Darstellung umgeformt werden:

$$\begin{aligned}
&\oiint_{S_\mathrm{V}} \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\
&+ \iiint_\mathrm{V} \vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 - \vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 + \vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 - \vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_1 \,\mathrm{d}^3 r \\
= &\iiint_\mathrm{V} -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \,\mathrm{d}^3 r \quad ,
\end{aligned} \tag{7.60}$$

und für lineare Medien

$$\begin{aligned}
&\oiint_{S_\mathrm{V}} \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 - \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\
&+ \iiint_\mathrm{V} \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right) \vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 + \mu_0 \left(\mu_2 - \mu_1\right) \vec{H}_1 \circ \vec{H}_2\right) \mathrm{d}^3 r \\
= &\iiint_\mathrm{V} -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \,\mathrm{d}^3 r \quad .
\end{aligned} \tag{7.61}$$

In verlustbehafteten linearen Medien muss der Leitungsstrom $\sigma\vec{E}$ berücksichtigt werden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) \\
&+\frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right) \vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 + \mu_0 \left(\mu_2 - \mu_1\right) \vec{H}_1 \circ \vec{H}_2\right) + (\sigma_2 - \sigma_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 \\
= &-\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 - \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \quad ,
\end{aligned} \tag{7.62}$$

$$\begin{aligned}
&\oiint_{S_\mathrm{V}} \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \\
&+ \iiint_\mathrm{V} \frac{\partial}{\partial t} \left(\varepsilon_0 \left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right) \vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 + \mu_0 \left(\mu_2 - \mu_1\right) \vec{H}_1 \circ \vec{H}_2\right) + (\sigma_2 - \sigma_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 \,\mathrm{d}^3 r \\
= -&\iiint_\mathrm{V} \vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \,\mathrm{d}^3 r \quad .
\end{aligned} \tag{7.63}$$

Mit dieser Darstellung des Reziprozitätstheorems besteht die Möglichkeit, die Feldverteilung eines gestörten Systems mit der Feldverteilung des ungestörten Systems zu beschreiben. Beispielsweise lassen sich die Feldverteilungen eines verlustbehafteten Wellenleiters mit denen des verlustfreien Wellenleiters darstellen, aber auch kleine Verformungen oder Einschlüsse im Dielektrikum lassen sich so erfassen. Das genaue Vorgehen ist etwas gewöhnungsbedürftig und soll hier nicht weiter vertieft werden.

Interessant ist noch eine Betrachtung von eventuellen Quelltermen bei ansonsten linearen Medien. Dafür bietet sich die ungewöhnliche Darstellung $\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon\vec{E} + \vec{P}_{\mathrm{Q}}$, $\vec{B} = \mu_0\mu\vec{H} + \mu_0\vec{M}_{\mathrm{Q}}$, an. Unter Berücksichtigung dieser Quell- Polarisationen $\vec{P}_{\mathrm{Q}}$ und $\vec{M}_{\mathrm{Q}}$ resultiert an Stelle von (7.58)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 \; - \; \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) & \\
& + \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_0\left(\varepsilon_2 - \varepsilon_1\right)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 + \mu_0\left(\mu_2 - \mu_1\right)\vec{H}_1 \circ \vec{H}_2\right) + (\sigma_2 - \sigma_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2 \\
& = -\vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}_{\mathrm{Q2}} + \vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}_{\mathrm{Q1}} - \mu_0\vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{M}_{\mathrm{Q2}} + \mu_0\vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{M}_{\mathrm{Q1}} \\
& \quad -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 + \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1 \quad .
\end{aligned} \tag{7.64}$$

7.5 Potenziale und Eichtransformationen

Die Einführung von Potenzialen dient zur Reduzierung der Zahl der Maxwellgleichungen. Wegen

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B}\left\{\vec{r}, t\right\} = 0 \tag{7.65}$$

existiert ein Vektorpotenzial $\vec{A}\left\{\vec{r}, t\right\}$, so dass gilt

$$\vec{B}\left\{\vec{r}, t\right\} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\left\{\vec{r}, t\right\} \quad . \tag{7.66}$$

Da nach dem Faraday-Gesetz nun

$$\vec{\nabla} \times \left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) = 0 \tag{7.67}$$

gilt, existiert ein **skalares elektrisches Potenzial** $\Phi_{\text{el}} \{\vec{r}, t\}$, derart dass

$$\boxed{\vec{\nabla} \Phi_{\text{el}} = -\left(\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right) \tag{7.68}}$$

ist. Man erkennt, dass das skalare elektrische Potenzial Φ_{el} im statischen Fall in das bereits bekannte elektrische Potenzial V übergeht. Das elektrische Feld ergibt sich aus den beiden Hilfsfeldern, dem skalaren Potenzial und dem Vektorpotenzial gemäß

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \quad . \tag{7.69}$$

Die durch (7.66) und (7.69) definierten Felder erfüllen offenbar die homogenen Maxwellgleichungen (7.14) und (7.16) bzw. (7.22) und (7.24). Im folgenden setzen wir homogene lineare Medien $\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H}$ voraus. Wir erinnern an die in Beziehung

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{A}) - \Delta \vec{A} \quad , \tag{7.70}$$

die komponentenweise zu verstehen ist. Einsetzen in die inhomogene Maxwellgleichung (7.13) ergibt

$$\boxed{\Delta \vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \vec{\nabla} \left(\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \Phi_{\text{el}} \right) = -\mu\mu_0 \vec{j} \quad . \tag{7.71}}$$

In leitfähigen Medien ergibt sich aus (7.21)

$$\Delta\vec{A} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{A} + \mu\mu_0\sigma\Phi_{\mathsf{el}} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathsf{el}}\right) = -\mu\mu_0\vec{j}_{\mathsf{R}} \tag{7.72}$$

Einsetzen in (7.15) liefert

$$\boxed{\Delta\Phi_{\mathsf{el}} + \vec{\nabla}\circ\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad .} \tag{7.73}$$

Zusammengenommen sind (7.71) bzw. (7.72) und (7.73) insgesamt vier Gleichungen anstatt den bisherigen acht Maxwellgleichungen. Die Stromdichte $\vec{j}$ bzw. $\vec{j}_{\mathsf{R}}$ und die Ladungsdichte ϱ werden auch als Quellterme bezeichnet, da sie als Anregung in den Differentialgleichungen für $\vec{A}$ und Φ_{el} verstanden werden können.

In quell- und stromfreien Gebieten können noch zwei weitere Potenziale definiert werden: Das **skalare magnetische Potenzial** $\Phi_{\mathsf{m}ag}$ mit

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathsf{mag}} \tag{7.74}$$

wie es bereits in 4.5.1 eingeführt wurde und das **elektrische Vektorpotenzial** $\vec{F}$, das wegen $\vec{\nabla}\circ\vec{D} = 0$ definiert werden kann. Es gilt analog zu $\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$

$$\vec{D} = \vec{\nabla}\times\vec{F} \quad . \tag{7.75}$$

7.5.0.1 Eichinvarianz

Die Induktion $\vec{B}\left\{\vec{r},t\right\}$ ändert sich nicht, wenn wir von $\vec{A}$ zu

$$\vec{A}'\left\{\vec{r},t\right\} = \vec{A}\left\{\vec{r},t\right\} + \vec{\nabla}\Lambda\left\{\vec{r},t\right\} \tag{7.76}$$

mit einer beliebigen skalaren Funktion $\Lambda\{\vec{r}, t\}$ übergehen. Damit sich auch das elektrische Feld $\vec{E}$ bei der Transformation nicht verändert, müssen wir gleichzeitig von Φ_{el} zu

$$\Phi'_{\text{el}} = \Phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda \tag{7.77}$$

übergehen. Die Funktion Λ heißt auch **Eichfunktion**. Die Transformationen (7.76) und (7.77) heißen **Eichtransformationen**. Bei Anwendung der Transformationen bleibt die Form der Gleichungen (7.71) und (7.73) unverändert. Die Gleichungen sind, wie man sagt, eichinvariant. Eichungen werden verwendet, um die Gleichungen (7.71) und (7.73) zu vereinfachen. Die bekanntesten Vertreter sind die **Lorenz-** und **Coulomb Eichung**.

7.5.0.2 Eindeutigkeit

Anhand der Eichinvarianz ist sofort ersichtlich, dass skalare Potenziale bis auf die Zeitableitung einer Eichfunktion eindeutig sind, was in der Elektrostatik zur Eindeutigkeit bis auf eine Konstante führt. Vektorpotenziale sind eindeutig bis auf den Gradienten der Eichfunktion. Dies gilt gleichermaßen in der Statik und der Dynamik.

7.5.1 Coulomb Eichung

Zur Vereinfachung von (7.73) wählt man die

Coulomb Eichung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} = 0 \quad . \tag{7.78}$$

Dies ist stets möglich. Falls nämlich $\vec{\nabla} \circ \vec{A} \neq 0$ sei, wähle man die Eichfunktion Λ als Lösung der Poissongleichung

$$\Delta\Lambda = -\vec{\nabla} \circ \vec{A} \quad , \tag{7.79}$$

ersetze $\vec{A}$ durch $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ und erhalte $\vec{\nabla} \circ \vec{A}' = 0$. Das skalare elektrische Potenzial Φ_{el} muss entsprechend (7.77) modifiziert werden.

Mit der Coulomb Eichung wird aus (7.73) die

Poissongleichung in Coulomb Eichung

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}}\left\{\vec{r}, t\right\} = -\frac{\varrho\left\{\vec{r}, t\right\}}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{7.80}$$

mit dem **Coulomb Integral**

$$\Phi_{\mathrm{el}}\left\{\vec{r}, t\right\} = \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\varrho\left\{\vec{r}', t\right\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r' \tag{7.81}$$

als Lösung im freien mediengefüllten Raum. $\Phi_{\mathrm{el}}\left\{\vec{r}, t\right\}$ ist das instantane **Coulombpotenzial** der Ladungsdichte $\varrho\left\{\vec{r}, t\right\}$. Deshalb spricht man von Coulomb Eichung. Für das Vektorpotenzial erhalten wir in Coulomb Eichung bei verlustlosen Medien nach (7.71)

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\vec{\nabla}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} - \mu\mu_0\vec{j} \quad . \tag{7.82}$$

Setzen wir auf der rechten Seite (7.81) ein und nutzen die Kontinuitätsgleichung, dann folgt im freien Raum in Coulomb Eichung

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j} - \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\vec{\nabla}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{\nabla}' \circ \vec{j}\left\{\vec{r}', t\right\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{7.83}$$

Das Vektorpotenzial ist demnach bei verlustlosen Medien in Coulomb Eichung durch die instantane Stromdichte bestimmt, allerdings über eine inhomogene Wellengleichung.

Natürlich sind $\vec{A}$ und Φ in Coulomb Eichung beileibe nicht eindeutig, denn die Poissongleichung (7.79) hat unendlich viele Lösungen. Man kann zeigen, dass die Coulomb Eichung nicht unabhängig vom Bezugssystem ist, was sich für die Behandlung relativistischer Probleme als ungünstig erweist.

7.5.2 Lorenz Eichung

Die Lorenz Eichung führt in verlustlosen Medien ($\sigma = 0$) zu einer Entkopplung der beiden Gleichungen (7.71) und (7.73). Man verlangt für die

Lorenz Eichung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0 \quad . \tag{7.84}$$

Diese Lorenz Bedingung lässt sich stets erfüllen. Falls nämlich (7.84) nicht gültig ist, bestimme man die Eichfunktion Λ als Lösung von

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = -\Delta\Lambda + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda \quad , \tag{7.85}$$

einer inhomogenen Wellengleichung für $\Lambda(\vec{r}, t)$. Wird nun $\Phi' = \Phi - \frac{\partial}{\partial t}\Lambda$ und $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Lambda$ ersetzt, ist erkennbar, dass die Lorenz Bedingung für die Potenziale $\vec{A}', \Phi'$ erfüllt ist.
Aus (7.71) und (7.73) folgt in Lorenz Eichung

$$\Delta\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j} \tag{7.86}$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad . \tag{7.87}$$

Dies sind zwei entkoppelte **ungedämpfte inhomogene Wellengleichungen** für verlustlose Medien.
Werden die Verluste mit berücksichtigt, muss eine modifizierte Form der Lorenz Eichung verwendet werden. Die Gleichungen (7.72) und (7.73) werden durch die

modifizierte Lorenz Eichung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \mu\mu_0\sigma\Phi_{\mathrm{el}} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = 0 \quad . \tag{7.88}$$

entkoppelt. Die eventuell erforderliche Eichfunktion Λ muss der gedämpften inhomogenen Wellengleichung

$$\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \mu\mu_0\Phi_{\mathrm{el}} + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} = -\Delta\Lambda + \mu\mu_0\frac{\partial}{\partial t}\Lambda + \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Lambda \quad , \tag{7.89}$$

gehorchen. Die modifizierte Lorenz Eichung führt auf die

gedämpften inhomogenen Wellengleichungen

$$\Delta\vec{A} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j} \tag{7.90}$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} - \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \tag{7.91}$$

für die Potenziale.

Die gedämpften inhomogenen Wellengleichungen gelten in verlustbehafteten linearen homogenen Medien.

Man kann zeigen, dass die Lorenz Eichung unabhängig vom Bezugssystem ist und sich deshalb als Lorenz invariante Darstellung zur Behandlung relativistischer Probleme anbietet. Natürlich liefert auch die Lorenz Eichung keine eindeutigen Potenziale, denn die inhomogene Wellengleichung (7.85) besitzt eine Vielzahl von Lösungen. In Lorenz Eichung reduzieren sich die Maxwellgleichungen in homogenen Medien auf die beiden inhomogenen Wellengleichungen (7.86) und (7.87). Allerdings kann man $\vec{j}$ und ϱ nicht unabhängig vorgeben. Es muss die Kontinuitätsgleichung $\vec{\nabla} \circ \vec{j} = -\partial\varrho/\partial t$ erfüllt werden.

Abkürzend wird in (7.86) und (7.87) häufig die **Lichtgeschwindigkeit**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu\varepsilon_0\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{c_0}{n} \tag{7.92}$$

eingeführt, mit der sich Licht im unbegrenzten Medium ausbreitet. Die Größe

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$$

stellt dabei die **Vakuumlichtgeschwindigkeit** und

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

die **Brechzahl** des Materials dar.

7.6 Lösung der ungedämpften Wellengleichung im freien Raum

Nach (7.86) und (7.87) genügen das skalare Potenzial Φ_{el} und die kartesischen Komponenten $A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}$ des Vektorpotenzials in verlustfreien Medien der

ungedämpften inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\Psi\left\{\vec{r},t\right\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Psi\left\{\vec{r},t\right\}}{\partial t^2} = -4\pi\, g\left\{\vec{r},t\right\} \quad , \Psi \in \left\{\Phi_{\mathrm{el}}, A_{\mathrm{x}}, A_{\mathrm{y}}, A_{\mathrm{z}}\right\} \quad . \tag{7.93}$$

Hierbei ist der Quellterm $g\{\vec{r},t\}$ als Ladungsdichteverteilung $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0}\varrho$ bzw. jeweilige Komponente der Stromdichteverteilung $\dfrac{\mu\mu_o}{4\pi}\vec{j}$ vorgegeben, und es gilt $c^2 > 0$. Ohne die Zeitableitung, also für $\partial/\partial t = 0$, ist das **Coulomb Integral**

$$\Psi = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left\{\vec{r}\,',t\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' \tag{7.94}$$

eine partikuläre Lösung von (7.93), die für den freien Raum gilt. Durch Probieren findet man eine partikuläre Lösung bei vorhandener Zeitabhängigkeit. Diese Lösung heißt

retardiertes Potenzial

$$\Psi\left\{\vec{r},t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left\{\vec{r}\,', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}^3r' \tag{7.95}$$

und ist im freien Raum gültig. Die Wirkung der Quelle $g\left\{\vec{r}', t\right\}$ am Ort $\vec{r}'$ zur Zeit t kommt zeitlich um $|\vec{r}-\vec{r}'|/c$ verzögert am Aufpunkt $\vec{r}$ an. Die Größe c ist als Ausbreitungsgeschwindigkeit zu interpretieren. Die Quelle g als Ursache für das Feld Ψ erzielt demnach eine spätere Wirkung. Das System verhält sich kausal. Dagegen tritt für das

avancierte Potenzial

$$\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left\{\vec{r}', t+\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r' \quad , \tag{7.96}$$

das ebenfalls eine partikuläre Lösung des freien Raums von (7.93) darstellt, die Wirkung früher ein, als die Ursache passiert. Dieses nicht kausale Verhalten ist unphysikalisch, und wir werden avancierte Potenziale nicht weiter beachten. Das avancierte Potenzial erlangt im Rahmen der Quantenphysik Bedeutung.

Dass (7.95) und (7.96) Lösungen der Wellengleichung sind, rechnet man leicht nach, wenn man $\Delta\frac{1}{|r-r'|} = -4\pi\delta^{(3)}\left\{\vec{r}-\vec{r}'\right\}$ beachtet.

Ist die Quellfunktion $g\left\{\vec{r}, t\right\} = g\left\{\vec{r}\right\}$ zeitlich konstant für alle Zeiten $t \le t_0$, dann ist auch die retardierte Lösung (7.95) konstant für $t \le t_0$, da $t - \frac{|x-x_0|}{c} \le t_0$ und folglich

$$\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{g\left\{\vec{r}'\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\, \mathrm{d}^3 r' \quad . \tag{7.97}$$

für $t \le t_0$. Dieses ist die statische Lösung.

Wenn außerhalb eines Volumenbereiches K $g\left\{\vec{r}, t\right\} \equiv 0$ gilt, und innerhalb von K die Quelle $g\left\{\vec{r}, t\right\} = g\left\{\vec{r}\right\}$ für $t \le t_0$ zeitlich konstant ist, dann ist die retardierte Lösung für $(\vec{r}, t)$ mit $\vec{r}$ außerhalb K und Abstand $|\vec{r}-\vec{r}'| > c(t-t_0)$ immer noch gleich der statischen Lösung. Die Wirkung der Quelle ist an diesen Punkten wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit c einfach noch nicht angekommen.

Das kausale Verhalten gilt selbstverständlich nicht für das avancierte Potenzial.

7.7 Allgemeine Lösungen der ungedämpften Wellengleichung

Oben wurde von verlustfreien Medien ausgegangen, da der Dämpfungsterm in den Wellengleichungen für verlustbehaftete Medien Probleme beim Auffinden der Lösung bereitet. Im weiteren Text sollen nun auch Lösungen für verlustbehaftete Medien gesucht werden. Wir starten zunächst beim verlustlosen Fall, um uns dann an Hand der dort gefundenen Lösungen auch Lösungen der gedämpften Wellengleichung herzuleiten.

7.7.1 Allgemeine Lösung der ungedämpften inhomogenen Wellengleichung

Wenn in der inhomogenen Wellengleichung (7.93) $g\{\vec{r},t\} = \delta^{(3)}\{\vec{r}-\vec{r}'\}\cdot\delta\{t-t'\}$ eingesetzt wird, ist die Lösung die Greensche Funktion der Differentialgleichung. Für Raumgebiete ohne Randbedingungen im Endlichen findet man die **zeitabhängige Greensche Funktion des freien Raums**

$$G\{\vec{r},\vec{r}',t,t'\} = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\delta\left\{t'-t\mp\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\} \quad , \tag{7.98}$$

wobei das Minuszeichen für das retardierte Potenzial und das Pluszeichen für das avancierte Potenzial verwendet wird. Man erkennt sofort, dass sich die Greensche Funktion der Wellengleichung multiplikativ aus der Greenschen Funktion des elektrostatischen Problems und dem Zeitfaktor mit der Deltafunktion zusammensetzt. Damit ist die

allgemeine Lösung der ungedämpften inhomogenen Wellengleichung

$$\Psi\{\vec{r},t\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g\{\vec{r}',t'\}\cdot G\{\vec{r},\vec{r}',t,t'\}\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{7.99}$$

Das retardierte und avancierte Potenzial (7.95) und (7.96) resultieren sofort nach Zeitintegration aus (7.99).

7.7.2 Lösung der ungedämpften homogenen Wellengleichung

Die

ungedämpfte homogene Wellengleichung

$$\Delta\Psi\{\vec{r},t\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\{\vec{r},t\} = 0 \tag{7.100}$$

ist in Bereichen mit verschwindender Ladungsdichte $\varrho\{\vec{r},t\} = 0$ oder verschwindender Stromdichte $\vec{j}\,\{\vec{r},t\} = 0$ zu erfüllen.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man das Potenzial als Fourierentwicklung

$$\Psi\{\vec{r},t\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\overline{\Psi}\{\vec{r},\pm\omega\}\exp\{\mp i\omega t\}\,\mathrm{d}\omega \tag{7.101}$$

mit

$$\overline{\Psi}\{\vec{r},\pm\omega\} = \int_{-\infty}^{\infty}\Psi\{\vec{r},t\}\cdot\exp\{\pm i\omega t\}\,\mathrm{d}t \tag{7.102}$$

schreiben. Nach Einsetzen in (7.100) findet man, dass für jede Spektralkomponente $\overline{\Psi}\{\vec{r},\pm\omega\}$ die **Helmholtzgleichung**

$$\Delta\overline{\Psi}\{\vec{r},\pm\omega\} + \frac{\omega^2}{c^2}\overline{\Psi}\{\vec{r},\pm\omega\} = 0 \tag{7.103}$$

erfüllt werden muss. Wir schränken zunächst die Betrachtung auf sogenannte **monochromatische** Wellen ein. Das heißt, im folgenden wird nur eine explizite Kreisfrequenz $\omega = \omega'$ zugelassen, das Frequenzspektrum ist also Dirac-förmig

$$\overline{\Psi}\{\vec{r},\pm\omega\} = 2\pi u\{\vec{r}\}\cdot\delta\{\omega-\omega'\} \quad . \tag{7.104}$$

Diese Darstellung impliziert eine harmonische Zeitabhängigkeit. Lösungen der homogenen Wellengleichung können aber auch bei einer etwas allgemeineren Zeitabhängigkeit gefunden werden. Sind $f_- \{\xi\}$ und $f_+ \{\xi\}$ beliebige zweimal differenzierbare Funktionen einer reellen Phase ξ, dann sind

$$\Psi_- \{\vec{r}, t\} = f_- \left\{\pm(\omega t - \vec{k} \circ \vec{r})\right\} = f_- \{\pm\xi_-\} \tag{7.105}$$

und

$$\Psi_+ \{\vec{r}, t\} = f_+ \left\{\pm(\omega t + \vec{k} \circ \vec{r})\right\} = f_+ \{\pm\xi_+\} \tag{7.106}$$

vier spezielle Lösungen von (7.100), wenn der **Wellenzahlvektor** $\vec{k} = (k_\mathrm{x}, k_\mathrm{y}, k_\mathrm{z})^T$ und die Kreisfrequenz[1] ω die

Dispersionsrelation

$$\vec{k} \circ \vec{k} = \omega^2 \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \tag{7.107}$$

erfüllen. **Die Dispersionsrelation verknüpft die Konstanten aus dem jeweiligen Ansatz zur Lösung der Wellengleichung mit den Materialgrößen in dem Medium, in dem der Ansatz gelten soll.** Hier findet die **Norm eines Vektors**

$$||\vec{k}||^2 = \vec{k} \circ \vec{k} \tag{7.108}$$

Anwendung, die im Gegensatz zum **Betrag eines Vektors**

$$|\vec{k}|^2 = \vec{k} \circ \vec{k}^* \tag{7.109}$$

bei komplexen Vektoren sowohl einen Real- als auch einen Imaginärteil besitzt. Die Norm von $\vec{k}$ kann in kartesischen Koordinaten durch $||\vec{k}||^2 = k_\mathrm{x}^2 + k_\mathrm{y}^2 + k_\mathrm{z}^2$ ersetzt werden.
Es hat sich eingebürgert, die Abkürzung

[1] Der Name Kreisfrequenz ist in diesem Zusammenhang etwas irreführend, weil eine Kreisfrequenz üblicherweise im Argument harmonischer Funktionen ($\sin$, $\cos$, $\exp$) auftritt, die hier ja zunächst nicht unbedingt vorliegen.

$$\omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu\varepsilon} = \frac{\omega}{c} = k = n \cdot k_0 \tag{7.110}$$

zu verwenden. Dabei wird die **Vakuumwellenzahl**

$$k_0 = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0} \tag{7.111}$$

und die **Brechzahl**

$$n = \sqrt{\mu\varepsilon} \tag{7.112}$$

eingeführt. Umstellen von (7.110) führt auf den Zusammenhang

$$\omega = kc \quad , \tag{7.113}$$

der später noch häufiger benutzt wird. Wird die Dispersionsrelation herangezogen, ergibt sich aus (7.107) mit (7.108) der Zusammenhang

$$\|\vec{k}\| = k = n \cdot k_0 \quad . \tag{7.114}$$

In Anhang H wird gezeigt, dass zwei der vier Lösungen redundant sind und somit immer nur das Pluszeichen vor der Phase $\xi_\pm$ berücksichtigt werden muss.
Der Name Dispersionsrelation ist mathematisch gesehen nur die Bezeichnung für eine Separationsbedingung. Gemeint ist tatsächlich, dass diese Bedingung erfüllt sein muss, damit ein bestimmter Ansatz Lösung der Wellengleichung ist. Aus diesem Grund gehören auch immer der Ansatz und die Dispersionsrelation zusammen!
Es zeigt sich in der Praxis, dass die Dispersionsrelation fast immer gleich aussieht. Etwas verwirrend ist, dass es sich eingebürgert hat, die Abkürzung (7.110) zu verwenden, weil man es gewöhnt ist, den Betrag (die Norm) eines Vektors mit dem gleichen Buchstaben ohne

Vektorpfeil abzukürzen. Die Abkürzung stammt historisch aus dem Vergleich der linken und rechten Seite der Dispersionsrelation für ebene Wellen.

Bei konstanter Phase $\xi_{\pm} = \omega t \pm \vec{k} \circ \vec{r}$ ist offenbar auch die Wellenelongation $f_{\pm}$ konstant, d.h. die Flächen gleicher Phase sind auch die Flächen konstanter $f_{\pm}$-Werte. Für einen festen Zeitpunkt $t = t_0$ sind die Orte gleicher Phase, also auch die Orte gleicher Wellenelongation durch die Bedingung

$$\vec{k} \circ \vec{r} = const \tag{7.115}$$

gegeben. Dieses ist die Gleichung einer Ebene senkrecht zum **Wellenvektor** $\vec{k}$. Die **Wellenfront**, gekennzeichnet durch gleiche Werte der Elongation, steht senkrecht auf $\vec{k}$. Betrachten wir den gesamten Zeitablauf, so gilt für das Orts-Zeit-Verhalten, d.h. die Bewegung von Wellenpunkten gleicher Elongation

$$\xi_{\pm}\left\{\vec{r}, t\right\} = \omega t \pm \vec{k} \circ \vec{r} = const \quad . \tag{7.116}$$

In der Zeit $\mathrm{d}t$ hat sich der Ort gleicher Elongation um $\mathrm{d}r_{\mathrm{p}}$ in Richtung von $\vec{k}$ bewegt

$$\mathrm{d}r_{\mathrm{p}} = \mp \frac{\omega}{\|\vec{k}\|}\ \mathrm{d}t = \mp \frac{\omega}{k}\ \mathrm{d}t \quad , \tag{7.117}$$

wobei $k = \|\vec{k}\| = \sqrt{\vec{k} \circ \vec{k}}$ verwendet wurde. Man hat

$$\left| \frac{\mathrm{d}r_{\mathrm{p}}}{\mathrm{d}t} \right| = \frac{\omega}{k} = c \tag{7.118}$$

als **Phasengeschwindigkeit** der Welle zu interpretieren. Die Welle $f_{+}\left\{\omega t + \vec{k} \circ \vec{r}\right\}$ des avancierten Potenzials bewegt sich in Richtung von $-\vec{k}$ und wird daher auch als **rückwärts laufende Welle** bezeichnet, die Welle des retardierten Potenzials $f_{-}\left\{\omega t - \vec{k} \circ \vec{r}\right\}$ bewegt sich in Richtung von $+\vec{k}$ und heißt daher auch **vorwärts laufende Welle**. Da die Wellenfronten Ebenen bilden, heißen beide Lösungen f_{+} und f_{-} auch **ebene Wellen**.

Wegen der Linearität der Wellengleichung sind Superpositionen ebener Wellen, die die Dispersionsrelation (7.107) erfüllen, selbstverständlich wieder Lösungen der Wellengleichung (7.100). Wie in Anhang H gezeigt wird, gibt es viele verschiedene Funktionen, die für f eingesetzt werden können. Im Folgenden wird gewöhnlich die Zeitabhängigkeit gemäß $\exp\{i\omega t\}$ gewählt. Damit lautet die Lösung der Wellengleichung

$$f_{\pm}\left\{\vec{r},t\right\} = \tilde{C}_{\pm}\ \exp\left\{i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \quad , \tag{7.119}$$

wobei immer nur der Realteil dieser als **harmonische ebene Welle** bezeichneten Form als Lösung zu nehmen ist. Man spricht bei $\tilde{C}_{\pm}$ von der **Spektralkomponente**, da ihr Wert die komplexe Amplitude der Welle bei der Frequenz ω bzw. dem **Ausbreitungskoeffizienten** k darstellt.

7.7.3 Eindeutigkeit der Lösung

Die Wellengleichung (7.93) hat unendlich viele Lösungen. Die Summe aller Lösungen ist auch wieder Lösung der Wellengleichung. Eindeutigkeit kann erst erzielt werden, wenn Anfangsbedingungen vorgegeben werden. Es gilt:

Werden für einen festen Zeitpunkt $t = t_0$ die Wellenform $\Psi\left\{\vec{r},t_0\right\}$ und deren zeitliche Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left\{\vec{r},t_0\right\}$ für alle Raumpunkte $\vec{r}$ vorgegeben, dann gibt es eine eindeutige Lösung der Wellengleichung (7.93) für alle Zeiten $t \geq t_0$.

Zum Nachweis verwenden wir an Stelle der festen Zeitabhängigkeit $\exp\{i\omega t\}$ und wechselnder Vorzeichen bei $\vec{k}$ die hier günstigere alternative Darstellung $f_{\pm} = \tilde{C}_{\pm}\exp\{i(\vec{k}\circ\vec{r}\pm\omega t)\}$, die gemäß Anhang H ja auch eine Lösungskombination ist.

Wir betrachten zunächst Lösungen Ψ_h der homogenen Wellengleichung. Als Ansatz zur Lösung der homogenen Wellengleichung wählen wir die Summe (das Integral) aller Lösungen (H.22) in der modifizierten Form

$$\boxed{\Psi_{\mathrm{h}}\left\{\vec{r},t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(C_{+}\left\{\vec{k}\right\} e^{i\,kc(t-t_0)} + C_{-}\left\{\vec{k}\right\} e^{-i\,kc(t-t_0)}\right) \cdot e^{i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3k \quad , \tag{7.120}}$$

wobei eine Zeitverschiebung um t_0 gegenüber der Lösung (7.119) eingeführt wurde und die Konstanten $C_{\pm}$ wegen der Integration nicht mehr die gleichen sind! Physikalisch relevant ist weiterhin nur der Realteil des Potenzials (7.120).

Zur Bestimmung der Koeffizienten wählen wir zunächst als festen Anfangszeitpunkt $t = t_0$ und bemerken, dass folgende zwei Gleichungen gelten:

$$\Psi_{h}\left\{\vec{r},t=t_0\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(C_{+}\left\{\vec{k}\right\} + C_{-}\left\{\vec{k}\right\}\right) e^{i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3k \tag{7.121}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Psi_{\mathrm{h}}\left\{\vec{r},t=t_0\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} i\,kc\left(C_{+}\left\{\vec{k}\right\} - C_{-}\left\{\vec{k}\right\}\right) e^{i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3k \quad . \tag{7.122}$$

Die Koeffizienten in (7.121) und (7.122) lassen sich durch komplexe räumliche Fouriertransformation ermitteln. Für den Übergang von der bekannten zeitlichen Fouriertransformation wird hier lediglich die Zeit t durch den Ort $\vec{r}$ und die Kreisfrequenz ω durch den Wellenzahlvektor $\vec{k}$ ersetzt. Am Beispiel (7.121) seien die Schritte kurz wiedergegeben:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{V} \Psi_{\mathrm{h}}\left\{\vec{r},t=t_0\right\} \cdot e^{-i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3r \\
&\qquad = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{V}\left[\iiint\limits_{K} \left(C_{+}+C_{-}\right) e^{i\,\vec{k}'\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3k'\right] \cdot e^{-i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3r \\
&\qquad = \left(C_{+}+C_{-}\right)\cdot\delta_{k,k'} \quad ,
\end{aligned} \tag{7.123}$$

also

$$C_{+} + C_{-} = \frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{V} \Psi_{\mathrm{h}}\left\{\vec{r},t\right\}\Big|_{t=t_0} \cdot e^{-i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3r \tag{7.124}$$

Entsprechend erhält man

$$C_+ - C_- = \frac{1}{i\,kc}\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial t}\Psi_\mathrm{h}\left\{\vec{r},t\right\}\Big|_{t=t_0} \cdot e^{-i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\ \mathrm{d}^3 r \quad . \tag{7.125}$$

Damit erhält man durch Addition bzw. Subtraktion von (7.124) und (7.125) sofort die durch die Randbedingungen festgelegten Spektralkomponenten

$$C_+\left\{\vec{k}\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi_\mathrm{h}\left\{\vec{r},t\right\} + \frac{1}{i\,kc}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\mathrm{h}\left\{\vec{r},t\right\}\right)\Big|_{t=t_0} \cdot e^{-i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\ \mathrm{d}^3 r \tag{7.126}$$

$$C_-\left\{\vec{k}\right\} = \frac{1}{2}\frac{1}{(2\pi)^3}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\Psi_\mathrm{h}\left\{\vec{r},t\right\} - \frac{1}{i\,kc}\frac{\partial}{\partial t}\Psi_\mathrm{h}\left\{\vec{r},t\right\}\right)\Big|_{t=t_0} \cdot e^{-i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\ \mathrm{d}^3 r \tag{7.127}$$

Mit den so bestimmten Spektralkomponenten $C_+\left\{\vec{k}\right\}$ und $C_-\left\{\vec{k}\right\}$ ist die Lösung (7.120) der homogenen Wellengleichung völlig bestimmt. Diese Lösung erfüllt beliebige, vorgegeben Anfangsbedingungen, sie ist damit die allgemeine Lösung der homogenen Wellengleichung.

Die retardierte Lösung Ψ_ret (7.95) ist im freien Raum eine partikuläre Lösung der ungedämpften inhomogenen Wellengleichung

$$\Delta\Psi\left\{\vec{r},t\right\} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\left\{\vec{r},t\right\} = -4\pi g\left\{\vec{r},t\right\} \quad . \tag{7.128}$$

Die Anfangsbedingungen des retardierten Potenzials lauten

$$\Psi_\mathrm{ret}\left\{\vec{r},t=t_0\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{g\left\{\vec{r}\,',(t-t_0)-\frac{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}{c}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\ \mathrm{d}^3 r' \tag{7.129}$$

und

$$\frac{\partial\Psi_{\mathrm{ret}}}{\partial t}\left\{\vec{r},t=t_0\right\}=\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\frac{\partial}{\partial t}g\left\{\vec{r}',(t-t_0)-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}\Big|_{t=t_0}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{7.130}$$

Zur Erfüllung vorgegebener Anfangsbedingungen sind die Anfangswerte (7.129) und (7.130) der retardierten Lösung bei der Bestimmung der Spektralkomponenten $C_+\left\{\vec{k}\right\}$ und $C_-\left\{\vec{k}\right\}$ mit $\Psi_h = \Psi - \Psi_{\mathrm{ret}}$ zu berücksichtigen. Die allgemeine Lösung der ungedämpften inhomogenen Wellengleichung ist

$$\Psi\left\{\vec{r},t\right\}=\Psi_{\mathrm{ret}}+\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left(C_+\left\{\vec{k}\right\}+C_-\left\{\vec{k}\right\}\right)\cdot e^{i\,\vec{k}\circ\vec{r}}\,\mathrm{d}^3k \quad . \tag{7.131}$$

Im Gegensatz zur Elektrostatik, bei der für eine (bis auf konstante Summanden) eindeutige Lösung des Potenzials nur auf dem Rand eines Gebietes V bzw. $\vec{\nabla}V$ vorgegeben sein muss, wird hier eine Vorgabe im gesamten Gebiet sowohl für das Potenzial als auch für dessen zeitliche Ableitung zum Anfangszeitpunkt verlangt.

Angemerkt sei hier noch, dass die Lichtgeschwindigkeit wegen der vorausgesetzten homogenen Medien ortsunabhängig ist.

In inhomogenen (ortsabhängigen) Medien lassen sich die Potenziale nicht mehr durch die Lorenz Eichung entkoppeln. Eine mögliche Lösung der homogenen Wellengleichung ist dann von der Form

$$\Psi\{\vec{r},t\}=\Psi_0\{\vec{r}\}\exp\{\pm i(\omega t-kL_{\mathrm{W}}\{\vec{r}\})\} \quad , \tag{7.132}$$

wobei $L_{\mathrm{W}}\{\vec{r}\}$ das sogenannte **Eikonal** ist. Das Eikonal stellt in der geometrischen Optik den Lichtweg dar. Im Falle ortsunabhängiger Lichtgeschwindigkeit identifiziert man leicht durch Vergleich $L_{\mathrm{W}}\{\vec{r}\}=\frac{1}{k}(\vec{k}\circ\vec{r})$.

7.8 Lösungen der gedämpften Wellengleichung

7.8.1 Lösung der gedämpften homogenen Wellengleichung

Als Ansatz zur Lösung der

gedämpften homogenen Wellengleichung

$$\Delta\Psi\{\vec{r},t\} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Psi\{\vec{r},t\} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\{\vec{r},t\} = 0 \quad . \tag{7.133}$$

ist (7.119) ungünstig. Wir erinnern uns, dass es zwei weitere redundante Lösungen der Wellengleichung gibt und wählen ab jetzt

$$f_\pm\{\vec{r},t\} = C_{\pm k}\,\exp\left\{i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \quad , \tag{7.134}$$

wobei jetzt das Minuszeichen für die vorwärts laufende Welle und das Pluszeichen für die rückwärts laufende Welle steht. Es folgt die

Dispersionsrelation für verlustbehaftete Medien

$$\vec{k}\circ\vec{k} = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 - i\mu\mu_0\sigma\omega = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}) \quad . \tag{7.135}$$

Wegen der Verluste muss der Ausbreitungsvektor sowohl einen Imaginär- als auch einen Realteil aufweisen. In (7.92) wurde die Lichtgeschwindigkeit und die Brechzahl eingeführt. Für die hier verwendeten monochromatischen harmonischen ebenen Wellen bietet es sich an, als Pendant dazu eine komplexe Lichtgeschwindigkeit und die zugehörige komplexe Brechzahl zu definieren. Aus (7.135) resultiert für k das Ergebnis

$$k = \sqrt{\vec{k}\circ\vec{k}} = \omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon_0(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0})} = \omega\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)} \quad . \tag{7.136}$$

Die Größe $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}$ ist wieder die **Vakuumlichtgeschwindigkeit**. Mit der Definition einer **komplexen Brechzahl**

$$n = \sqrt{\mu\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)} \tag{7.137}$$

und der **komplexen Lichtgeschwindigkeit**

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}\frac{1}{\sqrt{\mu\left(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\right)}} = \frac{c_0}{n} \tag{7.138}$$

folgt die Wellenzahl dem bekannten Zusammenhang $\omega = kc = kc_0/n$ und die Dispersionsrelation hat wieder die Form (7.107). Das Potenzial hat unter diesen Voraussetzungen in verlustbehafteten Medien die Darstellung (7.119) und auch die allgemeine Lösung behält ihre Gültigkeit, wie mit etwas Rechenaufwand gezeigt werden kann. Besonders wichtig ist dabei die Tatsache, dass k wegen der Dispersionsrelation (7.135) die Eigenschaft $k\{\omega\} = k^*\{-\omega\}$ hat.

In der Literatur findet man häufig eine zu (H.19) und (7.138) konjugiert komplex definierte Brechzahl und Lichtgeschwindigkeit. Das hängt damit zusammen, dass im Gegensatz zu unserer Wahl gerade das negative Vorzeichen vor der Kreisfrequenz genommen wurde.

7.9 Wellengleichungen für das elektrische Feld und die magnetische Induktion

Wir untersuchen in diesem Abschnitt elektromagnetische Felder in ungeladenen Dielektrika mit $\varrho = 0$ und $\vec{j} = 0$. Für lineare homogene Medien gelten außerdem die Materialgleichungen

$$\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H} \quad , \quad \vec{\nabla}\mu = 0 \tag{7.139}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \quad , \quad \vec{\nabla}\varepsilon = 0 \quad . \tag{7.140}$$

Damit lauten die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = 0 \quad , \tag{7.141}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \quad , \tag{7.142}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \tag{7.143}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad . \tag{7.144}$$

Dies ist ein System von linearen partiellen homogenen Differentialgleichungen für die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Durch Anwendung des Rotations-Operators folgt in kartesischen Koordinaten

$$\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{E} = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \circ \vec{E})}_{=0} - \Delta\vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \tag{7.145}$$

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \circ \vec{B})}_{=0} - \Delta\vec{B} &= \varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\ &= -\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{B} \end{aligned} \tag{7.146}$$

Dies sind homogene Wellengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{B}$. Die Größe

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{7.147}$$

ist die bereits bei der Potenzialbetrachtung eingeführte Brechzahl. Die **Wellenausbreitungsgeschwindigkeit** ist wie schon bei den Potenzialen

$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}} \quad , \tag{7.148}$$

wobei $c_0 = 1/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$ die **Vakuumlichtgeschwindigkeit** bezeichnet.

Damit kann man die Wellengleichungen schreiben

$$\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{E} = 0 \tag{7.149}$$

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B} = 0 \quad . \tag{7.150}$$

Diese Wellengleichungen sind durch Rotationsbildung aus den Maxwellgleichungen hervorgegangen. Ihre **Lösungsmenge** kann deshalb **größer** sein **als die der Maxwellgleichungen**. Wir werden uns auf solche Lösungen von (7.149) und (7.150) beschränken, die simultan die von den Maxwellgleichungen geforderten Kopplungen zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ reproduzieren.
Es sei noch angemerkt, dass wegen den vorausgesetzten Linearitäten (7.139) und (7.140) für die Hilfsfelder $\vec{H}$ und $\vec{D}$ ebenfalls Wellengleichungen der Form (7.149) bzw. (7.150) gültig sind.
Vergleicht man (7.149) und (7.150) mit den Wellengleichungen (7.90) und (7.91) für das skalare Potenzial und das Vektorpotenzial, so ist zu beachten, dass in letzterem wegen (7.66) und (7.69) eine Kopplung zwischen $\vec{E}$ und $\vec{B}$ berücksichtigt ist, wie es die Maxwellgleichungen erfordern.
Wird ohmsche Leitfähigkeit σ berücksichtigt, dass heißt $\vec{j} \neq 0$, ergibt sich für $\vec{E}$ wieder die oben angegebene ungedämpfte Wellengleichung mit reeller Lichtgeschwindigkeit c, für $\vec{B}$ resultiert eine gedämpfte Wellengleichung, die im Fall zeitharmonischer Felder auf die bekannte komplexe Lichtgeschwindigkeit führt.

Kapitel 8

Wellenausbreitung in Dielektrika

8.1 Ebene elektromagnetische Wellen

In nicht leitenden, ladungsfreien, stückweise homogenen dielektrischen Medien ist $\vec{j} = \varrho = \sigma = 0$ und $\varepsilon = const$ bzw. $\mu = const$. Da die Felder $\vec{E}$ und $\vec{B}$ homogene Wellengleichungen erfüllen, sind ebene Wellen

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = \vec{f}\left\{(\omega t \mp \vec{k} \circ \vec{r})\right\} = \vec{f}\{\pm\xi\} \tag{8.1}$$

und

$$\vec{B}\{\vec{r}, t\} = \vec{g}\left\{\omega t \mp (\vec{k} \circ \vec{r})\right\} = \vec{g}\{\pm\xi\} \quad , \tag{8.2}$$

die sich in Richtung von $\vec{k}$ ausbreiten, spezielle mögliche Ausbreitungsformen der Felder. Hierbei hängen die Vektorfunktionen $\vec{f} = (f_\mathrm{x}, f_\mathrm{y}, f_\mathrm{z})^T$ bzw. $\vec{g} = (g_\mathrm{x}, g_\mathrm{y}, g_\mathrm{z})^T$ nur von einer reellen Variablen ξ ab.

8.1.1 Transversaler Charakter ebener elektromagnetischer Wellen

Ebene elektrische Wellen der Form (8.1) müssen wegen der vorausgesetzten Ladungsfreiheit die Maxwellgleichungen

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \circ \vec{E} = 0 &= \frac{\partial f_{\mathsf{x}}}{\partial x} + \frac{\partial f_{\mathsf{y}}}{\partial y} + \frac{\partial f_{\mathsf{z}}}{\partial z} \\ &= \pm\frac{\partial f_{\mathsf{x}}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} \pm \frac{\partial f_{\mathsf{y}}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y} \pm \frac{\partial f_{\mathsf{z}}}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial z} = \mp k_{\mathsf{x}}\frac{\partial f_{\mathsf{x}}}{\partial \xi} \mp k_{\mathsf{y}}\frac{\partial f_{\mathsf{y}}}{\partial \xi} \mp k_{\mathsf{z}}\frac{\partial f_{\mathsf{z}}}{\partial \xi} \\ &= \mp\vec{k} \circ \frac{\partial \vec{f}}{\partial \xi} = \mp\frac{\partial}{\partial \xi}(\vec{k} \circ \vec{f})\end{aligned} \tag{8.3}$$

erfüllen, wobei wir gemäß Ansatz (8.1) $\xi = \omega t - \vec{k} \circ \vec{r}$ gesetzt und die Kettenregel angewendet haben. Aus (8.3) folgt

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\vec{k} \circ \vec{f}\,) = 0 \tag{8.4}$$

und damit

$$\vec{k} \circ \vec{f} = \vec{k} \circ \vec{E} = const \quad , \tag{8.5}$$

d. h. die Komponente von $\vec{E}$ in Richtung des **Wellenausbreitungsvektors** $\vec{k}$ ist räumlich und zeitlich konstant. Solche konstanten Anteile interessieren uns nicht weiter, und wir erkennen, dass in ebenen Wellen $\vec{E}$ und $\vec{k}$ aufeinander senkrecht stehen.
Wegen $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ schließen wir in entsprechender Weise, dass auch das Magnetfeld einer ebenen Welle senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung steht. Es gilt also

$$\boxed{\vec{E} \circ \vec{k} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{B} \circ \vec{k} = 0 \quad .} \tag{8.6}$$

Wird die Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \tag{8.7}$$

betrachtet, findet man durch Vergleich von

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = \pm\vec{\nabla}\xi \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \xi} = \mp\vec{k} \times \frac{\partial \vec{f}}{\partial \xi} = \mp\frac{\partial}{\partial \xi}(\vec{k} \times \vec{f}\,) \tag{8.8}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} = \frac{\pm\partial\vec{g}}{\partial\xi}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi = \pm\omega\frac{\partial\vec{g}}{\partial\xi} = \pm\frac{\partial}{\partial\xi}(\omega\vec{g}) \tag{8.9}$$

den Zusammenhang

$$\vec{k}\times\vec{f}\{\xi\} = \omega\vec{g}\{\xi\} + \ const \tag{8.10}$$

oder

$$\boxed{\vec{k}\times\vec{E} = \omega\vec{B} \quad ,} \tag{8.11}$$

wenn wieder raum- und zeitkonstante Anteile nicht beachtet werden. In ebenen Wellen, die sich in Richtung $\vec{k}$ ausbreiten, bilden $\vec{k}, \vec{E}$ und $\vec{B}$ ein orthogonales Rechtssystem, das in Abbildung 8.1 dargestellt ist.

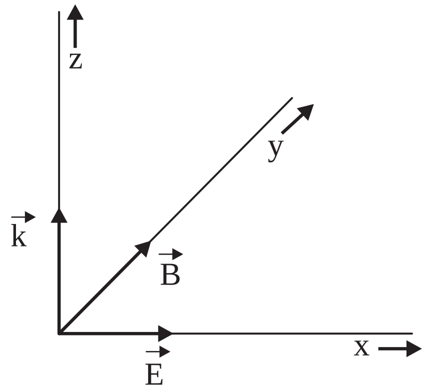


Abbildung 8.1: Zum transversalen Charakter ebener elektromagnetischer Wellen

In ebenen Wellen sind $\vec{E}$ und $\vec{B}$ jederzeit senkrecht zueinander gerichtet und zugleich senkrecht zum Ausbreitungsvektor. Dies ist Ausdruck des transversalen Charakters ebener elektromagnetischer Wellen. Weil $\vec{B}$ ein Pseudovektor ist (Abschnitt 3.1.1), muss seine Richtung mit Änderung der Ausbreitungsrichtung (rückwärts laufende Welle) gedreht werden. Die Transversalität folgt offenbar aus $\vec{\nabla}\circ\vec{E} = 0$ und $\vec{\nabla}\circ\vec{B} = 0$, d. h. der Quellenfreiheit der Felder.

Mit (8.11) kann die magnetische Induktion aus dem bekannten elektrischen Feld berechnet werden. Ist dagegen die magnetische Induktion bekannt, resultiert aus $(\vec{k}\times\vec{E})\times\vec{k} = \omega\vec{B}\times\vec{k}$

$$\|\vec{k}\|^2\vec{E} = \omega(\vec{B} \times \vec{k}) \quad . \tag{8.12}$$

In linearen Medien gilt $\vec{B} = \mu\mu_0\vec{H}$ und damit resultiert unter Verwendung der Dispersions-relation in verlustbehafteten Medien

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\vec{k} \times \vec{E} && (8.13)\\ \vec{E} &= \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0 - i\sigma}\vec{H} \times \vec{k} \quad . && (8.14) \end{aligned}}$$

Da sowohl das Plus- als auch das Minuszeichen vor dem Ausbreitungswert ξ in (8.1) bzw. in (8.2) keinen Einfluss auf das Ergebnis haben, werden wir im folgenden nur das Pluszeichen verwenden. In einem Teil der auf dem Markt verfügbaren Lehrbücher wird dagegen das Minuszeichen verwendet, was bei der Einführung komplexer Dielektrizitätskonstanten und Brechzahlen zu konjugiert komplexen Werten führt.

Führt man den komplexen **Wellenwiderstand**

$$Z = \sqrt{\frac{\omega\mu\mu_0}{\omega\varepsilon\varepsilon_0 - i\sigma}} \tag{8.15}$$

ein , kann man (8.13) bzw. (8.14) auch schreiben als

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{kZ}\vec{k} \times \vec{E} && (8.16)\\ \vec{E} &= \frac{Z}{k}\vec{H} \times \vec{k} && (8.17)\\ & && (8.18) \end{aligned}}$$

Im verlustlosen Fall reduziert sich der Wellenwiderstand auf die Schreibweise

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = Z_0\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \quad . \tag{8.19}$$

Der Faktor $Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 120\pi\Omega$ wird als **Vakuumwellenwiderstand** bezeichnet.

8.1.2 Monochromatische ebene Wellen und Polarisation

Monochromatische ebene Wellen besitzen eine harmonische Zeitabhängigkeit. Das elektrische Feld hat die Form

$$\vec{E}_{\mathrm{R}}\left\{\vec{r},t\right\} = \vec{E}_{\mathrm{R0}}\cos\left\{\omega t - \vec{k}\circ\vec{r} + \varphi\right\} \quad . \tag{8.20}$$

Die Größe φ heißt Nullphase. Wir benutzen wieder die komplexe Schreibweise und haben

$$\vec{E}_{\mathrm{R}}\left\{\vec{r},t\right\} = \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0 \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\}\right\} \quad . \tag{8.21}$$

Der konstante komplexe Amplitudenvektor $\vec{E}_0 = \left(E_{0\mathrm{x}}\exp\{i\varphi_{\mathrm{x}}\}, E_{0\mathrm{y}}\exp\{i\varphi_{\mathrm{y}}\}, E_{0\mathrm{z}}\exp\{i\varphi_{\mathrm{z}}\}\right)^T$ beinhaltet die Nullphase. Er wird als **Phasor** der elektrischen Feldstärke bezeichnet. Abkürzend schreiben wir

$$\vec{E}\left\{\vec{r},t\right\} = \vec{E}_0 \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\} \quad . \tag{8.22}$$

Das zugehörige Magnetfeld erhält man sofort aus (8.13) mit $\vec{H}_0 = \dfrac{\vec{k}\times\vec{E}_0}{\omega\mu\mu_0}$

$$\vec{H}\left\{\vec{r},t\right\} = \vec{H}_0 \exp\left\{i\left(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r}\right)\right\} \quad . \tag{8.23}$$

Man erkennt, dass $\vec{E}$ und $\vec{H}$ gleichphasig schwingen, solange der Ausbreitungsvektor k und damit der Wellenwiderstand Z reell ist. Eine monochromatische ebene Welle zum Zeitpunkt $t = 0$ ist in Abbildung 8.2 für den Fall, dass $\vec{k}$ in z-Richtung weist und die Nullphase $\varphi = 0$ ist, dargestellt.

Polarisation

Unter der **Polarisation** einer Welle versteht man die (zeitabhängige) Richtung des elektrischen Feldstärkevektors, genauer: Die Figur, die der Feldstärkevektor an einem festen Ort im Raum beschreibt. *Achtung: in der Physik wird häufig die Richtung des magnetischen Feldstärkevektors zur Angabe der Polarisation herangezogen.*

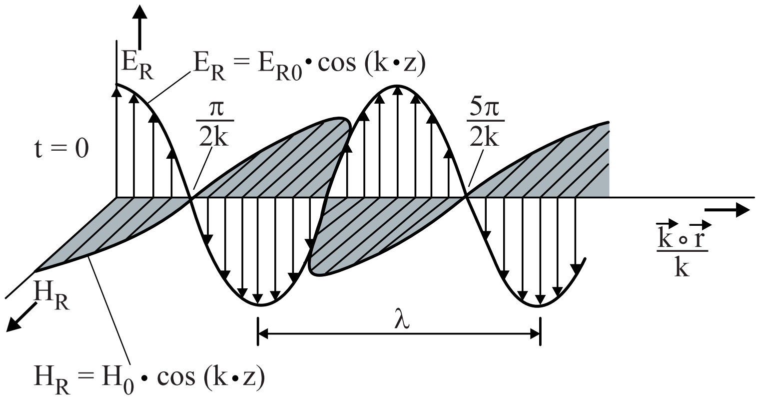


Abbildung 8.2: Linear polarisierte monochromatische ebene Welle

Betrachten wir zunächst den Fall, dass die Nullphase für alle Komponenten gleich ist, also $\varphi_{\mathrm{x}} = \varphi_{\mathrm{y}} = \varphi_{\mathrm{z}} = \varphi$. Der Realteil des elektrischen Feldes hat dann die Darstellung

$$\vec{E}_{\mathrm{R}} = (E_{0\mathrm{x}}, E_{0\mathrm{y}}, E_{0\mathrm{z}})^T \cos\{\omega t - \vec{k} \circ \vec{r} + \varphi\} \quad . \tag{8.24}$$

Der Weg, den die Spitze des elektrischen Feldstärkevektors an einem festen Punkt im Raum $\vec{k} \circ \vec{r} = \mathsf{const}$ durchschreitet, ist eine Gerade parallel zum Feldstärkevektor. Man spricht in diesem Fall von linearer Polarisation. Die Feldstärkeverteilung im Raum entlang $\vec{k}$ ist dreidimensional in Abbildung 8.2 für den Zeitpunkt $t = 0$ und $\varphi = 0$ dargestellt. Der Abstand zwischen zwei Maxima oder Minima ist als **Wellenlänge** im Medium λ_{m} definiert. Es gilt der Zusammenhang

$$k = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathrm{m}}}.$$

Ist die Brechzahl des Mediums $n = 1$ wie im Vakuum, spricht man auch von der **Vakuumwellenlänge**, die über die Vakuumwellenzahl

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$$

definiert ist. Wenn eine Wellenlänge angegeben wird, ist es üblicherweise die Vakuumwellenlänge.

Der Amplitudenvektor $\vec{E}_0$ steht zwangsläufig senkrecht auf $\vec{k}$. Wir wählen als Ausbreitungsrichtung die z-Richtung und haben $\vec{k} = (0, 0, k_\mathrm{z})^T = (0, 0, k)^T$ und $\vec{E}_0 = (E_\mathrm{x}, E_\mathrm{y}, 0)^T$. Damit ist

$$\vec{E}\,\{\vec{r}, t\} = (E_\mathrm{x}, E_\mathrm{y}, 0)^T \exp\{i(\omega t - \ kz)\} \tag{8.25}$$

Die beiden Amplituden E_x und E_y sind im allgemeinen komplex mit den Phasenlagen $\varphi_\mathrm{x} = \varphi$ und $\varphi_\mathrm{y} = \varphi + \delta$

$$E_\mathrm{x} = |E_\mathrm{x}| \exp\{i\varphi\} = E_{0\mathrm{x}} \exp\{i\varphi\} \quad , \tag{8.26}$$

$$E_\mathrm{y} = |E_\mathrm{y}| \exp\{i(\varphi + \delta)\} = E_{0\mathrm{y}} \exp\{i(\varphi + \delta)\} \quad . \tag{8.27}$$

Die reellen Feldkomponenten sind

$$E_\mathrm{Rx} = E_{0\mathrm{x}} \cos\,\{\omega t - kz + \varphi\} \quad , \tag{8.28}$$

$$E_\mathrm{Ry} = E_{0\mathrm{y}} \cos\,\{\omega t - kz + \varphi + \delta\} \quad . \tag{8.29}$$

8.1.3 Überlagerung monochromatischer linear polarisierter Wellen gleicher Ausbreitungsrichtung

Sowohl die x- als auch die y-Komponente des elektrischen Feldes können als linear polarisierte Wellen aufgefasst werden, die sich zum Gesamtfeld überlagern. Bezüglich der relativen Phase δ und der Amplitudenverhältnisse lassen sich mehrere Fälle für die resultierende

Polarisation unterscheiden.

1. Fall: $\delta = \pm m\pi$, $m \in \mathbb{N}_0$

Die Komponenten E_x und E_y schwingen gleichphasig oder gegenphasig. Für einen festen Punkt $z = z_0$ bewegt sich die Spitze des Vektors $\vec{E}$ auf einer Geraden in der x, y-Ebene. Der Winkel α zur x-Achse ist durch

$$\tan\alpha = \pm\frac{E_{0\mathrm{y}}}{E_{0\mathrm{x}}} \tag{8.30}$$

gegeben. Die Schwingung ist in Abbildung 8.3 dargestellt. Sie ist **linear polarisiert**.

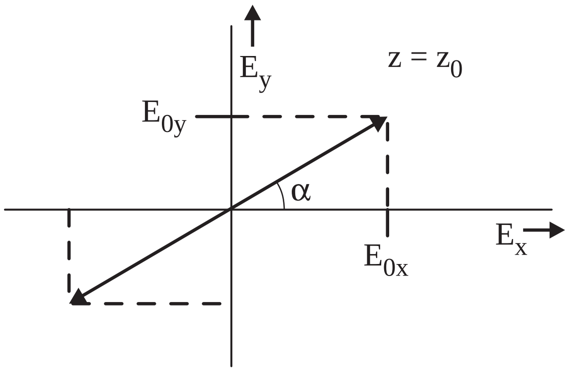


Abbildung 8.3: Linear polarisierte Welle. Schwingung der Feldstärke an einem festen Raumpunkt.

2. Fall: $\delta = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{N}_0$, $E_{0\mathrm{x}} = E_{0\mathrm{y}} = E_0$

In diesem Fall gilt

$$\vec{E}_R = E_0\left(\cos\left\{\omega t - kz + \varphi\right\}\vec{e}_\mathrm{x} \mp \sin\left\{\omega t - kz + \varphi\right\}\vec{e}_\mathrm{y}\right) \tag{8.31}$$

An einem festen Raumpunkt $z = z_0$ bewegt sich die Spitze des Vektors $\vec{E}$ in der x, y-Ebene auf einem Kreis mit Radius E_0. Die Welle ist für $\delta = -\pi/2$ **rechts zirkular polarisiert**, für $\delta = +\pi/2$ **links zirkular polarisiert**. Die Angabe der Drehrichtung erfolgt bezüglich des Ausbreitungsvektors, der in z-Richtung zeigt. Abbildung 8.4 zeigt die Bewegung der Spitze des Feldstärkevektors für Wellenausbreitung, wobei die z-Richtung aus der Papierebene heraus zeigt. Im Raum bewegt sich die Spitze des Feldstärkevektors für einen festen Zeitpunkt auf einer kreisförmigen Spirale.

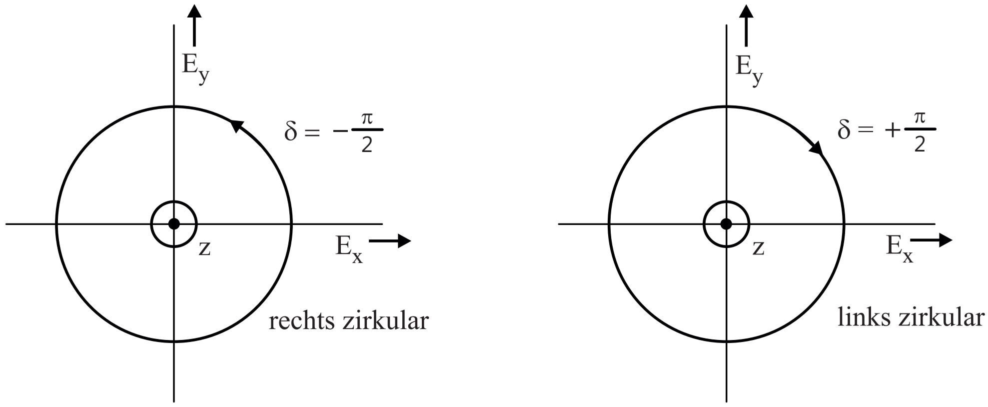


Abbildung 8.4: Zirkular polarisierte Welle. Die Angabe der Drehrichtung ist bezüglich der Ausbreitung (hier in z-Richtung) zu wählen.

3. Fall: $\delta = \pm\frac{\pi}{2} + m\pi$, $m \in \mathbb{N}_0$, $E_{0\mathrm{x}} \neq E_{0\mathrm{y}}$

Dies bedeutet nach (8.28) und (8.29)

$$E_{\mathrm{Rx}} = E_{0\mathrm{x}} \cos\{\omega t - kz + \varphi\} \tag{8.32}$$

$$E_{\mathrm{Ry}} = \mp E_{0\mathrm{y}} \sin\{\omega t - kz + \varphi\} \tag{8.33}$$

oder

$$\frac{E_{\mathrm{Rx}}^2}{E_{0\mathrm{x}}^2} + \frac{E_{\mathrm{Ry}}^2}{E_{0\mathrm{y}}^2} = 1 \tag{8.34}$$

Die Spitze des Feldstärkevektors ist nach Abbildung 8.5 für $z = konst$ in der $E_{\mathrm{x}}, E_{\mathrm{y}}$-Ebene eine Ellipse, die achsenparallel liegt. Man spricht von **elliptisch polarisierten** Wellen. Räumlich ergeben sich elliptische Spiralen um die z-Achse für feste Zeitpunkte $t = \mathsf{konst}$.

4. Fall: δ beliebig, $E_{0\mathrm{x}}, E_{0\mathrm{y}}$ beliebig

Hierbei durchläuft die Spitze des $\vec{E}$-Vektors für jedes $z = konst$ wieder eine Ellipse,

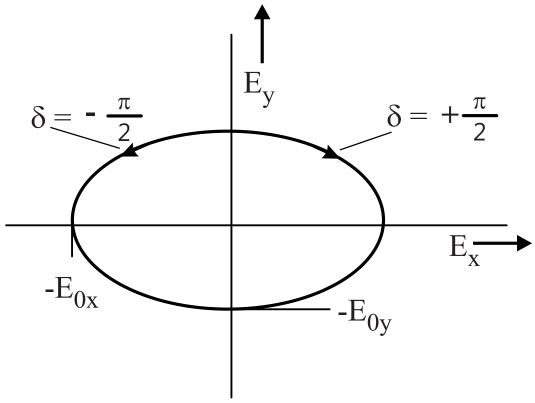


Abbildung 8.5: Elliptisch polarisierte Welle mit Hauptachsen parallel zur x- bzw. y-Achse

die allerdings verdreht zu dem x, y-Achsenkreuz liegt. Durch eine Hauptachsentransformation lässt sich dieser Fall in den vorher diskutierten überführen. Man spricht auch hier von **elliptisch polarisierten** ebenen Wellen. Abbildung 8.6 zeigt die Bewegung des Feldstärkevektors.

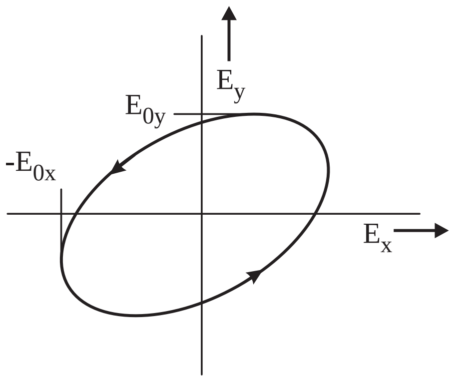


Abbildung 8.6: Elliptisch polarisierte Welle mit beliebiger Hauptachsenlage

Wir haben in unserer Diskussion jede Polarisationsform aus zwei linear polarisierten Wellen $\vec{E}_1 = (E_{\mathrm{x}}, 0, 0)^T$ und $\vec{E}_2 = (0, E_{\mathrm{y}}, 0)^T$ zusammengesetzt. Man kann auch andere orthogonal zueinander polarisierte Wellen wählen, um beliebige elliptisch polarisierte Wellen zu beschreiben. Beispielsweise bilden eine links zirkular und eine rechts zirkular polarisierte Welle ein Orthogonalsystem der gewünschten Form.

8.1.4 Überlagerung monochromatischer linear polarisierter ebener Wellen unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung

Im vorigen Kapitel wurde die Überlagerung zweier orthogonal zueinander linear polarisierter ebener Wellen gleicher Frequenz und Ausbreitungsrichtung aber unterschiedlicher Amplituden und Phasen betrachtet. Hier soll die Überlagerung bei gleicher Amplitude, Frequenz und Phase aber unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung untersucht werden. Dabei liegen die elektrischen oder magnetischen Feldstärkevektoren zueinander parallel. Dieser Fall tritt zum Beispiel bei der Reflexion einer Welle auf. Die Überlagerung der einfallenden und der reflektierten Welle wäre dann zu betrachten. Wir betrachten zwei in x-Richtung linear polarisierte Wellen mit reell angenommenen Amplituden $\vec{E}_0 = (E_0, 0, 0)^T = \mathsf{const}$

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k}_1 \circ \vec{r})\} \\ \vec{E}_{\mathsf{R1}} &= \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_1\right\} = \vec{E}_0 \cos\left\{\omega t - \vec{k}_1 \circ \vec{r}\right\}\end{aligned} \tag{8.35}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{E}_2 &= \vec{E}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k}_2 \circ \vec{r})\} \\ \vec{E}_{\mathsf{R2}} &= \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_2\right\} = \vec{E}_0 \cos\left\{\omega t - \vec{k}_2 \circ \vec{r}\right\}\end{aligned} \tag{8.36}$$

deren Ausbreitungsvektoren $\vec{k}_1 = (0, -k_{\mathsf{y}}, k_{\mathsf{z}})^T$ und $\vec{k}_2 = (0, k_{\mathsf{y}}, k_{\mathsf{z}})^T$ lauten. Abbildung 8.7 und Abbildung 8.8 zeigen die Geometrie.
Die magnetischen Felder der Teilwellen sind

$$\vec{H}_1 = \frac{\vec{k}_1 \times \vec{E}_1}{k_1 Z} = \frac{E_0}{\omega\mu\mu_0}(0, k_{\mathsf{z}}, k_{\mathsf{y}})^T \exp\{i(\omega t - \vec{k}_1 \circ \vec{r})\} \tag{8.37}$$

und

$$\vec{H}_2 = \frac{\vec{k}_2 \times \vec{E}_2}{k_2 Z} = \frac{E_0}{\omega\mu\mu_0}(0, k_{\mathsf{z}}, -k_{\mathsf{y}})^T \exp\{i(\omega t - \vec{k}_1 \circ \vec{r})\} \quad . \tag{8.38}$$

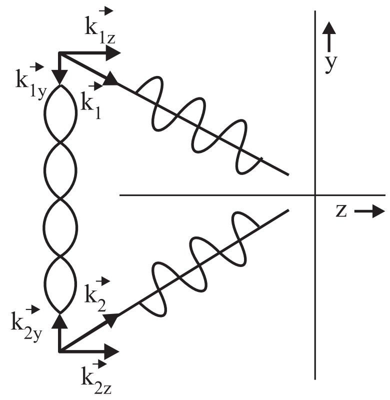


Abbildung 8.7: $\vec{k}$-Vektoren bei der Überlagerung zweier ebener Wellen

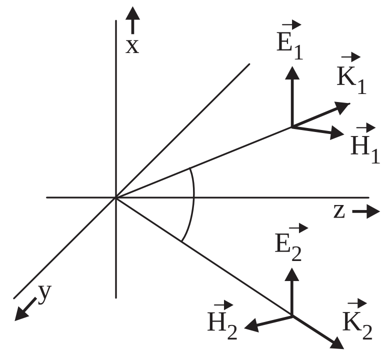


Abbildung 8.8: Feldkomponenten bei der Überlagerung zweier ebener Wellen

Die Überlagerung ergibt

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = 2\vec{E}_0 \cos\{k_\mathsf{y} y\} \exp\{i(\omega t - k_\mathsf{z} z)\} \\ &= 2E_0 \cos\{k_\mathsf{y} y\} \exp\{i(\omega t - k_\mathsf{z} z)\} \vec{e}_\mathsf{x}\end{aligned} \tag{8.39}$$

und

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2 = \left(0, k_\mathsf{z} \cos\{k_\mathsf{y} y\}, -i\, k_\mathsf{y} \sin\{k_\mathsf{y} y\}\right)^T \frac{2E_0}{\omega\mu\mu_0} \exp\{i(\omega t - k_\mathsf{z} z)\} \quad . \tag{8.40}$$

Gemeint ist hierbei immer der Realteil, also

$$\left.\begin{aligned} E_{\mathsf{R}x} &= 2E_0 \cos\{k_\mathsf{y} y\} \cos\{k_\mathsf{z} z - \omega t\} \quad , \\ E_{\mathsf{R}y} &= E_{\mathsf{R}z} = 0 \end{aligned}\right\} \tag{8.41}$$

und

$$\left.\begin{array}{l} H_{\mathsf{R}x} = 0 \quad , \\ H_{\mathsf{R}y} = \frac{2E_0 k_\mathsf{z}}{\omega\mu\mu_0} \cos\{k_\mathsf{y} y\} \cos\{\omega t - k_\mathsf{z} z\} \quad , \\ H_{\mathsf{R}z} = \frac{2E_0 k_\mathsf{y}}{\omega\mu\mu_0} \sin\{k_\mathsf{y} y\} \sin\{\omega t - k_\mathsf{z} z\} \quad . \end{array}\right\} \tag{8.42}$$

Dies ist **keine ebene Welle** mehr. Sie ist in y-Richtung eine stehende Welle, in z-Richtung eine laufende Welle mit der **Phasengeschwindigkeit**

$$c_\mathsf{ph} = \frac{\omega}{k_\mathsf{z}} = \frac{\omega}{\beta} \quad . \tag{8.43}$$

Weil die Welle nur noch in z-Richtung läuft, wird die z-Komponente des Wellenzahlvektors durch den **Ausbreitungskoeffizienten** $k_\mathsf{z} = \beta$ ersetzt, der im allgemeinen die Wellenzahl in Ausbreitungsrichtung der Welle angibt.

Die Welle besitzt außer den transversalen Feldkomponenten E_x und H_y auch eine longitudinale Feldkomponente H_z. Sie ist in Bezug auf das elektrische Feld transversal, nicht jedoch in Bezug auf das magnetische Feld. Man nennt solche Wellen **transversal elektrische Wellen**, abgekürzt **TE-Wellen**. Manchmal spricht man auch von **H-Wellen**. Der Wellenzahlvektor $\vec{k}_1 = k\vec{e}_{\mathsf{k}_1}$, genauer gesagt dessen Einheitsvektor $\vec{e}_{\mathsf{k}_1}$, und die Ausbreitungsrichtung $\vec{e}_\mathsf{z}$, spannen die sogenannte Einfallsebene auf. Liegt das elektrische Feld senkrecht zur Einfallsebene, handelt es sich also um TE-Wellen, spricht man in der Optik von **s-Polarisation**. Der Ausdruck „transversal“ steht für „senkrecht zu“, hier senkrecht zur Ausbreitungsrichtung. Für die Angabe der Transversalität muss immer eine Richtung definiert sein, bezüglich der die Felder transversal sind. In diesem Sinne heißt longitudinal dann auch nur „parallel zu“, also hier parallel zur Ausbreitungsrichtung. Wie wir später bei der Reflexion an Grenzflächen noch sehen, kann auch der Normalenvektor auf die Grenzfläche eine Bezugsrichtung darstellen.

In ähnlicher Weise entstehen bei der Überlagerung der linear polarisierten Wellen

$$\vec{H}_1 = \vec{H}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k}_1 \circ \vec{r})\} \quad , \tag{8.44}$$

$$\vec{H}_2 = \vec{H}_0 \exp\{i(\omega t - \vec{k}_2 \circ \vec{r})\} \tag{8.45}$$

mit Amplituden $\vec{H}_0 = (H_0, 0, 0)^T = const$ und Ausbreitungsvektoren $\vec{k}_1 = (0, -k_\mathsf{y}, k_\mathsf{z})^T$ und $\vec{k}_2 = (0, k_\mathsf{y}, k_\mathsf{z})^T$ Wellen, die in Bezug auf das magnetische Feld transversal sind, nicht jedoch in Bezug auf das elektrische Feld. Solche Wellen heißen **transversal magnetische** Wellen, abgekürzt **TM-Wellen**, oder **E-Wellen**. Bei TM-Wellen liegt das elektrische Feld parallel zur Einfallsebene, woraus in der Optik der Ausdruck **p-Polarisation** resultiert.

TE- und TM-Wellen sind wichtig für die Wellenausbreitung in dielektrischen Wellenleitern oder metallischen Hohlleitern, sowie bei der Reflexion an Grenzflächen.

Wir untersuchen die Phasengeschwindigkeit nach (8.43) für TE- und TM-Wellen noch etwas genauer. Aus der Dispersionsrelation bekommen wir

$$k^2 = k_\mathsf{y}^2 + k_\mathsf{z}^2 = k_\mathsf{y}^2 + \beta^2 = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\,\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \quad , \tag{8.46}$$

wobei c die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Medium bezeichnet. Damit wird aus (8.43)

$$c_\mathsf{ph} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\mathsf{y}^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{k_\mathsf{y}^2 c^2}{\omega^2}}} \geq c \quad . \tag{8.47}$$

Diese Wellen haben eine **Dispersion**, denn ihre Phasengeschwindigkeit hängt von der Kreisfrequenz ω ab. Die Phasengeschwindigkeit liegt über der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c in dem betreffenden Medium.

Die Signalausbreitungsgeschwindigkeit der TE- und TM-Wellen ist die **Gruppengeschwindigkeit**

$$c_\mathsf{gr} = \frac{\partial\omega}{\partial\beta} = \frac{1}{\partial\beta/\partial\omega} = c^2\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_\mathsf{y}^2}}{\omega} = \frac{c^2}{c_\mathsf{ph}} \leq c \quad . \tag{8.48}$$

Die Gruppengeschwindigkeit liegt also unter der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit im Medium, wie es sein muss.

Den Zusammenhang zwischen Phasen- und Gruppengeschwindigkeit kann man ganz allgemein aus der Dispersionsrelation gewinnen. Differenzieren des dritten und des letzten Terms von (8.46) nach β ergibt

$$2\beta = \frac{2\omega}{c^2}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} \quad , \tag{8.49}$$

und folglich

$$\boxed{\frac{\omega}{\beta}\frac{\partial \omega}{\partial \beta} = c_{\mathsf{ph}} c_{\mathsf{gr}} = c^2 \quad .} \tag{8.50}$$

Im Grenzfall $k_{\mathsf{y}} = 0$ erhält man aus (8.41) bzw. (8.42) ebene Wellen mit gleicher Gruppen- und Phasengeschwindigkeit. Im anderen Grenzfall $\beta = k_{\mathsf{z}} = 0$ ergeben sich stehende Wellen, bei denen die Phasengeschwindigkeit unendlich groß wird, die Gruppengeschwindigkeit jedoch verschwindet.

Die Überlagerung der linear polarisierten monochromatischen Wellen gleicher Amplitude, Frequenz, Nullphase und Polarisation erzeugt im obigen Beispiel eine stehende Welle für das elektrische bzw. magnetische Feld, wie es z. B. in (8.39) zum Ausdruck kommt. Die Amplitudenverteilung breitet sich in z-Richtung aus. Im Umkehrschluss kann man eine Welle mit beliebiger transversaler Amplitudenverteilung zunächst durch räumliche Fouriertransformation nach stehenden Wellen entwickeln. Jede einzelne der stehenden Wellen kann man sich als Überlagerung zweier gleicher ebener Wellen mit unterschiedlicher Ausbreitungsrichtung vorstellen.

Aus der Fouriertransformation resultiert die Amplitude E und die Wellenzahl der stehenden Wellen beispielsweise zu E, k_{x} und k_{y}. Aus der Dispersionsrelation folgt damit sofort die Ausbreitungskonstante in z-Richtung $k_{\mathsf{z}} = \sqrt{k^2 - k_{\mathsf{x}}^2 - k_{\mathsf{y}}^2}$. Die Wellenzahlvektoren der beiden überlagerten Wellen lauten also $\vec{k_{1,2}} = (\pm k_{\mathsf{x}}, \pm k_{\mathsf{y}}, k_{\mathsf{z}})^T$. Die Amplituden lauten wegen (8.41) $E_{1,2} = \frac{1}{2}E$.

Man kann also jede Welle mit beliebiger transversaler Amplitudenverteilung nach ebenen Wellen entwickeln. Diesem Umstand werden wir im Zusammenhang mit der Beugungstheorie wieder begegnen.

8.1.5 Energiedichte und Energieflussdichte in monochromatischen ebenen Wellen

Die Energieflussdichte wird aus dem Poyntingvektor $\vec{S} = \vec{E}_\text{R} \times \vec{H}_\text{R}$ mit reellen Feldern $\vec{E}_\text{R}$ $\vec{H}_\text{R}$ berechnet. Das Ergebnis lässt sich relativ leicht finden, wenn $\vec{E}_\text{R}$ und $\vec{H}_\text{R}$ als Realteile der komplexen Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ aufgefasst werden. Zur weiteren Erleichterung des Rechenganges wird die Darstellung

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_\text{a} \exp\{i(\omega t - kz)\} = \vec{E}_0 \exp\{i\omega t\} \\ \vec{E}_0 &= E_0 \cdot \exp\{-ikz\}\vec{e}_\text{x}\end{aligned} \tag{8.51}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \vec{H}_\text{a} \exp\{i(\omega t - kz)\} = \vec{H}_0 \exp\{i\omega t\} \\ \vec{H}_0 &= H_0 \cdot \exp\{-ikz\}\vec{e}_\text{y}\end{aligned} \tag{8.52}$$

verwendet, wobei $H_0 = E_0/Z$ benutzt wurde. Der Poyntingvektor lautet

$$\begin{aligned}\vec{S} = \vec{E}_\text{R} \times \vec{H}_\text{R} &= \text{Re}\left\{\vec{E}\right\} \times \text{Re}\left\{\vec{H}\right\} \qquad (8.53)\\ &= \frac{1}{2}(\vec{E} + \vec{E}^*) \times \frac{1}{2}(\vec{H} + \vec{H}^*) \\ &= \frac{1}{4}(\vec{E} \times \vec{H} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^*) \quad .\end{aligned}$$

Mit $\vec{H} = \frac{1}{Z} \cdot \frac{\vec{k}}{k} \times \vec{E} = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}(\vec{k} \times \vec{E})$ bzw. $\vec{E} = \frac{Z}{k}(\vec{H} \times \vec{k}) = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}(\vec{H} \times \vec{k})$ wird unter Verwendung von $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \circ \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \circ \vec{b})$ und wegen $\vec{E} \circ \vec{k} = \vec{H} \circ \vec{k} = 0$

$$\begin{aligned}\vec{E} \times \vec{H} &= \frac{1}{kZ}\vec{E} \times (\vec{k} \times \vec{E}) \qquad (8.54)\\ &= \frac{1}{kZ} \cdot (\vec{E} \circ \vec{E}) \cdot \vec{k} = \frac{1}{\omega\mu\mu_0} \cdot (\vec{E} \circ \vec{E}) \cdot \vec{k} \\ &= \frac{Z}{k} \cdot (\vec{H} \circ \vec{H}) \cdot \vec{k} \qquad (8.55)\end{aligned}$$

und es resultiert

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{1}{4}\left(\frac{\vec{k}}{kZ}(\vec{E}\circ\vec{E}) + \left(\frac{\vec{k}}{kZ} + \frac{\vec{k}^*}{k^*Z^*}\right)|\vec{E}|^2 + \frac{\vec{k}^*}{k^*Z^*}\vec{E}^*\circ\vec{E}^*\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{Re}\left\{\frac{(\vec{E}\circ\vec{E})\vec{k}}{kZ}\right\} + |\vec{E}|^2\cdot\mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{k}}{kZ}\right\}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{S} = \mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z}\frac{\|\vec{E}\circ\vec{E}\| + |\vec{E}|^2}{2}\frac{\vec{k}}{k}\right\} \quad .} \tag{8.56}$$

Solange $\mathrm{Im}\left\{\vec{k}/k\right\} = 0$ gilt, ist die Amplitude von $\vec{S}$

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\frac{\vec{E}\circ\vec{E}}{Z} + \frac{|\vec{E}|^2}{Z}\right\} = \frac{1}{2}\cdot{E_0}^2\mathrm{Re}\left\{\frac{1}{Z}(\exp\{i2(\omega t - kz)\} + 1)\right\} \quad . \tag{8.57}$$

In den hier vorausgesetzten verlustfreien Medien gilt $\mathrm{Im}\{Z\} = 0$[1]. Mit obigen Voraussetzungen folgt

$$S = \frac{E_0^2}{Z}\cdot\cos^2\{\omega t - kz\} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{c}\cdot E_0^2\cdot\cos^2\{\omega t - kz\} \tag{8.58}$$

und damit die Darstellung für $\vec{S}$ im verlustfreien Medium

$$\vec{S} = \frac{E_0^2}{Z}\cos^2\{\omega t - kz\}\,\vec{e}_z \quad . \tag{8.59}$$

Der Poyntingvektor charakterisiert die pro Zeiteinheit durch eine Flächeneinheit hindurchströmende Energie. Die in der Welle gespeicherte Energiedichte ist

$$\begin{aligned}w &= w_e + w_m = \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}|\vec{E}|^2 + \frac{\mu\mu_0}{2}|\vec{H}|^2\\ &= \frac{\varepsilon\varepsilon_0}{2}\left|\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0\cdot\exp\{i\omega t\}\right\}\right|^2 + \frac{\mu\mu_0}{2}\left|\mathrm{Re}\left\{\vec{H}_0\cdot\exp\{i\omega t\}\right\}\right|^2\\ &= \varepsilon\varepsilon_0 E_x^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2\cos^2\{\omega t - kz\} \quad .\end{aligned}$$

[1] siehe auch 8.1.6

Multipliziert man die Energiedichte mit der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit $c = 1/\sqrt{\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0}$, dann folgt

$$\boxed{S = w\,c \quad .} \tag{8.60}$$

Man kann, wie für Flussdichten üblich, also sagen, dass die elektromagnetische Energie einer ebenen Welle mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit transportiert wird (vergleiche $j = \rho \cdot v$). Das Ergebnis legt die Definition von Photonen als Energieträger nahe.
Meistens interessiert man sich nicht für die momentane Energiedichte oder Energieflußdichte sondern für zeitliche Mittelwerte, die sich bei Mittelung über eine Periode $T = 2\pi/\omega$ der Schwingung ergeben. Die Mittelwerte

$$\overline{w} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} w\,\{t\}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \tag{8.61}$$

und

$$\overline{S} = \frac{1}{T} \int\limits_{-T/2}^{T/2} S\,\{t\}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{E_0^2}{Z} \tag{8.62}$$

ergeben ebenfalls die übliche Beziehung

$$\overline{S} = \overline{w}\,c \quad . \tag{8.63}$$

Es ist zu beachten, dass dies Ergebnis nur unter der Voraussetzung verlustfreier Medien und verlustfreier Wellenausbreitung gilt. Bereits der einfache Fall der Totalreflexion wird so nicht mehr erfasst.
Bei der Berechnung der Energiedichte und der Energieflussdichte als nichtlineare Größen hat man tunlichst mit den Realteilen der Felder zu rechnen. Bei Feldern mit harmonischer Zeitabhängigkeit stellt sich jedoch heraus, dass bei der Berechnung zeitgemittelter Größen die komplexen Felder nutzbringend verwendet werden können.

Wir betrachten allgemeine komplexe Felder

$$\vec{a}\,\{\vec{r},t\} = \vec{a}_0\,\{\vec{r}\}\exp\{i\,\omega t\} \tag{8.64}$$

und

$$\vec{b}\,\{\vec{r},t\} = \vec{b}_0\,\{\vec{r}\}\exp\{i\,\omega t\} \tag{8.65}$$

und interessieren uns für das zeitgemittelte Skalarprodukt

$$\overline{\text{Re}\,\{\vec{a}\}\circ\text{Re}\left\{\vec{b}\right\}} = \frac{1}{T}\int\limits_{-T/2}^{T/2}\text{Re}\,\{\vec{a}\}\circ\text{Re}\left\{\vec{b}\right\}\;\mathrm{d}t \quad . \tag{8.66}$$

Zunächst gilt

$$\text{Re}\,\{\vec{a}\}\circ\text{Re}\left\{\vec{b}\right\} = \frac{1}{4}\left[\vec{a}\circ\vec{b}+\vec{a}\circ\vec{b}^{*}+\vec{a}^{*}\circ\vec{b}+\vec{a}^{*}\circ\vec{b}^{*}\right] \quad . \tag{8.67}$$

Zeitmittelung liefert

$$\overline{\vec{a}\circ\vec{b}} = \overline{\vec{a}^{*}\circ\vec{b}^{*}} = 0 \tag{8.68}$$

und

$$\overline{\vec{a}^{*}\circ\vec{b}} = \vec{a}_0^{*}\circ\vec{b}_0 \quad \text{bzw.} \quad \overline{\vec{a}\circ\vec{b}^{*}} = \vec{a}_0\circ\vec{b}_0^{*} \tag{8.69}$$

Damit folgt

$$\overline{\text{Re}\,\{\vec{a}\}\circ\text{Re}\left\{\vec{b}\right\}} = \frac{1}{4}\left[\vec{a}_0^{*}\circ\vec{b}_0+\vec{a}_0\circ\vec{b}_0^{*}\right] = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\vec{a}_0^{*}\circ\vec{b}_0\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\vec{a}_0\circ\vec{b}_0^{*}\right\} \quad . \tag{8.70}$$

Ganz entsprechend findet man

$$\overline{\text{Re}\,\{\vec{a}\}\times\text{Re}\left\{\vec{b}\right\}} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\vec{a}_0\times\vec{b}_0^{*}\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\vec{a}_0^{*}\times\vec{b}_0\right\} \quad . \tag{8.71}$$

Diese Beziehung nutzen wir für die komplexen Felder monochromatischer Wellen aus (8.51) und (8.52) und erhalten für die zeitgemittelte Energiedichte mit der Zuordnung $\vec{a} = \vec{b} = \vec{E}$ oder $\vec{a} = \vec{b} = \vec{H}$

$$\begin{aligned}\overline{w} = \overline{w_e + w_m} &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_0 \circ \vec{E}_0^* + \mu\mu_0\vec{H}_0 \circ \vec{H}_0^*\right\} \\ &= \frac{1}{4}\mathrm{Re}\left\{\varepsilon\varepsilon_0|\vec{E}_0|^2 + \mu\mu_0|\vec{H}_0|^2\right\}\end{aligned}$$

und für den zeitgemittelten Poyntingvektor aus (8.71) mit $(\vec{a} = \vec{E}\ ,\ \vec{b} = \vec{H})$ erhält man $\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_0 \times \vec{H}_0^*\right\} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\}$. Der

zeitgemittelte Poyntingvektor

$$\overline{\vec{S}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{S}_0\right\} \tag{8.72}$$

resultiert also direkt mit Realteilbildung aus dem

komplexen Poyntingvektor

$$\vec{S}_0 = \vec{E} \times \vec{H}^* \quad . \tag{8.73}$$

Für die ebene Welle nach (8.51), (8.52) kann $\vec{E} = (\vec{H} \times \vec{k}) \cdot Z/k$ bzw. $\vec{H} = (-\vec{E} \times \vec{k})/(kZ)$ verwendet werden und es folgt mit $\vec{E} \circ \vec{k} = 0$ bzw. $\vec{E} \circ \vec{k}^* = 0$ der komplexe Poyntingvektor einer ebenen Welle

$$\vec{S}_0 = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}|\vec{E}|^2\vec{k}^* = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0 - i\sigma}|\vec{H}|^2\vec{k} \quad . \tag{8.74}$$

Die Energiedichte ist

$$\overline{w} = \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0|E_0|^2 + \frac{1}{4}\mu\mu_0|H_0|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0|E_0|^2 \tag{8.75}$$

und die Amplitude des zeitgemittelten Poyntingvektors lautet

$$\overline{S} = \frac{1}{2}\frac{|E_0|^2}{Z} \tag{8.76}$$

in Übereinstimmung mit (8.61) und (8.62) für reelle Amplituden E_0, die in (8.51) vorausgesetzt wurden.

Interessant ist die Berechnung der zeitgemittelten Energiedichte und Energieflußdichte für die überlagerten ebenen Wellen (8.39) und (8.40). Hierfür erhalten wir (E_0 reell)

$$\overline{w} = \left(\varepsilon\varepsilon_0 \cos^2\{k_\mathrm{y} y\} + \frac{k_\mathrm{z}^2 \cos^2\{k_\mathrm{y} y\}}{\omega^2 \mu\mu_0} + \frac{k_\mathrm{y}^2 \sin^2\{k_\mathrm{y} y\}}{\omega^2 \mu\mu_0}\right) E_0^2 \tag{8.77}$$

und mit

$$\vec{S}_0 = \frac{4\,{E_0}^2}{\omega\mu\mu_0}\cos\{k_\mathrm{y}\cdot y\}\cdot\Big(0, ik_\mathrm{y}\sin\{k_\mathrm{y}\cdot y\}, k_\mathrm{z}\cos\{k_\mathrm{y}\cdot y\}\Big)^T \tag{8.78}$$

bekommen wir

$$\overline{\vec{S}} = \left(0, 0, \frac{2k_\mathrm{z}{E_0}^2}{\omega\mu\mu_0}\cos^2\{k_\mathrm{y} y\}\right)^T \quad . \tag{8.79}$$

Zeitlich gemittelter Energiefluss erfolgt offenbar nur in z-Richtung. In den Knoten der in y-Richtung verlaufenden Stehwelle für $k_\mathrm{y} y = (2m+1)\pi/2$, ($m$ ganzzahlig), ist $S = 0$. Betrachtet man nun noch räumliche Mittelwerte folgt mit Beachtung von $k^2 = k_\mathrm{z}^2 + k_\mathrm{y}^2$

$$\langle\overline{w}\rangle = \frac{1}{2}\varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 + \frac{1}{2}\frac{(k_\mathrm{z}^2 + k_\mathrm{y}^2)E_0^2}{\omega^2\mu\mu_0} = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \tag{8.80}$$

und

$$\langle\overline{S}\rangle = \frac{k_\mathrm{z}}{\omega\mu\mu_0}E_0^2 = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \frac{k_\mathrm{z} c^2}{\omega} = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 \cdot \frac{c^2}{c_\mathrm{ph}} = \varepsilon\varepsilon_0 E_0^2 c_\mathrm{gr} \quad , \tag{8.81}$$

dann gilt für das Raum-Zeit-Mittel der Zusammenhang

$$\langle\overline{S}\rangle = \langle\overline{w}\rangle c_\mathrm{gr} \quad . \tag{8.82}$$

Das Verhältnis der jeweils zeit- und raumgemittelten Energieflussdichte und Energiedichte ist die

Geschwindigkeit der Energieausbreitung

$$c_{\mathsf{E}} = \frac{\langle \overline{s} \rangle}{\langle \overline{w} \rangle} \quad , \tag{8.83}$$

die auch als Signalausbreitungsgeschwindigkeit bezeichnet wird. Für Feldverteilungen, die aus der Überlagerung ebener Wellen gleicher Frequenz entstehen, ist also die Gruppengeschwindigkeit das Maß für die Geschwindigkeit der Energie- bzw. Signalausbreitung.

8.1.6 Verlustfreie Medien

In der Diskussion nach (8.56) wird $\text{Im}\,\{Z\} = 0$ als Bedingung für ein verlustfreies Medium genannt. Davor wird der Fall $\text{Im}\left\{\vec{k}/k\right\} = 0$ gesondert abgehandelt. Es stellt sich die Frage, ob ein imaginäres $\vec{k}$ für nicht verlustbehaftete Medien überhaupt existieren kann. Allgemeiner gefragt: Wie ist der Zusammenhang zwischen Verlusten, dem Wellenvektor, dem Wellenwiderstand und der Eigenschaft der Welle eben zu sein?

Wir betrachten für ebene Wellen die Ausdrücke für den Wellenvektor und den Wellenwiderstand,

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} \tag{8.84}$$

$$k = \omega\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0} \tag{8.85}$$

wie sie am Ende von 8.1.1 angegeben sind. Danach könnten sich, rein mathematisch gesehen, komplexe Anteile in μ und ε gegenseitig aufheben, und zwar jeweils unterschiedlich in Z und k.

Die relative Dielektrizitätskonstante ε wird in 2.2.4 eingeführt. Später wird in 9.2 durch Gleichung (9.15) die komplexe Dielektrizitätskonstante definiert als

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0 \omega} = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \overline{\varepsilon}\{\omega\} \quad . \tag{8.86}$$

Der Versuch, auf ähnliche Weise ein komplexes μ einzuführen, scheitert zunächst am Fehlen eines magnetischen Analogons zur elektrischen Leitfähigkeit σ. Diese hatten wir in 2.2 als Proportionalitätskonstante zwischen elektrischem Feld und elektrischem Strom eingeführt (Gleichung (2.33)). Wir müssen also nach einem magnetischen Analogon zum elektrischen Strom suchen. Die elektrische Stromdichte erscheint in der Maxwellgleichung

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{D} \quad , \tag{8.87}$$

aus der sich durch Divergenzbildung die Kontinuitätsgleichung herleiten lässt. Die analoge "magnetische" Gleichung lautet:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\vec{B} \quad . \tag{8.88}$$

Hier ist nicht die Spur eines Stromes zu finden. Und

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \vec{\nabla} \circ \left(-\frac{\partial}{\partial t}\vec{B}\right) \tag{8.89}$$

führt wegen $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ auf die Trivialität $0 = 0$. Die Quellenfreiheit des magnetischen Feldes lässt sich aus dem Fehlen magnetischer Monopole begründen. Analog können wir nun obigen Weg rückwärts durchlaufen und erhalten als Schlussfolgerung, dass stets gelten muss

$$\mu \in \mathbb{R} \quad , \tag{8.90}$$

da keine magnetischen Monopole und somit kein magnetischer Strom existieren!

Damit können wir folgern, dass Z genau dann einen imaginären Anteil hat, falls ε einen imaginären Anteil mitbringt. Ist dies der Fall, so muss auch $\vec{k}$ für ebene Wellen einen imaginären

Anteil haben, der mathematisch für die Abnahme der Amplitude durch die Materialdämpfung sorgt.

Der Umkehrschluss, dass falls $\vec{k}$ einen imaginären Anteil besitzt, sich die Welle sicherlich in einem Medium mit $Z \notin \mathbb{R}$ ausbreitet, ist jedoch nicht zulässig, wie man z.B. bei den quergedämpften Wellen in 8.2.8 sehen wird.

8.1.7 Reziprozität für zeitharmonische Felder

Bereits im Kapitel 7.4 wurde das Reziprozitätstheorem eingeführt. Angelehnt an die Darstellung des komplexen Poyntingvektors in Kapitel 8.1.5 soll hier das Reziprozitätstheorem für zeitharmonische Felder in komplexer Schreibweise eingeführt werden. Wir gehen von (7.57)

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2 + \vec{E}_2 \times \vec{H}_1\right) +$$
$$\vec{E}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_2 + \vec{E}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}_1 + \vec{H}_1 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_2 + \vec{H}_2 \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}_1 = -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2 - \vec{E}_2 \circ \vec{j}_1$$

aus und verwenden konjugierte Größen für die Felder mit Index 2, also an Stelle von $\vec{E}_2$ wird $\vec{E}_2^*$ eingesetzt. Für alle Feldgrößen soll die Zeitabhängigkeit $\exp\{-i\omega t\}$ gelten; die entsprechende positive Kreisfrequenz wird wie schon im vorigen Kapitel implizit als konjugiert komplexe Ergänzung dazu gedacht (Realteilbildung). Die Voraussetzung der Zeitabhängigkeit führt dazu, dass sämtliche Produkte aus Feldgrößen mit Index 1 und Index 2 zeitlich konstant sind. Zeitableitungen können durch $-i\omega$ bzw. $i\omega$ ersetzt werden:

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2^* + \vec{E}_2^* \times \vec{H}_1\right) - i\omega \left(\vec{E}_1 \circ \vec{D}_2^* - \vec{D}_1 \circ \vec{E}_2^* + \vec{H}_1 \circ \vec{B}_2^* - \vec{B}_1 \circ \vec{H}_2^*\right)$$
$$= -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2^* - \vec{E}_2^* \circ \vec{j}_1 \quad . \tag{8.91}$$

In linearen Medien resultiert

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2^* + \vec{E}_2^* \times \vec{H}_1\right) - i\omega \left(\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2^* + \mu_0(\mu_2 - \mu_1)\vec{H}_1 \circ \vec{H}_2^*\right)$$

$$= -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2^* - \vec{E}_2^* \circ \vec{j}_1 \tag{8.92}$$

Im verlustbehafteten Fall folgt

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2^* + \vec{E}_2^* \times \vec{H}_1 \right) & - i\omega \left(\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2^* + \mu_0(\mu_2 - \mu_1)\vec{H}_1 \circ \vec{H}_2^* \right) \\ & + (\sigma_2 + \sigma_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2^* \\ & = -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2^* - \vec{E}_2^* \circ \vec{j}_1 \\ & . \end{aligned} \tag{8.93}$$

8.2 Reflexion und Brechung

Wir untersuchen das Verhalten von Wellen an der Grenzfläche zwischen verlustfreien Dielektrika. Eine einfallende ebene Welle erfährt Reflexion und Brechung. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wollen wir im folgenden annehmen, dass eine ebene Welle aus Medium 1 auf eine Grenzfläche zum Medium 2 trifft. Beim Übergang von einem optisch dichteren Medium mit Brechzahl n_1 in ein optisch dünneres Medium mit Brechzahl $n_2 < n_1$ kann Totalreflexion auftreten. Die Stetigkeitsbedingungen für die Felder an der Grenzfläche bestimmen das Verhalten der Welle.

Aus der Wellengleichung folgt eigentlich, dass auf beiden Seiten der Grenzfläche je eine hin- und rücklaufende Welle angesetzt werden muss. Mit Hilfe der Stetigkeitsbedingungen lassen sich daraus zwei Gleichungen für die vier Amplituden der Wellen aufstellen. Die Amplitude der einfallenden Welle in Medium 1 wird als bekannt vorausgesetzt, es bleibt also das immer noch überbestimmte System von zwei Gleichungen für drei Unbekannte. Die Randbedingungen im Unendlichen, verschwindende Felder, sollten die Lösung dann eigentlich eindeutig machen. In verlustfreien Medien lässt sich diese Forderung allerdings nicht immer erfüllen, weil der Ansatz mit der nicht verschwindenden einfallenden Welle bereits gegen die Bedingung verstößt. Aus der Praxis, bei der alle Medien leichte Verluste aufweisen, ist bekannt, dass eine einfallende Welle im Medium 1 nur eine von der Grenzfläche weglaufende Welle im Medium 2 bewirkt. Dieser vereinfachte Ansatz soll im weiteren untersucht werden. Im Anhang ist die Diskussion für Reflexion und Brechung an einer Grenzfläche zwischen verlustbehafteten Medien aufgeführt. Die hier gewählte Darstellung ist als Resultat der ausführlichen Diskussion zu verstehen und stellt die wesentlichen Schritte, die zum Ergebnis führen dar.

8.2.1 Stetigkeitsbedingungen für die Felder an der Grenzfläche zwischen zwei Dielektrika

Wir setzen voraus, dass an der Grenzfläche keine Oberflächenladungen auftreten und auch keine Oberflächenströme fließen. Der Normalenvektor $\vec{n}$ auf die Grenzfläche zeigt vom Gebiet mit Medium 1 zum Gebiet mit Medium 2. Damit folgt sofort die Stetigkeit der Normalkomponenten von $\vec{D}$ und $\vec{B}$ sowie der Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$, also

$$\vec{D}_1 \circ \vec{n} = \vec{D}_2 \circ \vec{n} \quad , \tag{8.94}$$

$$\vec{B}_1 \circ \vec{n} = \vec{B}_2 \circ \vec{n} \quad . \tag{8.95}$$

$$\vec{E}_{\mathsf{tan}\,1} = (\vec{n} \times \vec{E}_1) \times \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{E}_2) \times \vec{n} = \vec{E}_{\mathsf{tan}\,2} \tag{8.96}$$

$$\vec{H}_{\tan 1} = (\vec{n} \times \vec{H}_1) \times \vec{n} = (\vec{n} \times \vec{H}_2) \times \vec{n} = \vec{H}_{\tan 2} \quad . \tag{8.97}$$

Die Gleichungen (8.94) bis (8.97) bilden die Grundlagen für die weiteren Überlegungen.

8.2.2 Brechungs- und Reflektionsgesetz

Fällt eine Welle auf eine Grenzfläche, so wird sie dort teilweise gebrochen und teilweise reflektiert. Wir betrachten ebene Wellen und benutzen die Bezeichnungen aus Abbildung 8.9

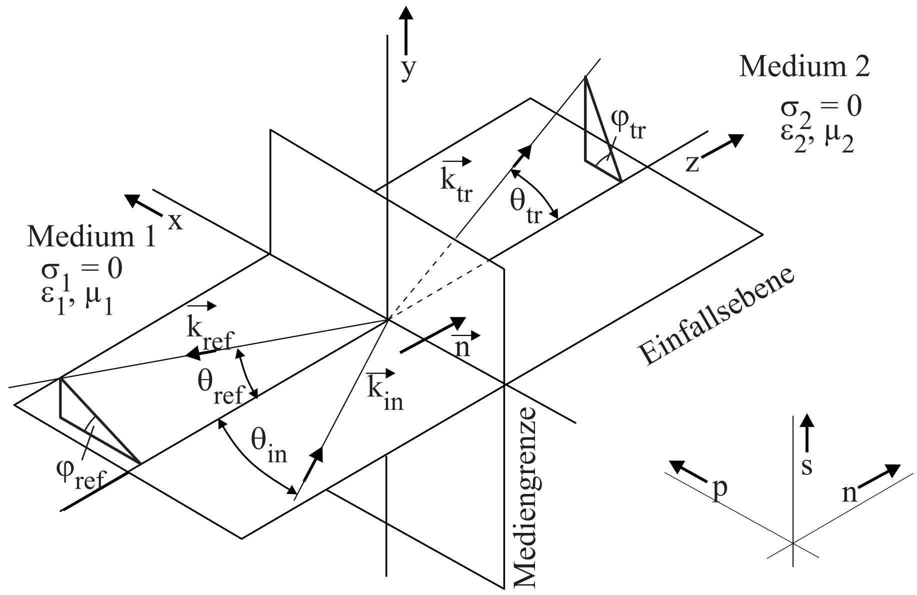


Abbildung 8.9: Zum Brechungs- und Reflektionsgesetz

Die Welle $\vec{E}_{\mathsf{in}}, \vec{H}_{\mathsf{in}}$ falle vom Medium 1 aus auf die Grenzfläche. Die Felder lauten

$$\vec{E}_{\mathsf{in}}\{\vec{r}_{\mathsf{in}}, t\} = \vec{E}_{\mathsf{in}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{in}} t)\} \quad , \tag{8.98}$$

$$\vec{H}_{\mathsf{in}}\{\vec{r}_{\mathsf{in}}, t\} = \frac{\vec{k}_{\mathsf{in}} \times \vec{E}_{\mathsf{in}}}{k_{\mathsf{in}} Z_{\mathsf{in}}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{in}} t)\} \quad . \tag{8.99}$$

Hierbei bezieht sich der Index in (incident) auf die einfallende Welle.

k_{in} ist die Größe des Wellenzahlvektors der einfallenden Welle, entsprechend gilt für die Größe der Wellenzahlvektoren der reflektierten Welle k_{ref} und der transmittierten Welle k_{tr}.

Für die Normen der Wellenvektoren $k = \|\vec{k}\|$ muss mit der **Vakuumlichtgeschwindigkeit** $c_0 = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$, der **Vakuumwellenzahl** $k_0 = \omega\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ und der **Brechzahl** $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ nach der Dispersionsrelation gelten

$$k_{\mathsf{in}} = \omega\sqrt{\varepsilon_{\mathsf{in}}\varepsilon_0\mu_{\mathsf{in}}\mu_0} = \frac{\omega n_{\mathsf{in}}}{c_0} = n_{\mathsf{in}} k_0 = k_{\mathsf{ref}} \tag{8.100}$$

und

$$k_{\mathsf{tr}} = \omega\sqrt{\varepsilon_{\mathsf{tr}}\varepsilon_0\mu_{\mathsf{tr}}\mu_0} = \frac{\omega n_{\mathsf{tr}}}{c_0} = n_{\mathsf{tr}}k_0 \quad , \tag{8.101}$$

da sich die einfallende und reflektierte Welle im Medium 1 ausbreiten und die transmittierte (gebrochene) Welle im Medium 2 läuft.

Der Wellenwiderstand der einfallenden Welle ist $Z_{\mathsf{in}} = \sqrt{\frac{\mu_{\mathsf{in}}\mu_0}{\varepsilon_{\mathsf{in}}\varepsilon_0}} = Z_1$ der Wellenwiderstand des Mediums 1. Das Produkt $k_{\mathsf{in}}Z_{\mathsf{in}}$ kann durch $\omega\mu_0\mu_{\mathsf{in}}$ ersetzt werden. Für die reflektierte und die transmittierte Welle gelten $Z_{\mathsf{ref}} = Z_1$, $Z_{\mathsf{tr}} = Z_2$.

Die Ansätze für das Feld der reflektierten und transmittierten Welle lauten

$$\vec{E}_{\mathsf{ref}}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_{\mathsf{ref}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathsf{ref}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{ref}}t)\} \quad , \tag{8.102}$$

$$\vec{H}_{\mathsf{ref}}\{\vec{r},t\} = \frac{\vec{k}_{\mathsf{ref}} \times \vec{E}_{\mathsf{ref}}}{k_{\mathsf{ref}}Z_{\mathsf{ref}}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathsf{ref}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{ref}}t)\} \tag{8.103}$$

und

$$\vec{E}_{\mathsf{tr}}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_{\mathsf{tr}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{tr}}t)\} \quad , \tag{8.104}$$

$$\vec{H}_{\mathsf{tr}}\{\vec{r},t\} = \frac{\vec{k}_{\mathsf{tr}} \times \vec{E}_{\mathsf{tr}}}{k_{\mathsf{tr}}Z_{\mathsf{tr}}} \exp\{i(\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{tr}}t)\} \quad . \tag{8.105}$$

Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass die Grenzfläche die xy-Ebene $z = 0$ des Koordinatensystems darstellt und die Flächennormale $\vec{n} = \vec{e}_{\mathrm{z}}$ zusammen mit dem Wellenvektor $\vec{k}_{\mathsf{in}}$ der einfallenden Welle die xz- Ebene definiert. Bezüglich der Richtungen von $\vec{k}_{\mathsf{ref}}$ und $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$ wollen wir zunächst nichts festlegen, sondern annehmen, dass die von $\vec{n}$ und $\vec{k}_{\mathsf{in}}$ bzw. $\vec{n}$ und $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$ aufgespannten Ebenen mit der xy- Ebene den Winkel φ_{ref} bzw. φ_{tr} bilden. Die Einfallswinkel θ_{in}, Reflexionswinkel θ_{ref} und Transmissionswinkel θ_{tr} werden wie üblich gegen das Einfallslot $\vec{n}$ gemessen. Mit $\vec{n} = \vec{e}_{\mathrm{z}}$ folgt aus

$$\boxed{\vec{k}_{\mathsf{in}} = k_{\mathsf{in}} \cdot (\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{n} + \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{e}_{\mathrm{x}})} \tag{8.106}$$

$$\frac{\vec{k}_{\mathsf{in}}}{k_{\mathsf{in}}} = \vec{e}_{\mathrm{x}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \vec{e}_{\mathrm{z}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} \quad , \tag{8.107}$$

$$\frac{\vec{k}_{\mathsf{ref}}}{k_{\mathsf{in}}} = \vec{e}_{\mathrm{x}} \sin\{\theta_{\mathsf{ref}}\} \cos\{\varphi_{\mathsf{ref}}\} + \vec{e}_{\mathrm{y}} \sin\{\theta_{\mathsf{ref}}\} \sin\{\varphi_{\mathsf{ref}}\} - \vec{e}_{\mathrm{z}} \cos\{\theta_{\mathsf{ref}}\} \quad , \tag{8.108}$$

$$\frac{\vec{k}_{\mathsf{tr}}}{k_{\mathsf{tr}}} = \vec{e}_{\mathrm{x}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \cos\{\varphi_{\mathsf{tr}}\} + \vec{e}_{\mathrm{y}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \sin\{\varphi_{\mathsf{tr}}\} + \vec{e}_{\mathrm{z}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \quad . \tag{8.109}$$

Die Stetigkeitsbedingungen z.B. für das tangentiale $\vec{E}$-Feld müssen zu jedem Zeitpunkt t und an jedem Ort $\vec{r} = (x, y, z = 0)^T$ der Grenzfläche erfüllt sein. Das ist nur dann möglich, wenn sich die Phasen der einfallenden, reflektierten und transmittierten Wellen bei $z = 0$ höchstens um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π unterscheiden, also

$$\left.(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{in}} t)\right|_{z=0} = \left.(\vec{k}_{\mathsf{ref}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{ref}} t)\right|_{z=0} + n2\pi = \left.(\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{r} - \omega_{\mathsf{tr}} t)\right|_{z=0} + m2\pi \tag{8.110}$$

mit ganzzahligen n, m gilt. Für $\vec{r} = 0$, $t = 0$ erhalten wir $n = 0$, $m = 0$. Für $\vec{r} = 0$, $t \neq 0$ folgt

$$\omega_{\mathsf{in}} = \omega_{\mathsf{ref}} = \omega_{\mathsf{tr}} = \omega \quad . \tag{8.111}$$

Das heißt, es findet bei der Reflexion und Brechung an einer (ruhenden) Grenzfläche keine Frequenzänderung statt. Für $\vec{r} = (x, y, z = 0)^T \neq \vec{0}$ ist dann noch zu erfüllen

$$\left.\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{r}\right|_{z=0} = \left.\vec{k}_{\mathsf{ref}} \circ \vec{r}\right|_{z=0} = \left.\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{r}\right|_{z=0} \quad . \tag{8.112}$$

Mit den Bezeichnungen $k_{\mathsf{in}} = \|\vec{k}_{\mathsf{in}}\|$, $k_{\mathsf{ref}} = \|\vec{k}_{\mathsf{ref}}\|$, $k_{\mathsf{tr}} = \|\vec{k}_{\mathsf{tr}}\|$ folgt mit (8.107) bis (8.109) aus der x-Komponente in (8.112)

$$k_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\} = k_{\mathsf{ref}} \sin\{\theta_{\mathsf{ref}}\} \cos\{\varphi_{\mathsf{ref}}\} = k_{\mathsf{tr}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \cos\{\varphi_{\mathsf{tr}}\} \tag{8.113}$$

und für die y-Komponente

$$0 = k_{\mathsf{ref}} \sin\{\theta_{\mathsf{ref}}\} \sin\{\varphi_{\mathsf{ref}}\} = k_{\mathsf{tr}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \sin\{\varphi_{\mathsf{tr}}\} \quad . \tag{8.114}$$

Für $\theta_{\mathsf{ref}}, \theta_{\mathsf{tr}} \neq 0$ folgt zwangsläufig

$$\varphi_{\mathsf{ref}} = \varphi_{\mathsf{tr}} = 0 \quad . \tag{8.115}$$

Dies bedeutet, dass $\vec{k}_{\mathsf{in}}, \vec{k}_{\mathsf{ref}}$ und $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$ in einer Ebene liegen, nämlich in der durch $\vec{k}_{\mathsf{in}}$ und $\vec{n}$ aufgespannten **Einfallsebene**. Aus (8.113) ergibt sich damit

$$k_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\} = k_{\mathsf{ref}} \sin\{\theta_{\mathsf{ref}}\} = k_{\mathsf{tr}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \quad . \tag{8.116}$$

Die Wellenvektor-Komponenten parallel zur Grenzfläche müssen also gleich sein. In vektorieller Schreibweise lautet (8.116)

$$\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathsf{ref}} - \vec{k}_{\mathsf{in}}) = 0 \tag{8.117}$$

$$\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathsf{tr}} - \vec{k}_{\mathsf{in}}) = 0 \tag{8.118}$$

und ist somit unabhängig vom gewählten Koordinatensystem.

Mit (8.100) und (8.101) erhalten wir aus dem linken Teil von (8.116) bzw. aus (8.117) das **Reflektionsgesetz**

$$\theta_{\mathsf{in}} = \theta_{\mathsf{ref}} \tag{8.119}$$

und aus dem rechten Teil von (8.116) bzw. aus (8.118) das **Brechungsgesetz von Snellius**

$$\begin{aligned} \frac{\sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{\sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} = \frac{k_{\mathsf{tr}}}{k_{\mathsf{in}}} &= \frac{\omega\mu_0\varepsilon_0\mu_{\mathsf{tr}}\varepsilon_{\mathsf{tr}}}{\omega\mu_0\varepsilon_0\mu_{\mathsf{in}}\varepsilon_{\mathsf{in}}} = \frac{k_0 n_{\mathsf{tr}}}{k_0 n_{\mathsf{in}}} \\ \frac{\sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{\sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} &= \frac{n_{\mathsf{tr}}}{n_{\mathsf{in}}} \quad . \end{aligned} \tag{8.120}$$

Die Gleichung (8.118) ist also das Snelliussche Brechungsgesetz in vektorieller Schreibweise. Medium 2 heißt optisch dichter als Medium 1, falls $n_{\mathsf{tr}} > n_{\mathsf{in}}$ gilt. Wegen $0 \leq \theta_{\mathsf{in}} \leq \pi/2$

und $0 \leq \theta_{\text{tr}} \leq \pi/2$ ist dann $\theta_{\text{in}} > \theta_{\text{tr}}$. Die Welle wird zum Einfallslot hin gebrochen. Ist Medium 2 optisch dünner als Medium 1, also $n_{\text{tr}} < n_{\text{in}}$, dann erfolgt Brechung vom Lot weg. Für einen Grenzwinkel $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{gr}}$ mit

$$\sin\{\theta_{\text{gr}}\} = \frac{n_{\text{tr}}}{n_{\text{in}}} \tag{8.121}$$

ist $\theta_{\text{tr}} = \pi/2$ und für $\theta_{\text{in}} > \theta_{\text{gr}}$ gibt es keinen reellen Winkel θ_{tr} des transmittierten Strahls mehr. Es tritt **Totalreflexion** ein. θ_{gr} heißt **Grenzwinkel der Totalreflexion**.

Der Zusammenhang zwischen den Tangentialkomponenten der Wellenzahlvektoren ist durch (8.117) und (8.118) gegeben. Zur Berechnung der Normalkomponenten von $\vec{k}_{\text{ref}}$ betrachten wir (8.117) noch etwas genauer. Da die Tangentialkomponenten von $\vec{k}_{\text{in}}$ und $\vec{k}_{\text{ref}}$ gleich sind, folgt dass ihre Differenz nur noch in Normalenrichtung zeigt (also keine Tangentialkomponente (x- Komponente) besitzt)

$$\vec{e}_{\text{x}} \circ (\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}}) = 0 \quad . \tag{8.122}$$

Wir bedienen uns hier eines kleinen Tricks und multiplizieren

$$(\vec{k}_{\text{ref}} + \vec{k}_{\text{in}}) \circ (\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}}) = \left(\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}}\right)\right)\left(\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\text{ref}} + \vec{k}_{\text{in}}\right)\right) \quad . \tag{8.123}$$

Da beide Wellen im selben Medium laufen gilt $||\vec{k}_{\text{in}}||^2 = \vec{k}_{\text{in}} \circ \vec{k}_{\text{in}} = \vec{k}_{\text{ref}} \circ \vec{k}_{\text{ref}} = ||\vec{k}_{\text{ref}}||^2$ und damit

$$(\vec{k}_{\text{ref}} + \vec{k}_{\text{in}}) \circ (\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}}) = \vec{k}_{\text{ref}} \circ \vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}} \circ \vec{k}_{\text{in}} = 0 \quad . \tag{8.124}$$

Vergleich mit (8.123) ergibt für $\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\text{ref}} - \vec{k}_{\text{in}}\right) \neq 0$

$$\boxed{\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\text{ref}} + \vec{k}_{\text{in}}\right) = 0 \quad .} \tag{8.125}$$

Dies bedeutet, dass die Normalkomponenten der Wellenzahlvektoren der einfallenden und der reflektierten Welle gleich groß sind und in entgegengesetzte Richtungen zeigen. Aus (8.125) folgt wiederum $\vec{n} \circ \left(\vec{k}_{\mathsf{ref}} - \vec{k}_{\mathsf{in}}\right) = -2\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}$. Einsetzen in (8.122) liefert

$$\vec{k}_{\mathsf{ref}} = \vec{k}_{\mathsf{in}} - 2(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\vec{n} \quad . \tag{8.126}$$

Zur Berechnung der Normalkomponente von $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$ greifen wir auf die Dispersionsrelation zurück. Es gilt mit (8.117) und (8.118) für $\vec{k} \in \{\vec{k}_{\mathsf{in}}, \vec{k}_{\mathsf{ref}}, \vec{k}_{\mathsf{tr}}\}$

$$n^2 k_0^2 = k^2 := \|\vec{k}\|^2 = \|\vec{n} \times \vec{k}\|^2 + (\vec{n} \circ \vec{k})^2 = \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2 + (\vec{n} \circ \vec{k})^2 \quad . \tag{8.127}$$

Dabei wurde die Darstellung

$$\vec{k} = (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{n} + (\vec{n} \times \vec{k}) \times \vec{n} \tag{8.128}$$

für den Wellenzahlvektor der einfallende Welle verwendet, die allgemein auch für die beiden anderen Wellenzahlvektoren $\vec{k}_{\mathsf{ref}}$ und $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$ gilt. Üblicherweise ist $\vec{k}_{\mathsf{in}}$ und $\vec{n}$ bekannt. Durch einsetzen von $\vec{k} = \vec{k}_{\mathsf{tr}}$ in (8.127) und umstellen folgt

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}} = \pm\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2} = \pm\sqrt{k_0^2 n_{\mathsf{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2} \quad .$$

Wählt man das Vorzeichen positiv, resultiert eine von der Grenzfläche weglaufende Welle, die im Fall von Verlusten exponentiell abklingt, wie es physikalisch zu erwarten ist. Es gilt also

$$\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}} = +\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2} = +\sqrt{k_0^2 n_{\mathsf{tr}}^2 - \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2} \quad . \tag{8.129}$$

Grafisch ist dieser Zusammenhang in Abbildung 8.10 dargestellt.

Für weitere Berechnungen kann die Dispersionsrelation

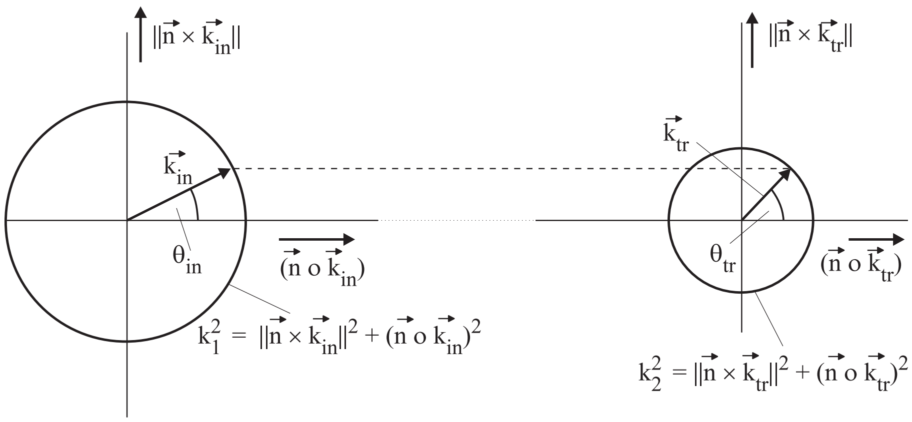


Abbildung 8.10: Grafische Lösung zur Berechnung der Normalenkomponente von $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$. Die Dispersionsrelation (8.127) ist eine Kreisgleichung mit Radius k. Gemäß den Stetigkeitsbedingungen müssen die Tangentialkomponenten der Wellenzahlvektoren gleich sein. Sie werden durch Projektion auf die Ordinate wiedergegeben. Zur Konstruktion müssen also die beiden Kreise mit den Radien $k_1 = n_1 k_0$ und $k_2 = n_2 k_0$ gezeichnet werden. Der Wellenzahlvektor der einfallenden Welle wird unter dem Winkel θ_{in} eingezeichnet, und der Wellenzahlvektor der transmittierten Welle folgt durch übertragen des Ordinatenabschnittes beim Schnittpunkt mit dem Kreis wie oben dargestellt.

$$k_0^2 n_{\mathsf{in}}^2 = k_{\mathsf{in}}^2 = \|\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2 + \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2 \tag{8.130}$$

nach $\|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2$ umgestellt und in (8.129) eingesetzt werden. Das Resultat $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}} = +\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + \|\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2}$ lautet nach einsetzen der Dispersionsrelation

$$\boxed{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}} = +\sqrt{k_0^2 (n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2) + \|\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}\|^2}} \tag{8.131}$$

und verknüpft die Normalenanteile der Wellenzahlvektoren direkt miteinander. Geht man hier auf die Darstellung mit dem Einfallswinkel θ_{in} über, lautet die Darstellung von (8.130) bzw. (8.131)

$$\begin{aligned} \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}} &= k_0 n_{\mathsf{in}} \cdot \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} \\ \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}} &= k_0 \sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 \cdot \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}} \quad . \end{aligned} \tag{8.132}$$

Oben haben wir angenommen, dass die Grenzfläche durch den Normalenvektor $\vec{n} = \vec{e}_{\mathrm{z}}$ charakterisiert wird und die Wellenzahlvektoren ansonsten nur noch eine x- Komponente haben. Spätestens bei einem verdrehten, fest vorgegebenen Koordinatensystem ist die obige Darstellung ungünstig und es lohnt sich, neue Einheitsvektoren zu definieren, die parallel zur Grenzfläche liegen. Der Vektor $\vec{e}_\ell$ soll in Richtung der Komponente des Wellenzahlvektors parallel zur Grenzfläche zeigen. Die Darstellung für $\vec{k}$ lautet dann entsprechend zu (8.106)

$$\vec{k} = (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{n} + (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k})\vec{e}_{\mathrm{p}} \quad . \tag{8.133}$$

Aus dem Vergleich von (8.128) und (8.133) wird $\vec{e}_{\mathrm{p}}$ durch umstellen gemäß

$$\begin{aligned} (\vec{k} \circ \vec{e}_{\mathrm{p}})\vec{e}_{\mathrm{p}} &= (\vec{n} \times \vec{k}) \times \vec{n} \\ \vec{k} \circ \vec{e}_{\mathrm{p}} &= \|\vec{n} \times \vec{k}\| = \|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\| \end{aligned} \tag{8.134}$$

zu

$$\vec{e}_{\mathrm{p}} = \frac{(\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}) \times \vec{n}}{\|\vec{n} \times \vec{k}_{\mathsf{in}}\|} \tag{8.135}$$

bestimmt. Die Wellenzahlvektoren haben also die Darstellung

$$\begin{aligned}
\vec{k}_{\mathsf{in}} &= (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\vec{e}_{\mathrm{p}} + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\vec{n} \\
&= k_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{e}_{\mathrm{p}} + k_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{n} \\
&= k_0 n_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{e}_{\mathrm{p}} + k_0 n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{n} \\
\vec{k}_{\mathsf{ref}} &= (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\vec{e}_{\mathrm{p}} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\vec{n} \\
&= k_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{e}_{\mathrm{p}} - k_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{n} \\
&= k_0 n_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{e}_{\mathrm{p}} - k_0 n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{n} \\
\vec{k}_{\mathsf{tr}} &= (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\vec{e}_{\mathrm{p}} + \sqrt{k_0^2 n_{\mathsf{tr}}^2 - k_0^2 n_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}\,\vec{n} \\
&= k_0 n_{\mathsf{in}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\}\vec{e}_{\mathrm{p}} + k_0 \sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}\,\vec{n} \quad .
\end{aligned}$$

8.2.3 TE- und TM- Wellen

Jede elliptisch polarisierte Welle lässt sich nach Abschnitt 8.1.2 in zwei senkrecht zueinander linear polarisierte Wellen zerlegen. Daher kann die Reflexion einer elliptisch polarisierten Welle an einer ruhenden ebenen Grenzfläche auf die beiden Spezialfälle von TE- und TM-polarisierten Wellen zurückgeführt werden. Die Bezugsrichtung für die Angabe der Transversalität ist hier die Normale auf die Grenzfläche. Wir diskutieren im nächsten Abschnitt den Spezialfall von TE-Wellen, bei denen $\vec{E}_{\mathsf{in}}$ senkrecht zur Einfallsebene (und damit parallel zur Grenzfläche) linear polarisiert ist und $\vec{H}_{\mathsf{in}}$ folglich in der Einfallsebene schwingt. Die **Einfallsebene** wird vom Normalenvektor auf die Grenzfläche $\vec{n}$ und dem Wellenzahlvektor der einfallenden Welle k_{in} aufgespannt. Im darauf folgenden Abschnitt behandeln wir dann

den anderen Spezialfall von TM-Wellen, bei denen $\vec{E}_{\mathsf{in}}$ in der Einfallsebene linear polarisiert ist und $\vec{H}_{\mathsf{in}}$ senkrecht dazu (und damit parallel zur Grenzfläche) schwingt.
Die Unterscheidung folgt dem Zusammenhang

$$\begin{aligned} [\mathrm{TE}:] \quad \vec{E} \circ \vec{n} &= 0 \\ [\mathrm{TM}:] \quad \vec{H} \circ \vec{n} &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.136}$$

Die Feldvektoren stehen senkrecht auf dem Ausbreitungsvektor, der hier wieder in der Form (8.133)

$$\vec{k} = (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{n} + (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k})\vec{e}_{\mathrm{p}}$$

dargestellt wird. Dabei ist die Normalenrichtung $\vec{n}$ aus der Lage der Grenzfläche bekannt, die Darstellung von $\vec{e}_{\mathrm{p}}$ folgt (8.135). Bei der einfallenden Welle muss es sich nicht notwendig um eine reine TE- oder TM- Welle handeln. Das heißt, dass alle Feldkomponenten auftreten können. Die Berechnung des TE- bzw. TM- Anteils über die Bedingung (8.136) ist sehr umständlich. Einen Ausweg findet man mit der Definition des noch fehlenden dritten Einheitsvektors

$$\boxed{\vec{e}_{\mathrm{s}} = \vec{n} \times \vec{e}_{\mathrm{p}} \quad ,} \tag{8.137}$$

der wie $\vec{e}_{\mathrm{t}}$ tangential zur Grenzfläche liegt. Die Felder können jetzt in der allgemeinen Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_{\mathrm{n}}\vec{n} + E_{\mathrm{p}}\vec{e}_{\mathrm{p}} + E_{\mathrm{s}}\vec{e}_{\mathrm{s}} \\ \vec{H} &= H_{\mathrm{n}}\vec{n} + H_{\mathrm{p}}\vec{e}_{\mathrm{p}} + H_{\mathrm{s}}\vec{e}_{\mathrm{s}} \end{aligned} \tag{8.138}$$

geschrieben werden. Der Vektor $\vec{e}_s$ steht per Definition senkrecht zu $\vec{n}$ und wegen (8.135) auch senkrecht zu $\vec{k}$, womit er in Richtung des E- Feldes bei TE- Wellen oder in Richtung des H- Feldes bei TM- Wellen liegen muss. Die Definition (8.136) lässt sich also zur Berechnung der Felder in

$$\boxed{\begin{aligned} \vec{E}_{\mathsf{TE}} &= (\vec{e}_s \circ \vec{E})\vec{e}_s = E_{\mathsf{TE}}\vec{e}_s \\ \vec{H}_{\mathsf{TM}} &= (\vec{e}_s \circ \vec{H})\vec{e}_s = H_{\mathsf{TM}}\vec{e}_s \end{aligned}} \tag{8.139}$$

umformen. Es bleibt noch zu bemerken, dass das H- Feld der TE- Welle wegen $\vec{H} = \frac{1}{kZ}(\vec{k} \times \vec{E})$ die allgemeine Darstellung

$$\begin{aligned} \vec{H}_{\mathsf{TE}} &= E_{\mathsf{TE}}\frac{1}{kZ}\left[(\vec{n} \circ \vec{k})(\vec{n} \times \vec{e}_s) + (\vec{e}_p \circ \vec{k})(\vec{e}_p \times \vec{e}_s)\right] \\ &= E_{\mathsf{TE}}\frac{1}{kZ}\left[(\vec{e}_p \circ \vec{k})\vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{e}_p\right] \\ &= E_{\mathsf{TE}}\frac{1}{\omega\mu\mu_0}\left[(\vec{e}_p \circ \vec{k})\vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{e}_p\right] \end{aligned} \tag{8.140}$$

und das E- Feld der TM- Welle mit $\vec{E} = \frac{Z}{k}(\vec{H} \times \vec{k})$

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\mathsf{TM}} &= H_{\mathsf{TM}}\frac{Z}{k}\left[(\vec{n} \circ \vec{k})(\vec{e}_s \times \vec{n}) + (\vec{e}_p \circ \vec{k})(\vec{e}_s \times \vec{e}_p)\right] \\ &= H_{\mathsf{TM}}\frac{Z}{k}\left[(-\vec{e}_p \circ \vec{k})\vec{n} + (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{e}_p\right] \\ &= H_{\mathsf{TM}}\frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\left[(-\vec{e}_p \circ \vec{k})\vec{n} + (\vec{n} \circ \vec{k})\vec{e}_p\right] \end{aligned} \tag{8.141}$$

ist.

8.2.4 Amplituden bei Reflexion und Brechung für TE-Wellen

Wir betrachten TE-Wellen. Die einfallende Welle ist nach Abbildung 8.11 in y-Richtung polarisiert mit $\vec{E}_{\mathsf{in}} = E_{\mathsf{in}}\vec{e}_y$.

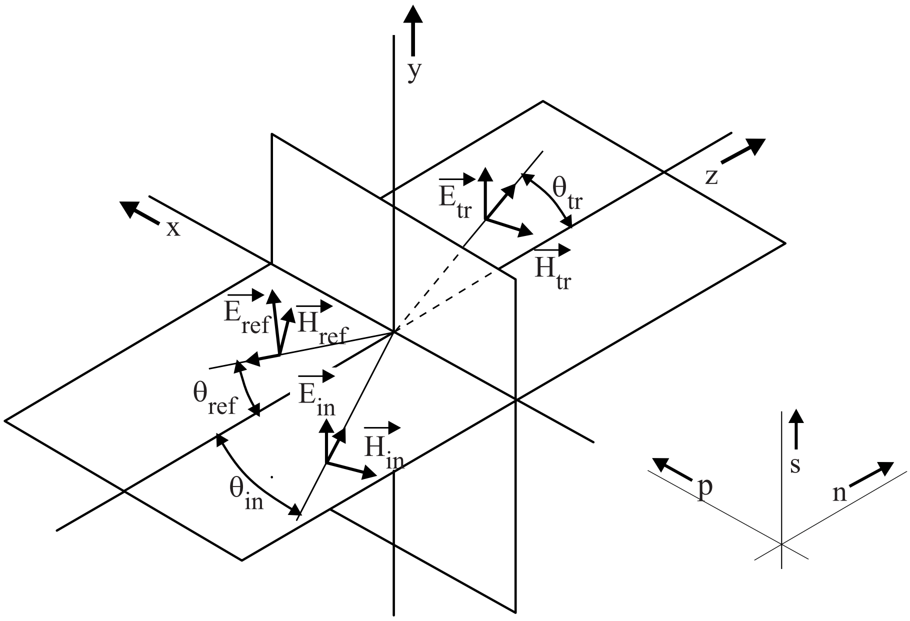


Abbildung 8.11: Reflexion und Brechung für TE-Wellen

Das zugehörige Magnetfeld wird gemäß (8.140) berechnet, wobei hier $\vec{n} = \vec{e}_\mathsf{z}$ und $\vec{e}_\mathrm{p} = \vec{e}_\mathrm{x}$ gelten. Für das Magnetfeld der einfallenden Welle resultiert

$$\vec{H}_\mathsf{in} = \frac{E_\mathsf{in}}{\omega\mu_\mathsf{in}\mu_0}\left[(\vec{e}_\mathrm{p} \circ \vec{k}_\mathsf{in})\vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathsf{in})\vec{e}_\mathrm{p}\right] = H_\mathsf{in}\frac{1}{k_\mathsf{in}}\left[(\vec{e}_\mathrm{p} \circ \vec{k}_\mathsf{in})\vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_\mathsf{in})\vec{e}_\mathrm{p}\right] \quad (8.142)$$

Nimmt man an, dass die reflektierten und transmittierten Wellen nicht parallel zur einfallenden Welle polarisiert sind, also

$$\vec{E} = E_\mathsf{n}\vec{n} + E_\mathrm{s}\vec{e}_\mathrm{s} + E_\mathrm{p}\vec{e}_\mathrm{p} = (\vec{E} \circ \vec{n})\vec{n} + (\vec{E} \circ \vec{e}_\mathrm{s})\vec{e}_\mathrm{s} + (\vec{E} \circ \vec{e}_\mathrm{p})\vec{e}_\mathrm{p}$$

gilt, lautet das zugehörige Magnetfeld wegen $\vec{H} = \frac{1}{kZ}(\vec{k} \times \vec{E})$

$$\begin{aligned}\vec{H} = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\Big[&\Big((\vec{e}_\mathrm{p} \circ \vec{E})(\vec{n} \circ \vec{k}) - (\vec{n} \circ \vec{E})(\vec{e}_\mathrm{p} \circ \vec{k})\Big)\,\vec{e}_\mathrm{s} \\ &- (\vec{e}_\mathrm{s} \circ \vec{E})(\vec{n} \circ \vec{k})\vec{e}_\mathrm{p} + (\vec{e}_\mathrm{t} \circ \vec{E})(\vec{e}_\mathrm{p} \circ \vec{k})\,\vec{n}\Big]\end{aligned} \quad (8.143)$$

Die Stetigkeit der Normalkomponenten von $\vec{D}$ und $\vec{B}$ verlangt

$$(\vec{E}_{\text{ref}} \circ \vec{n})\varepsilon_{\text{ref}} + (\vec{E}_{\text{ref}} \circ \vec{n})\varepsilon_{\text{in}} = (\vec{E}_{\text{tr}} \circ \vec{n})\varepsilon_{\text{tr}}$$
$$(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\text{in}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{in}}) + (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\text{ref}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{ref}}) = (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\text{tr}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{tr}}) \quad ,$$

also wegen der tangentialen Stetigkeit von $\vec{k}$ nach (8.117) und (8.118)

$$\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{in}} + \vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{ref}} = \vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{tr}} \quad . \tag{8.144}$$

Die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ erfordert

$$\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \left(\vec{E}_{\text{in}} + \vec{E}_{\text{ref}}\right) = \vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{tr}} \tag{8.145}$$
$$\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{E}_{\text{ref}} = \vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{E}_{\text{tr}} \tag{8.146}$$
$$\frac{1}{\mu_{\text{in}}}\left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{in}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{in}}) + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{ref}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{ref}})\right] = \frac{1}{\mu_{\text{tr}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \circ \vec{E}_{\text{tr}}) \tag{8.147}$$
$$\frac{1}{\mu_{\text{in}}}\left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{ref}})(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{E}_{\text{ref}}) - (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\text{ref}})(\vec{n} \circ \vec{E}_{\text{ref}})\right] = \frac{1}{\mu_{\text{tr}}}\left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\text{tr}})(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{E}_{\text{tr}}) - (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\text{tr}})(\vec{n} \circ \vec{E}_{\text{tr}})\right] \tag{8.148}$$

aus den Gleichungen (8.146) und (8.148) mit (8.144) folgt mit (8.6), (8.117) und (8.118)

$$\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{E}_{\text{tr}} = 0 \quad ,$$
$$\vec{n} \circ \vec{E}_{\text{tr}} = 0 \quad ,$$
$$\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{E}_{\text{ref}} = 0 \quad ,$$
$$\vec{n} \circ \vec{E}_{\text{ref}} = 0 \quad .$$

An der Grenzfläche werden also keine neuen Polarisationen erzeugt und die Stetigkeitsbedingungen reduzieren sich mit $\vec{E}_{\text{ref}} = E_{\text{ref}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}$ und $\vec{E}_{\text{tr}} = E_{\text{tr}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}$ auf

$$E_{\mathsf{in}} + E_{\mathsf{ref}} = E_{\mathsf{tr}} \tag{8.149}$$

$$\frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}}(E_{\mathsf{in}} - E_{\mathsf{ref}}) = \frac{\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}} E_{\mathsf{tr}} \tag{8.150}$$

wobei $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}} = -\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{ref}}$ (8.122) beachtet wurde. Die Lösung des Gleichungssystems führt auf die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für die Amplituden

$$r = \frac{E_{\mathsf{ref}}}{E_{\mathsf{in}}} \quad ; \quad t = \frac{E_{\mathsf{tr}}}{E_{\mathsf{in}}} = \frac{E_{\mathsf{in}} + E_{\mathsf{ref}}}{E_{\mathsf{in}}} \tag{8.151}$$

mit

$$\boxed{\begin{aligned} r_{\mathsf{TE}} &= \frac{\vec{n} \circ \left(\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}} - \dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}} + \dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}} \right)} && (8.152) \\ t_{\mathsf{TE}} &= 1 + r_{\mathsf{TE}} && (8.153) \end{aligned}}$$

Wegen (8.131) hängt der Reflexionsfaktor nur noch von der Normalenkomponente von $\vec{k}_{\mathsf{in}}$ ab. Einsetzen von (8.131) in (8.152) und (8.153) ergibt

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{\frac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) - \frac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}}{\dfrac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) + \dfrac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}} \tag{8.154}$$

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{\dfrac{2}{\mu_{\mathsf{in}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})}{\dfrac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) + \dfrac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}} \tag{8.155}$$

Diese Darstellung ist unabhängig vom gewählten Koordinatensystem und kann in dem oben diskutierten Spezialfall mit den Winkeln θ_{in} und θ_{tr} geschrieben werden. Aus (8.152) folgt

$$r_{\mathsf{TE}} = \left(\frac{E_{\mathsf{ref}}}{E_{\mathsf{in}}}\right)_{\mathsf{TE}} = \frac{\frac{n_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - \frac{n_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}}\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}}{\frac{n_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \frac{n_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}}\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} \tag{8.156}$$

und (8.154) ergibt

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{\frac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}n_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - \frac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 + n_{\mathsf{in}}^2\cos^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}}{\frac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}n_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \frac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 + n_{\mathsf{in}}^2\cos^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}} \quad . \tag{8.157}$$

Mit $1 - \cos^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} = \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}$ folgt daraus und mit (8.153)

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{\frac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}n_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - \frac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2\sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}}{\frac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}n_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \frac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2\sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}} \tag{8.158}$$

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{\frac{2}{\mu_{\mathsf{in}}}n_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{\frac{1}{\mu_{\mathsf{in}}}n_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \frac{1}{\mu_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2\sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}} \quad . \tag{8.159}$$

Mit $Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ und $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ findet man die alternative Darstellung

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{Z_{\mathsf{tr}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - Z_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}}{Z_{\mathsf{tr}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + Z_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} \tag{8.160}$$

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{2Z_{\mathsf{tr}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{Z_{\mathsf{tr}}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + Z_{\mathsf{in}}\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} \quad . \tag{8.161}$$

Für **senkrechten Einfall** $(\theta_{\mathsf{in}} = 0)$ folgen speziell

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{\dfrac{n_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}} - \dfrac{n_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}}}{\dfrac{n_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}} + \dfrac{n_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}}} \tag{8.162}$$

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{2\dfrac{n_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}}}{\dfrac{n_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}} + \dfrac{n_{\mathsf{tr}}}{\mu_{\mathsf{tr}}}} \quad . \tag{8.163}$$

Die allgemeinen Gleichungen vereinfachen sich unter Zuhilfenahme des Brechungsgesetzes für Materialien gleicher Permeabilität $\mu_{\mathsf{in}} = \mu_{\mathsf{tr}}$ zu

$$r_{\mathsf{TE}} = \frac{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}}{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + n_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} = \frac{\sin\{\theta_{\mathsf{tr}} - \theta_{\mathsf{in}}\}}{\sin\{\theta_{\mathsf{tr}} + \theta_{\mathsf{in}}\}} \tag{8.164}$$

$$t_{\mathsf{TE}} = \frac{2n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + n_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} = \frac{2\sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\}\cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{\sin\{\theta_{\mathsf{in}} + \theta_{\mathsf{tr}}\}} \quad , \tag{8.165}$$

insbesondere für **nichtmagnetische Materialien** $\mu_{\mathsf{in}} = \mu_{\mathsf{tr}} = 1$. Das sind die Fresnelschen Formeln für TE-Polarisation.

Es bleibt noch anzumerken, dass die Darstellung für die Magnetfelder der transmittierten und reflektierten Welle mit

$\vec{E}_{\mathsf{in}} = E_{\mathsf{in}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}$, $\vec{E}_{\mathsf{ref}} = E_{\mathsf{ref}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}$, $\vec{E}_{\mathsf{tr}} = E_{\mathsf{tr}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}$ und $\varepsilon_{\mathsf{in}} = \varepsilon_{\mathsf{ref}} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{\mathsf{tr}} = \varepsilon_2$

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{\mathsf{in}} &= E_{\mathsf{in}} \frac{1}{Z_{\mathsf{in}} k_{\mathsf{in}}} \left[(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{e}_{\mathrm{p}} \right] \\
&= E_{\mathsf{in}} \frac{1}{\omega \mu_1 \mu_0} \left[(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{e}_{\mathrm{p}} \right] && (8.166) \\
\vec{H}_{\mathsf{ref}} &= E_{\mathsf{ref}} \frac{1}{\omega \mu_1 \mu_0} \left[(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{n} + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{e}_{\mathrm{p}} \right] && (8.167) \\
\vec{H}_{\mathsf{tr}} &= E_{\mathsf{tr}} \frac{1}{\omega \mu_2 \mu_0} \left[(\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}) \vec{n} - (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}}) \vec{e}_{\mathrm{p}} \right] && (8.168)
\end{aligned}$$

lautet.

8.2.5 Amplituden bei Reflexion und Brechung für TM-Wellen

Die Behandlung der TM-Polarisation stützt sich auf Abbildung 8.12.

In diesem Fall ist das magnetische Feld aller beteiligten Wellen parallel zur Grenzfläche mit $\vec{H} = H\vec{e}_{\mathsf{y}}$. Wie im Fall der TE-Wellen entstehen keine neuen Polarisationsrichtungen.

Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{H}$ an der Grenzfläche erfordert

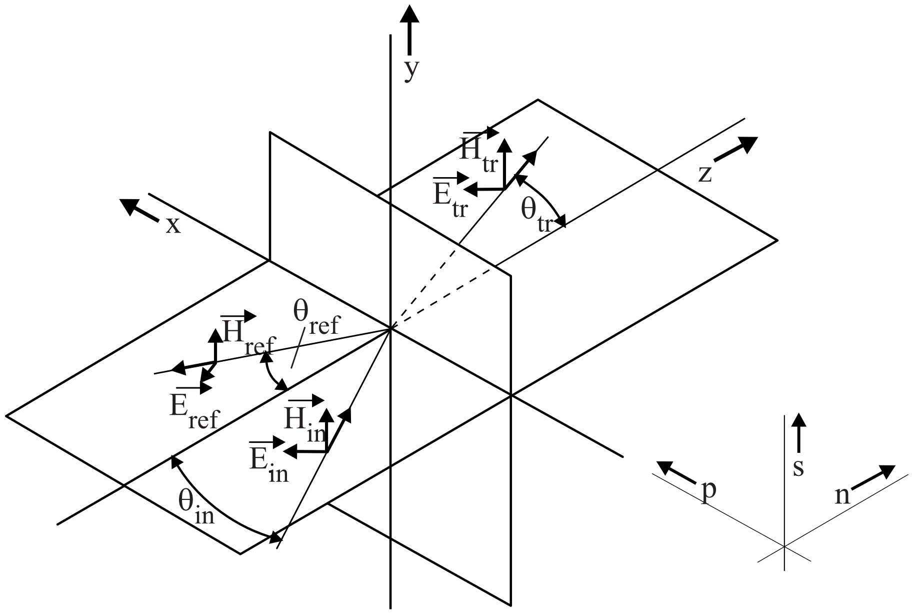


Abbildung 8.12: Reflexion und Brechung bei TM-Wellen

$$H_{\mathsf{in}} + H_{\mathsf{ref}} = H_{\mathsf{tr}} \quad . \tag{8.169}$$

Für die Stetigkeit der Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ an der Grenzfläche liest man aus Abbildung 8.12 ab

$$E_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - E_{\mathsf{ref}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} = E_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \quad , \tag{8.170}$$

oder in vektorieller Darstellung

$$\frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})(H_{\mathsf{in}} - H_{\mathsf{ref}}) = \frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}})H_{\mathsf{tr}} \quad . \tag{8.171}$$

Dies Ergebnis wurde aus der modifizierten Form der Gleichungen (8.99), (8.103) bzw. (8.105) unter Verwendung von

$$\vec{E} = \frac{Z}{k}(\vec{H} \times \vec{k}) = \frac{1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}(\vec{H} \times \vec{k}) \tag{8.172}$$

mit den Stetigkeitsbedingung (8.96) berechnet. Für das elektrische Feld resultiert mit

$\vec{H}_{\mathsf{in}} = H_{\mathsf{in}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}, \quad \vec{H}_{\mathsf{ref}} = H_{\mathsf{ref}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}, \quad \vec{H}_{\mathsf{tr}} = H_{\mathsf{tr}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{s}}$ und $\varepsilon_{\mathsf{in}} = \varepsilon_{\mathsf{ref}} = \varepsilon_1, \varepsilon_{\mathsf{tr}} = \varepsilon_2$

$$\begin{aligned}
\vec{E}_{\mathsf{in}} &= H_{\mathsf{in}} \cdot \frac{Z_{\mathsf{in}}}{k_{\mathsf{in}}} \left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \times \vec{n}) + (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})(\vec{e}_{\mathrm{s}} \times \vec{e}_{\mathrm{p}}) \right] \\
&= H_{\mathsf{in}} \cdot \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathsf{in}}} \left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\, \vec{e}_{\mathrm{p}} - (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\, \vec{n} \right] && (8.173) \\
\vec{E}_{\mathsf{ref}} &= H_{\mathsf{ref}} \cdot \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathsf{in}}} \left[-(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\, \vec{e}_{\mathrm{p}} - (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\, \vec{n} \right] && (8.174) \\
\vec{E}_{\mathsf{tr}} &= H_{\mathsf{tr}} \cdot \frac{1}{\omega \varepsilon_0 \varepsilon_{\mathsf{tr}}} \left[(\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}})\, \vec{e}_{\mathrm{p}} - (\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})\, \vec{n} \right] && (8.175)
\end{aligned}$$

und daraus wegen (8.96) (8.171). Aus (8.96) und (8.171) ergeben sich die Amplitudenreflexions- und Amplitudentransmissionsfaktoren mit ähnlichen Definition wie bei den TE- Wellen (8.151) für TM-Polarisation

$$\begin{aligned}
r_{\mathsf{TM}} &= \frac{H_{\mathsf{ref}}}{H_{\mathsf{in}}} = \frac{\vec{n} \circ \left(\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}}}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} - \dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}} \right)}{\vec{n} \circ \left(\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}}}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} + \dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}} \right)} \quad , && (8.176) \\
t_{\mathsf{TM}} &= \frac{H_{\mathsf{tr}}}{H_{\mathsf{in}}} = 1 + r_{\mathsf{TM}} \quad . && (8.177)
\end{aligned}$$

Hier muss darauf hingewiesen werden, dass in vielen Lehrbüchern das Verhältnis der Amplituden der elektrischen Feldstärke anstelle der magnetischen Feldstärke zur Definition der Reflexions- und Transmissionsfaktoren herangezogen wird. Beim Reflexionsfaktor ergibt sich daraus ein Faktor -1 und beim Transmissionsfaktor der Faktor $Z_{\mathsf{tr}}/Z_{\mathsf{in}}$.

Wird wieder $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{tr}}$ aus (8.131) verwendet, ergibt sich

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{\dfrac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}} - \dfrac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}} \sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}}{\dfrac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} \vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}} + \dfrac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}} \sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}} \quad , \tag{8.178}$$

$$t_{\mathsf{TM}} = \frac{\frac{2}{\varepsilon_{\mathsf{in}}}\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}}{\frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}}\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}\sqrt{k_{\mathsf{tr}}^2 - k_{\mathsf{in}}^2 + (\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}})^2}} \quad . \tag{8.179}$$

Etwas anschaulicher lassen sich die Reflexions- und Transmissionsfaktoren mit Winkeln ausdrücken:

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{Z_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - Z_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}}{Z_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + Z_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} \tag{8.180}$$

$$t_{\mathsf{TM}} = \frac{2Z_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{Z_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + Z_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} \quad . \tag{8.181}$$

Umformen von (8.178) und (8.179) mit $n_j = \sqrt{\varepsilon_j \mu_j}$, $Z_j = \sqrt{\frac{\mu_j \mu_0}{\varepsilon_j \varepsilon_0}} = Z_0 \frac{\mu_j}{n_j}$ ergibt

$$\boxed{\begin{aligned} r_{\mathsf{TM}} &= \frac{\frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - \frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}}{\frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}} && (8.182) \\ t_{\mathsf{TM}} &= \frac{\frac{2}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}}{\frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{in}}} n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + \frac{1}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 - n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}}} \quad . && (8.183) \end{aligned}}$$

Bei **senkrechtem Einfall** resultiert

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{Z_{\mathsf{in}} - Z_{\mathsf{tr}}}{Z_{\mathsf{in}} + Z_{\mathsf{tr}}} = \frac{\frac{n_{\mathsf{in}}}{\varepsilon \mathsf{in}} - \frac{n_{\mathsf{tr}}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}}{\frac{n_{\mathsf{in}}}{\varepsilon \mathsf{in}} + \frac{n_{\mathsf{tr}}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}} \tag{8.184}$$

Für $\mu_{\mathsf{in}} = \mu_{\mathsf{tr}}$ folgt

$$r_{\mathsf{TM}} = \frac{n_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}}{n_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}} = \frac{\tan\{\theta_{\mathsf{in}} - \theta_{\mathsf{tr}}\}}{\tan\{\theta_{\mathsf{tr}} + \theta_{\mathsf{in}}\}} \quad , \tag{8.185}$$

insbesondere auch für **nichtmagnetische Materialien** $\mu_{\mathsf{in}} = \mu_{\mathsf{tr}} = 1$.

8.2.6 Diskussion der Reflexionsfaktoren

Zur Veranschaulichung des Verlaufs der Reflexionsfaktoren wird eine Darstellung gewählt, bei der die Reflexionsfaktoren in Abhängigkeit vom Einfallswinkel aufgetragen werden.

Für senkrechten Einfall $\theta = 0$ resultiert

$$r_{\mathrm{TE}} = \frac{\dfrac{k_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} - \dfrac{k_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{k_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}} + \dfrac{k_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}}$$

und

$$r_{\mathrm{TM}} = \frac{\dfrac{k_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} - \dfrac{k_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}{\dfrac{k_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}} + \dfrac{k_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}} = \frac{\sqrt{\dfrac{\mu_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}} - \sqrt{\dfrac{\mu_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}}{\sqrt{\dfrac{\mu_{\mathrm{in}}}{\varepsilon_{\mathrm{in}}}} + \sqrt{\dfrac{\mu_{\mathrm{tr}}}{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}}} = -\frac{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}} - \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}}{\sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{in}}}{\mu_{\mathrm{in}}}} + \sqrt{\dfrac{\varepsilon_{\mathrm{tr}}}{\mu_{\mathrm{tr}}}}} = -r_{\mathrm{TE}} \quad .$$

Die Reflexionsfaktoren sind also entgegengesetzt gleich groß. Das bedeutet, dass die H-Felder der einfallen den und der reflektierten antiparallel stehen, wenn die E-Felder parallel sind und umgekehrt.

Fällt die Welle von der anderen Seite auf die Grenzfläche, tauschen die Werte von ε und μ und das Vorzeichen wechselt einfach.

Im weiteren wird ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen, dass die Brechzahl auf der „linken“ Seite kleiner als auf der anderen Seite der Grenzfläche ist.

Fällt die Welle von „links“ auf die Grenzfläche, sind die Reflexionsfaktoren für alle Winkel $0 \leq \theta \leq 90°$ reell. Im Sonderfall des parallelen Einfalls $\theta = 90°$ wird $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathrm{in}} = 0$ und beide Reflektionsfaktoren nehmen den Wert -1 an. Das bedeutet, dass sich die einfallende und reflektierte Welle gerade auslöschen werden, was auch richtig ist, weil eine ebene Welle nicht in einem Halbraum existieren kann, obwohl sie es in diesem Grenzfall müsste. Hier sind die Grenzen des Modells erreicht.

Die Reflektionsfaktoren fallen monoton gegen diesen Grenzwert. Da einer der beiden bei senkrechtem Einfall größer als eins ist, muss er eine Nullstelle aufweisen. Der zugehörige Winkel heißt Brewsterwinkel.

Fällt die Welle von der „rechten“ Seite auf die Grenzfläche, ist zu beachten, dass die Reflexionsfaktoren nur bis zum Grenzwinkel der Totalreflexion $n_{\mathrm{in}} \sin\{\theta\mathrm{gr}\} = n_{\mathrm{tr}}$ reell bleiben. Beim Grenzwinkel der Totalreflexion wird $\vec{n} \circ \vec{k_{\mathrm{tr}}} = 0$ und beide Reflektionsfaktoren nehmen den Wert 1 an. Auch hier gibt es wegen der Monotonie bei einem der beiden Reflektionsfaktoren eine Nullstelle. Wegen der Zeichenumkehr beim Seitenwechsel handelt es sich um den selben Reflektionsfaktor wie beim Einfall von „links“. Die Verläufe sind in den Abbildungen 8.13 und 8.14 jeweils für Vakuum auf der linken Seite und ein unmagnetisches bzw. ein magnetisches Medium auf der rechten dargestellt. Interessant ist hier, dass bei der speziellen Konstellation mit magnetischen Medium auf der rechten Seite nunmehr ein Brewsterwinkel für die TE-Polarisation existiert.

Der Reflexionsfaktor ohne Brewsterwinkel ist vom Betrag her über den gesamten Verlauf immer größer als der mit dem Brewsterwinkel, was auch den Abbildungen 8.15 und 8.16 zu entnehmen ist.

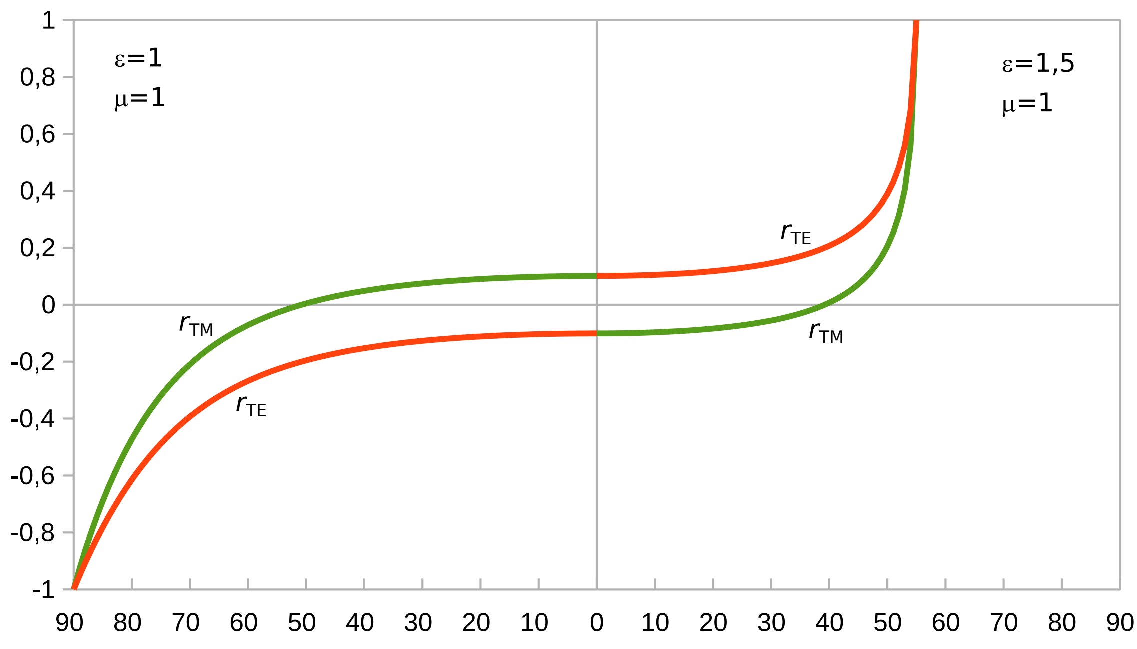


Abbildung 8.13: Reflexionsfaktoren bei unmagnetischen Medien als Funktion des jeweiligen Einfallsswinkels. Links ist Vakuum, rechts ein Medium mit $\varepsilon = 1,5$

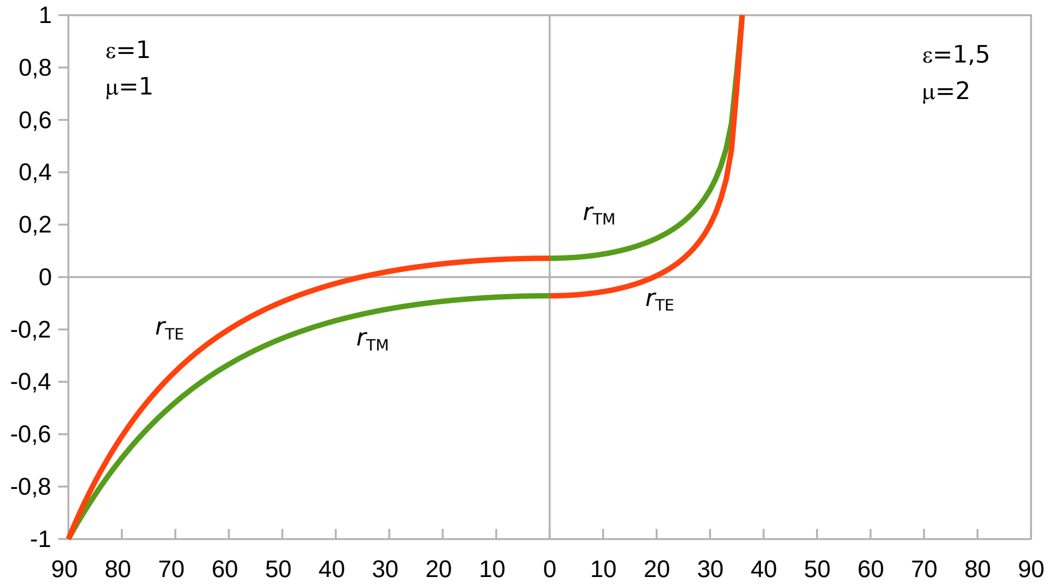


Abbildung 8.14: Reflexionsfaktoren bei Vakuum auf der linken Seite und einem magnetischen Medium mit $\mu = 2$ und $\varepsilon = 1,5$ auf der rechten Seite als Funktion des jeweiligen Einfallsswinkels.

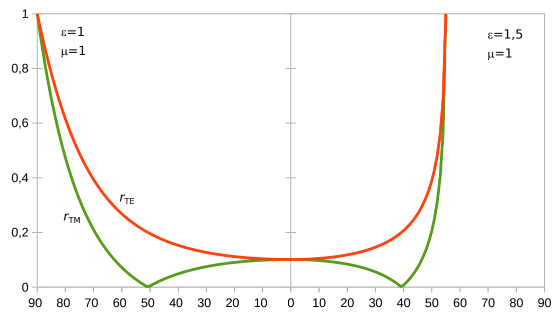


Abbildung 8.15: Beträge der Reflexionsfaktoren bei unmagnetischen Medien als Funktion des jeweiligen Einfallsswinkels.

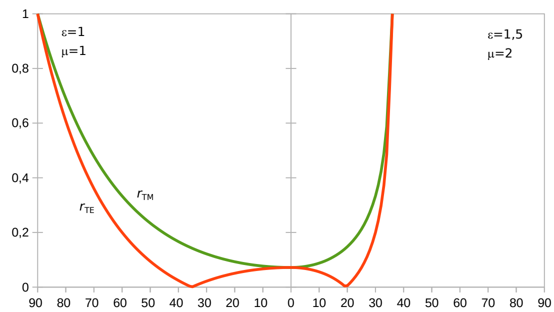


Abbildung 8.16: Beträge der Reflexionsfaktoren bei einem magnetischen Medium auf der rechten Seite als Funktion des jeweiligen Einfallsswinkels.

8.2.6.1 Brewster-Winkel

Zur Berechnung des Brewsterwinkels wird für die Normalkomponenten der Wellenzahlvektoren die Darstellung

$$\frac{\vec{n}\circ\vec{k}}{k_0} = \sqrt{\varepsilon\mu - \varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{in}}\sin^2\{\theta_{\text{in}}\}}$$

verwendet. Für die TE-Welle ergibt sich aus der Bedingung

$$\left.\frac{\vec{n}\circ\vec{k_{\text{in}}}}{\mu_{\text{in}}} - \frac{\vec{n}\circ\vec{k_{\text{tr}}}}{\mu_{\text{tr}}}\right|_{\theta_{\text{in}}=\theta_{\text{B,TE}}} = 0$$

$$\frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{in}} - \mu_{\text{in}}\varepsilon_{\text{in}}\sin^2\{\theta_{\text{B,TE}}\}}}{\mu_{\text{in}}} = \frac{\sqrt{\varepsilon_{\text{tr}}\mu_{\text{tr}} - \mu_{\text{in}}\varepsilon_{\text{in}}\sin^2\{\theta_{\text{B,TE}}\}}}{\mu_{\text{tr}}} \quad .$$

Nach Umstellen resultiert

$$\mu_{\text{in}}\varepsilon_{\text{in}}\sin^2\{\theta_{\text{B,TE}}\} = \frac{\mu_{\text{tr}}\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}^2 - \mu_{\text{in}}^2}(\varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{tr}} - \varepsilon_{\text{tr}}\mu_{\text{in}})$$

und mit Hilfe von $\sin^2\{x\} + \cos^2\{x\} = 1$

$$\tan^2\{\theta_{\text{B,TE}}\} = \frac{\mu_{\text{tr}}}{\mu_{\text{in}}}\frac{\varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{tr}} - \varepsilon_{\text{tr}}\mu_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{tr}}\mu_{\text{tr}} - \varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{in}}} \quad .$$

In unmagnetischen Medien resultiert $\tan^2\{\theta_{\text{B,TE}}\} = -1$, was nicht möglich ist. Es gibt also keinen Brewsterwinkel für TE-polarisierte Wellen in unmagnetischen Medien.

Für TM-polarisierte Wellen resultiert mit dem selben Vorgehen

$$\tan^2\{\theta_{\text{B,TM}}\} = \frac{\varepsilon_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{in}}}\frac{\varepsilon_{\text{tr}}\mu_{\text{in}} - \varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{tr}}\mu_{\text{tr}} - \varepsilon_{\text{in}}\mu_{\text{in}}} \quad .$$

In unmagnetischen Medien ergibt sich der bekannte Zusammenhang

$$\tan^2\{\theta_{\text{B,TM}}\} = \frac{\varepsilon_{\text{tr}}}{\varepsilon_{\text{in}}} \quad .$$

In diesem Fall stehen die Wellenzahlvektoren der reflektierten und der transmittierten Welle senkrecht aufeinander, oder mathematisch ausgedrückt gilt

$$\theta_{\text{in}} + \theta_{\text{tr}} = \pi/2 \quad .$$

Interessant ist noch der Zusammenhang

$$\frac{\varepsilon_{\text{in}}}{\varepsilon_{\text{tr}}}\tan^2\{\theta_{\text{B,TM}}\} = -\frac{\mu_{\text{in}}}{\mu_{\text{tr}}}\tan^2\{\theta_{\text{B,TE}}\} \quad ,$$

aus dem man direkt ablesen kann, dass jeweils nur eine der beiden Polarisationen einen Brewsterwinkel besitzt.

8.2.7 Intensitätsreflexions- und Intensitätstransmissionsfaktoren

Einfallende, gebrochene und reflektierte Wellen transportieren Energie. Die Energieflussdichten sind durch zeitgemittelte Poyntingvektoren gegeben. Die zeitgemittelten Poyntingvektoren ergeben sich im Bereich 1 zu $\overline{\vec{S}_1} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{(E_{\mathsf{in}} + E_{\mathsf{ref}}) \times (H^*_{\mathsf{in}} + H^*_{\mathsf{ref}})\right\} = \overline{\vec{S}_{\mathsf{in}}} + \overline{\vec{S}_{\mathsf{ref}}}$ und im Bereich 2 aus $\overline{\vec{S}_2} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{E_{\mathsf{tr}} \times H^*_{\mathsf{tr}}\right\} = \overline{\vec{S}_{\mathsf{tr}}}$

Hier interessiert uns gerade dieser Energietransport über die Grenzfläche, also in $\vec{n}$-Richtung an der Stelle $\vec{r} \circ \vec{n} = 0$. Wir definieren den

Intensitätsreflektionsfaktor

$$R = -\frac{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathsf{ref}}}}{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathsf{in}}}} \tag{8.186}$$

und den

Intensitätstransmissionsfaktor

$$T = \frac{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathsf{tr}}}}{\overline{\vec{n} \circ \vec{S}_{\mathsf{in}}}} \quad . \tag{8.187}$$

Es gilt

$$\begin{aligned}
\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n} &= k_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} \quad , \\
\vec{k}_{\mathsf{ref}} \circ \vec{n} &= -\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n} = -k_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} \quad , \\
\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n} &= k_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\} \quad .
\end{aligned} \tag{8.188}$$

Das Minuszeichen für das Ergebnis von $\vec{n} \circ \vec{k}_{\mathsf{ref}}$ bedeutet, dass der Energietransport in negativer $\vec{n}$-Richtung erfolgt. Damit folgt

$$R_{\mathsf{TE}} = \frac{|E_{\mathsf{ref}}|^2}{|E_{\mathsf{in}}|^2} = \left|\frac{E_{\mathsf{ref}}}{E_{\mathsf{in}}}\right|^2 = |r_{\mathsf{TE}}|^2 \tag{8.189}$$

$$R_{\mathsf{TM}} = \frac{|H_{\mathsf{ref}}|^2}{|H_{\mathsf{in}}|^2} = \left|\frac{H_{\mathsf{ref}}}{H_{\mathsf{in}}}\right|^2 = |r_{\mathsf{TM}}|^2 \quad , \tag{8.190}$$

also allgemein

$$R = |r|^2 \tag{8.191}$$

und

$$T_{\mathsf{TE}} = \frac{\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n}}{\mu_{\mathsf{tr}}}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}}{\mu_{\mathsf{in}}}\right\}} \frac{|E_{\mathsf{tr}}|^2}{|E_{\mathsf{in}}|^2} = \frac{\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n}}{\mu_{\mathsf{tr}}}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}}{\mu_{\mathsf{in}}}\right\}} \|t_{\mathsf{TE}}\|^2 \tag{8.192}$$

$$T_{\mathsf{TM}} = \frac{\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}}\right\}}{\mathrm{Re}\left\{\dfrac{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}}{\varepsilon_{\mathsf{in}}}\right\}} \frac{|H_{\mathsf{tr}}|^2}{|H_{\mathsf{in}}|^2} \quad . \tag{8.193}$$

Leider lässt sich für T_{TE} und T_{TM} keine einheitliche Darstellung wie in (8.191) finden. Zur Abhilfe definieren wir die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für tangentiale Feldamplituden nach Tabelle 8.1.

Mit den in 8.1 angegebenen Reflexions- und Transmissionsfaktoren können R und T allgemein wie folgt dargestellt werden

$$\begin{aligned}
R_{\mathsf{TE}} &= -\mathrm{Re}\left\{r_{\mathsf{E,TE}} \cdot r^*_{\mathsf{H,TE}}\right\} \\
R_{\mathsf{TM}} &= -\mathrm{Re}\left\{r_{\mathsf{E,TM}} \cdot r^*_{\mathsf{H,TM}}\right\} \\
T_{\mathsf{TE}} &= \mathrm{Re}\left\{t_{\mathsf{E,TE}} \cdot t^*_{\mathsf{H,TE}}\right\} \\
T_{\mathsf{TM}} &= \mathrm{Re}\left\{t_{\mathsf{E,TM}} \cdot t^*_{\mathsf{H,TM}}\right\} \quad ,
\end{aligned}$$

also folgt

$$R = -\mathrm{Re}\left\{r_{\mathsf{E}} \cdot r^*_{\mathsf{H}}\right\} \tag{8.194}$$

$$T = \mathrm{Re}\left\{t_{\mathsf{E}} \cdot t^*_{\mathsf{H}}\right\} \tag{8.195}$$

Tabelle 8.1: Transmissions- und Reflektionsfaktoren für tangentiale Amplituden der elektrischen und magnetischen Feldstärke an der Grenzfläche.

	TE	TM
r_E	$:= \dfrac{\vec{E}_\mathsf{ref} \circ \vec{e}_\mathrm{s}}{\vec{E}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{s}} = \dfrac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_\mathsf{in}}{\mu_\mathsf{in}} - \frac{\vec{k}_\mathsf{tr}}{\mu_\mathsf{tr}}\right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_\mathsf{in}}{\mu_\mathsf{in}} + \frac{\vec{k}_\mathsf{tr}}{\mu_\mathsf{tr}}\right)} = r_\mathsf{TE}$	$:= \dfrac{\vec{E}_\mathsf{ref} \circ \vec{e}_\mathrm{p}}{\vec{E}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{p}} = -r_\mathsf{H,TM}$
r_H	$:= \dfrac{\vec{H}_\mathsf{ref} \circ \vec{e}_\mathrm{p}}{\vec{H}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{p}} = -r_\mathsf{E,TE}$	$:= \dfrac{\vec{H}_\mathsf{ref} \circ \vec{e}_\mathrm{s}}{\vec{H}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{s}} = \dfrac{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_\mathsf{in}}{\varepsilon_\mathsf{in}} - \frac{\vec{k}_\mathsf{tr}}{\varepsilon_\mathsf{tr}}\right)}{\vec{n} \circ \left(\frac{\vec{k}_\mathsf{in}}{\varepsilon_\mathsf{in}} + \frac{\vec{k}_\mathsf{tr}}{\varepsilon_\mathsf{tr}}\right)} = r_\mathsf{TM}$
t_E	$:= \dfrac{\vec{E}_\mathsf{tr} \circ \vec{e}_\mathrm{s}}{\vec{E}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{s}} = 1 + r_\mathsf{E,TE} = 1 + r_\mathsf{TE}$	$:= \dfrac{\vec{E}_\mathsf{tr} \circ \vec{e}_\mathrm{p}}{\vec{E}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{p}} = t_\mathsf{H,TM} \cdot \dfrac{\vec{n} \circ \frac{\vec{k}_\mathsf{tr}}{\varepsilon_\mathsf{tr}}}{\vec{n} \circ \frac{\vec{k}_\mathsf{in}}{\varepsilon_\mathsf{in}}}$
t_H	$:= \dfrac{\vec{H}_\mathsf{tr} \circ \vec{e}_\mathrm{p}}{\vec{H}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{p}} = t_\mathsf{E,TE} \cdot \dfrac{\vec{n} \circ \frac{\vec{k}_\mathsf{tr}}{\mu_\mathsf{tr}}}{\vec{n} \circ \frac{\vec{k}_\mathsf{in}}{\mu_\mathsf{in}}}$	$:= \dfrac{\vec{H}_\mathsf{tr} \circ \vec{e}_\mathrm{s}}{\vec{H}_\mathsf{in} \circ \vec{e}_\mathrm{s}} = 1 + r_\mathsf{H,TM} = 1 + r_\mathsf{TM}$

Die Reflexions- und Transmissionsfaktoren sind in dieser Darstellung sehr einfach. Leider wird der Transmissionsfaktor nach dem Einsetzen etwas kompliziert und sobald die Medien verlustbehaftet sind, komplett undurchsichtig.

In verlustlosen Medien resultiert das anschaulich zu erwartende Ergebnis

$$\boxed{R + T = 1 \quad ,} \tag{8.196}$$

also die Summe aus reflektierter und transmittierter Leistung ist gleich der einfallenden Leistung.

8.2.8 Totalreflexion

Beim Übergang vom optisch dichteren ins optisch dünnere Medium $n_\mathsf{in} > n_\mathsf{tr}$ tritt auf Grund der Stetigkeitsbedingungen der Wellenzahlvektoren für Einfallswinkel $\theta_\mathsf{in} > \theta_\mathsf{gr}$ **in verlustlosen Medien Totalreflexion** ein. Grafisch ist dies in Abbildung 8.17 dargestellt.

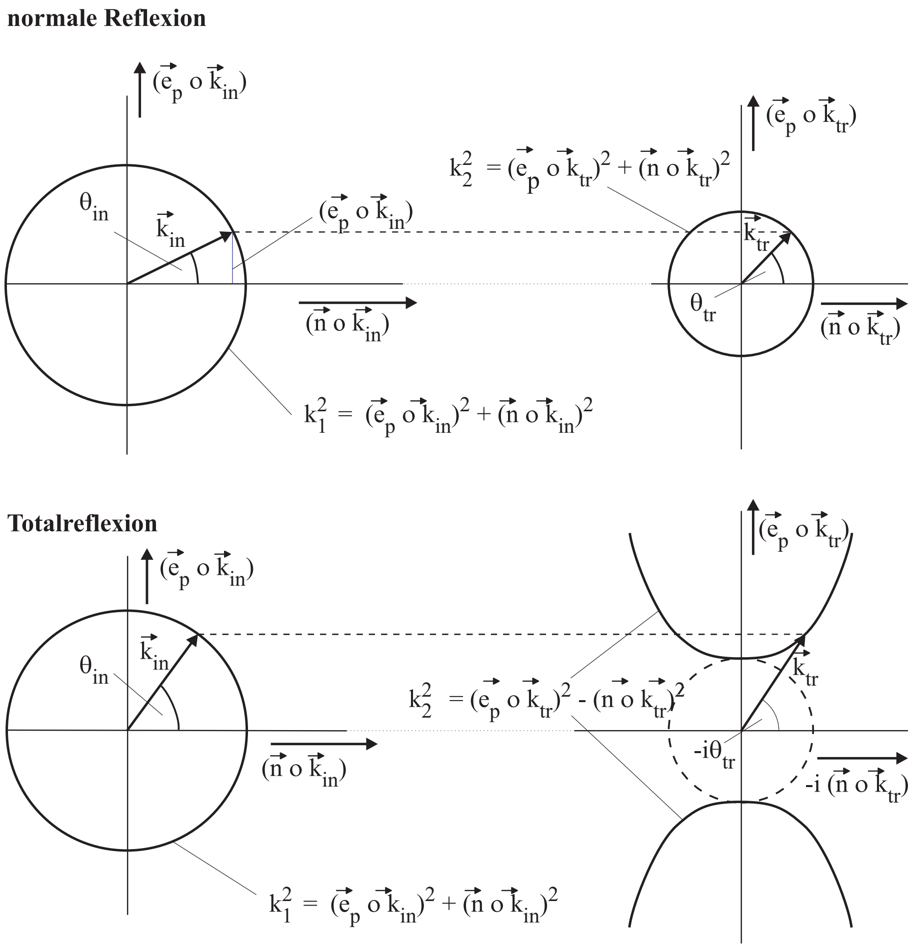


Abbildung 8.17: Grafische Auswertung der Stetigkeitsbedingungen für die Wellenzahlvektoren. Oben ist der Fall für normale Reflexion dargestellt. Wird $\vec{e}_{\text{p}} \circ \vec{k}_{\text{in}} = k_2$ ist der Grenzwinkel der Totalreflexion $\theta_{\text{in}} = \theta_{\text{gr}}$ erreicht. Für größere Winkel θ_{in} gibt es Totalreflexion und die Auswertung geschieht nach dem unteren Bildteil.

θ_{gr} heißt **Grenzwinkel der Totalreflexion**. Nach dem Brechungsgesetz (8.120) gilt $\frac{n_{\mathsf{in}}}{n_{\mathsf{tr}}} \sin\{\theta_{\mathsf{gr}}\} = 1$ und für Winkel $\theta_{\mathsf{in}} > \theta_{\mathsf{gr}}$

$$\sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} = \frac{n_{\mathsf{in}}}{n_{\mathsf{tr}}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\} > 1 \quad . \tag{8.197}$$

Diese Bedingung kann für reelle Winkel θ_{tr} nicht erfüllt werden. Jedenfalls wird $\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\}$ rein imaginär, denn

$$\cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\} = \sqrt{1 - \frac{n_{\mathsf{in}}^2}{n_{\mathsf{tr}}^2} \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\}} = i\sqrt{\frac{n_{\mathsf{in}}^2}{n_{\mathsf{tr}}^2} \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - 1} \quad . \tag{8.198}$$

Etwas allgemeiner lässt sich der Fall der Totalreflexion mit Ausbreitungsvektoren darstellen. Wegen des Snelliusgesetzes $\vec{n} \times (\vec{k}_{\mathsf{tr}} - \vec{k}_{\mathsf{in}}) = 0$, das auch in der Form $\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ (\vec{k}_{\mathsf{tr}} - \vec{k}_{\mathsf{in}}) = 0$ geschrieben werden kann, resultiert in kartesischen Koordinaten

$$(\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n})^2 = k_{\mathsf{tr}}^2 - (\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{e}_{\mathrm{p}})^2 = k_{\mathsf{tr}}^2 - (\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{e}_{\mathrm{p}})^2 \quad . \tag{8.199}$$

Sobald die Tangentialkomponente des Ausbreitungsvektors der einfallenden Welle $\vec{e}_{\mathrm{p}} \circ \vec{k}_{\mathsf{in}}$ größer als der Ausbreitungskoeffizient für die transmittierte Welle $k_{\mathsf{tr}} = k_{\mathsf{tr}}$ wird, resultiert für die transmittierte Welle eine imaginäre Komponente in Normalenrichtung und es tritt Totalreflexion ein. Das Vorzeichen wird so gewählt, dass sich eine abklingende Welle ergibt.

$$\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n} = +i\sqrt{(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{e}_{\mathrm{p}})^2 - k_{\mathsf{tr}}^2} \quad . \tag{8.200}$$

Der Grenzfall ist durch

$$(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{e}_{\mathrm{p}})\Big|_{\theta_{\mathsf{gr}}} = k_{\mathsf{tr}} \tag{8.201}$$

gegeben. Einsetzen ergibt

$$n_{\mathsf{in}} \cdot \sin\{\theta_{\mathsf{gr}}\} = n_{\mathsf{tr}} \quad . \tag{8.202}$$

8.2.8.1 Totalreflexion in unmagnetischen Medien

Im folgenden soll die Totalreflexion in unmagnetischen Medien $\mu_{\mathsf{in}} = \mu_{\mathsf{tr}} = 1$ betrachtet werden. Genau genommen reicht es, wenn nur $\mu_{\mathsf{in}} = \mu_{\mathsf{tr}}$ erfüllt ist. Für TE-Wellen folgt aus (8.164)

$$r_{\mathsf{TE}} = \left(\frac{E_{\mathsf{ref}}}{E_{\mathsf{in}}}\right)_{\mathsf{TE}} = \frac{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - i\sqrt{n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}}^2}}{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + i\sqrt{n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}}^2}} \quad . \tag{8.203}$$

Im Zähler und Nenner stehen zueinander konjugiert komplexe Zahlen, also ist $|r_{\mathsf{TE}}| = 1$. Mit dem Phasenwinkel ψ_{TE} kann man schreiben

$$r_{\mathsf{TE}} = \left(\frac{E_{\mathsf{ref}}}{E_{\mathsf{in}}}\right)_{\mathsf{TE}} = e^{-i\,2\psi_{\mathsf{TE}}} \quad , \tag{8.204}$$

wobei

$$\tan\{\psi_{\mathsf{TE}}\} = \frac{\sqrt{n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}}^2}}{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}} \tag{8.205}$$

gilt. Entsprechend finden wir für die Totalreflexion von TM-Wellen mit (8.182)

$$r_{\mathsf{TM}} = \left(\frac{H_{\mathsf{ref}}}{H_{\mathsf{in}}}\right)_{\mathsf{TM}} = \frac{\frac{1}{n_{\mathsf{in}}^2} n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} - i\,\frac{1}{n_{\mathsf{in}}^2}\sqrt{n_{\mathsf{tr}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}}^2}}{\frac{1}{n_{\mathsf{in}}^2} n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\} + i\,\frac{1}{n_{\mathsf{tr}}^2}\sqrt{n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}}^2}} \quad . \tag{8.206}$$

Auch hier haben wir $|r_{\mathsf{TM}}| = 1$ und schreiben

$$r_{\mathsf{TM}} = \left(\frac{H_{\mathsf{ref}}}{H_{\mathsf{in}}}\right)_{\mathsf{TM}} = e^{-i\,2\psi_{\mathsf{TM}}} \tag{8.207}$$

mit

$$\tan\{\psi_{\mathsf{TM}}\} = \frac{n_{\mathsf{in}}^2}{n_{\mathsf{tr}}^2} \frac{\sqrt{n_{\mathsf{in}}^2 \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - n_{\mathsf{tr}}^2}}{n_{\mathsf{in}} \cos\{\theta_{\mathsf{in}}\}} = \frac{n_{\mathsf{in}}^2}{n_{\mathsf{tr}}^2} \tan\{\psi_{\mathsf{TE}}\} \quad . \tag{8.208}$$

Bei der Totalreflexion wird die Welle mit

$$R = 1 \tag{8.209}$$

reflektiert, aber es erfolgt ein Phasensprung um $-2\psi_{\mathsf{TE}}$ bzw. $-2\psi_{\mathsf{TM}}$. Der Phasensprung ist wegen (8.208) für die TM-Welle größer als für die TE-Welle. Eine linear polarisierte Welle, deren Schwingungsrichtung nicht mit der einer TE- oder TM-Welle zusammenfällt, wird nach der Totalreflexion elliptisch polarisiert.

Die Ausbreitung der transmittierten Welle erfolgt mit dem Ausbreitungsvektor $\vec{k}_{\mathsf{tr}} = (k_{\mathsf{tr}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\}, 0, k_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\})^T$. Die Welle hat die Form

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\mathsf{tr}} &= \vec{E}_{\mathsf{t0}} \exp\{i(x \cdot k_{\mathsf{tr}} \sin\{\theta_{\mathsf{tr}}\} + z \cdot k_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\} - \omega t)\} \qquad (8.210)\\ &= \vec{E}_{\mathsf{t0}} \cdot \exp\left\{-z \cdot k_{\mathsf{tr}} \sqrt{\frac{n_{\mathsf{in}}^2}{n_{\mathsf{tr}}^2} \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - 1}\right\} \cdot \exp\left\{i\left(x \cdot k_{\mathsf{tr}} \frac{n_{\mathsf{in}}}{n_{\mathsf{tr}}} \sin\{\theta_{\mathsf{in}}\} - \omega t\right)\right\} \quad .\end{aligned}$$

Dies ist eine in z-Richtung exponentiell abklingende Welle. Das zugehörige Magnetfeld $\vec{H}_{\mathsf{tr}} = \left(\vec{k}_{\mathsf{tr}} \times \vec{E}_{\mathsf{tr}}\right)(k_{\mathsf{tr}} Z_{\mathsf{tr}})$ ist mit dem elektrischen Feld nicht mehr in Phase, da $\vec{k}_{\mathsf{tr}}$ komplex ist.

8.2.8.2 Energiefluss senkrecht zur Grenzfläche

Die Energieflussdichte der transmittierten Welle senkrecht zur Grenzfläche im zeitlichen Mittel ist für TE-Wellen

$$\left(\overline{\vec{S}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n}}\right)_{\mathsf{TE}} = \left(\overline{S_{\mathsf{tr}}}\right)_{\mathsf{TE}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_{\mathsf{TE}} \times \vec{H}_{\mathsf{TE}}^*\right\} \circ \vec{e}_{\mathsf{z}} = 0 \quad , \qquad (8.211)$$

denn für TE-Wellen mit der xz-Ebene als Einfallsebene ist $\vec{E}_{\mathsf{tr}} = (0, E_{\mathsf{ty}}, 0)^T$ und damit $S_{\mathsf{tr}} = \left(\vec{E}_{\mathsf{tr}} \times \vec{H}_{\mathsf{tr}}^*\right) \circ \vec{e}_{\mathsf{z}} = -E_{\mathsf{ty}} H_{\mathsf{tx}}$ und

$$\begin{aligned}H_{\mathsf{tx}} &= \frac{1}{k_{\mathsf{tr}} Z_{\mathsf{tr}}}\left(\vec{k}_{\mathsf{tr}} \times \vec{E}_{\mathsf{tr}}\right) \circ \vec{e}_{\mathsf{x}} = -\frac{1}{Z_{\mathsf{tr}}} k_{\mathsf{tr}} \cos\{\theta_{\mathsf{tr}}\} E_{\mathsf{ty}} \qquad (8.212)\\ &= -i\frac{1}{Z_{\mathsf{tr}}}\sqrt{\frac{n_{\mathsf{in}}^2}{n_{\mathsf{tr}}^2} \sin^2\{\theta_{\mathsf{in}}\} - 1} E_{\mathsf{ty}} \quad .\end{aligned}$$

Entsprechend findet man auch für TM-Wellen

$$\left(\overline{\vec{S}_t \circ \vec{n}}\right)_{\mathsf{TM}} = 0 \quad . \tag{8.213}$$

Der Intensitätstransmissionsfaktor ist also bei der Totalreflexion identisch Null

$$T = 0 \quad , \tag{8.214}$$

was nach (8.196) auch zu erwarten war. Es gibt zwar eine exponentiell abklingende Welle im Medium 2 , aber im zeitlichen Mittel keinen Energiefluss in das Medium hinein. Man spricht in diesem Zusammenhang von **quergedämpften Wellen**.

8.2.8.3 Totalreflexion in magnetischen Medien

Die hier gefundenen Zusammenhänge, die für unmagnetische Materialien hergeleitet wurden, gelten mit kleinen Modifikationen ganz allgemein für verlustfreie (magnetische) Materialien. In vektorieller Schreibweise ist der Amplitudenreflektionsfaktor durch (8.152) bzw. (8.176) gegeben. Im Zähler und Nenner stehen zueinander konjugiert komplexe Zahlen, so dass gilt

$$|r_{\mathsf{TE}}| = |r_{\mathsf{TM}}| = 1 \quad . \tag{8.215}$$

Die Phasensprünge resultieren aus

$$\tan\{\Psi_{\mathsf{TE}}\} = \frac{-i\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n}}{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}} \frac{\mu_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{tr}}} = \frac{\mu_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{tr}}} \cdot \frac{\sqrt{(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n})^2 - k_{\mathsf{tr}}^2}}{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}} \tag{8.216}$$

und

$$\begin{aligned} \tan\{\Psi_{\mathsf{TM}}\} &= \frac{-i\,\vec{k}_{\mathsf{tr}} \circ \vec{n}}{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}} \cdot \frac{\varepsilon_{\mathsf{in}}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}} = \frac{\varepsilon_{\mathsf{in}}}{\varepsilon_{\mathsf{tr}}} \frac{\sqrt{(\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n})^2 - k_{\mathsf{tr}}^2}}{\vec{k}_{\mathsf{in}} \circ \vec{n}} \\ &= \frac{\mu_{\mathsf{tr}}\varepsilon_{\mathsf{in}}}{\mu_{\mathsf{in}}\varepsilon_{\mathsf{tr}}} \tan\{\Psi_{\mathsf{TE}}\} = \left(\frac{Z_{\mathsf{tr}}}{Z_{\mathsf{in}}}\right)^2 \tan\{\Psi_{\mathsf{TE}}\} \quad . \end{aligned} \tag{8.217}$$

Wegen $|r| = 1$ resultiert sofort aus (8.194)

$$R = 1 \tag{8.218}$$

und mit (8.196)

$$T = 0 \quad . \tag{8.219}$$

8.2.8.4 Bemerkung zur Kausalität

Im Abschnitt 8.2.8 wurde die Totalreflexion einer ebenen Welle an einer ebenen Grenzfläche berechnet. Dabei zeigt sich, dass senkrecht zur Grenzfläche keine Energie transportiert wird. Betrachtet man das Ergebnis genauer, so stellt man fest, dass sich eine Welle entlang der Grenzfläche ausbreitet, deren Amplitude in das Medium hinein exponentiell abnimmt. Sie wird als sogenannte quergedämpfte Welle bezeichnet. Es stellt sich nun die Frage, wo diese eigentlich herkommt. Schließlich wird die Energie der einfallenden Welle vollständig in die der reflektierten Welle übertragen, sonst wäre der Ausdruck "Totalreflexion" reichlich sinnlos.

Um das Rätsel zu lösen müssen wir beachten, dass wir erstens von unendlich ausgedehnten Wellen sowie einer unendlich ausgedehnten Grenzfläche ausgehen und zweitens in der Rechnung das Gefühl einer zeitlichen Abfolge vermittelt wird, welche nicht existiert. Eigentlich lösen wir für den vorgegebenen Gesamtraum, der durch die Grenzfläche in zwei unendliche Halbräume geteilt wird, die Wellengleichung. Diese Lösung bedingt eine Feldverteilung, die in die Anteile quergedämpfte Welle, reflektierte Welle und einfallende Welle zerlegt werden kann. Jeder dieser Anteile für sich hat die Eigenschaften einer ebenen Welle, bis auf die Tatsache, dass sie nicht unendlich ausgedehnt sind, sondern jeweils nur in begrenzten Raumbereichen existieren. Dies ist die Begründung für die eigentlich unzulässige übliche Betrachtungsweise, dass die einfallende Welle die reflektierte Welle und die quergedämpfte Welle erzeugt. Die einfallende Welle hätte nämlich als ebene Welle mit unendlicher Ausdehnung überhaupt nicht alleine existieren können, ohne die aus den Maxwell-Gleichungen entstandenen Stetigkeitsbedingungen zu verletzen.

8.2.9 Zusammenfassung

Wie wir gesehen haben, lassen sich Reflexion und Brechung an einer ruhenden Grenzfläche mit einigen wenigen Grundgedanken beschreiben. Zunächst kann konstatiert werden, dass es zu keiner Frequenzänderung an der ruhenden Grenzfläche kommt (8.111). Die Einfallsebene wird durch den Wellenzahlvektor der einfallenden Welle und den Normalenvektor auf die Grenzfläche aufgespannt, im Sonderfall senkrechter Inzidenz degradiert die Fläche zu einer Linie. Weder die reflektierte noch die gebrochene Welle verlassen die Einfallsebene (8.115) und damit lässt sich die Beschreibung der Reflexion und Brechung als zweidimensionales Problem auffassen. Für die Wellenzahlvektoren gelten das Reflektionsgesetz (8.117) und das Brechungsgesetz von Snellius (8.118). Sie gehen von der Forderung aus, dass die Tangentialkomponenten der Wellenzahlvektoren der einfallenden, reflektierten und der gebrochenen Welle gleich groß sind. Daraus folgt die bekannte Aussage des Reflexionsgesetzes, dass der Ausfallswinkel gleich dem Einfallswinkel ist, wobei die Winkel stets gegen die Flächennormale gemessen werden. Die Dispersionsrelation (8.127) verknüpft Normal- und Tangentialkomponenten der Wellenzahlvektoren, so dass die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der gebrochenen Welle aus (8.131) bestimmt werden kann. Die Normalkomponente des Wellenzahlvektors der reflektierten Welle ist wegen des Reflexionsgesetzes entgegengesetzt gleich groß wie die der einfallenden Welle (8.125). Aus der Summe dieser Erwägungen sind somit alle Wellenzahlvektoren bei Reflexion und Brechung durch Vorgabe der einfallenden Welle bekannt.

Diese Aussagen gelten für alle Wellenformen, die sich entsprechend $\exp\{\vec{k} \circ \vec{r} - \omega t\}$ ausbreiten. Weitere Aussagen zur Leistungsaufteilung und den Amplituden der Wellen haben wir nur für ebene Wellen als wichtigsten Vertreter der Wellen erarbeitet.

Die Zusammenhänge für die Feldstärkeamplituden der Wellen ergeben sich aus den Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche. Es wird nach Wellen unterschieden, die jeweils keine Feldkomponente senkrecht zur Grenzfläche aufweisen, namentlich TE- und TM- Wellen. TE- Wellen haben keine E- Feldkomponente in Normalenrichtung zur Grenzfläche. Dementsprechend gehen auch nur die Stetigkeitsbedingungen für die Normalenkomponente der magnetischen Induktion in die Formeln für TE- Wellen ein. Im Gegensatz dazu haben TM-Wellen nur eine E- Feldkomponente in Normalenrichtung und die Stetigkeitsbedingungen für de Normalenkomponente der dielektrischen Verschiebung sind zu berücksichtigen. Zur Charakterisierung werden normalerweise die Reflexions- und Transmissionsfaktoren für die Amplituden des elektrischen Feldes der TE- (8.152) und TM- Wellen (8.176) angegeben. Daneben existieren auch die entsprechenden Faktoren für die tangentialen elektrischen und magnetischen Felder der TE- und TM- Wellen (Tabelle 8.1). Die Intensitätstransmission und -reflexion errechnet sich aus dem Verhältnis der über die Grenzfläche transportierten bzw. an ihr reflektierten Leistungsdichte zur einfallenden Leistungsdichte und wird als Intensitäts-Reflexionsfaktor (8.194) bzw. Intensitäts- Transmissionsfaktor (8.195) angegeben.

8.3 Skalare Beugungstheorie

Bis hierher haben wir die Ausbreitung ebener Wellen und ihr Verhalten an Grenzflächen betrachtet. Diese Wellen sind im Raum unendlich ausgedehnt, was unserer Erfahrung von z.B. Lichtstrahlen widerspricht. Im folgenden wollen wir versuchen, die Abstrahlung einer begrenzten Quelle zu betrachten, wie es z.B. bei dem Lichtstrahl aus einer Taschenlampe vorkommt. Zunächst versuchen wir die Feldentwicklung in der Ebene der Quelle (also am Austrittsfenster der Taschenlampe) nach ebenen Wellen und betrachten deren Überlagerung in einiger Entfernung zur Quelle. Das Verfahren wird in einem weiteren Abschnitt auf seine allgemeine Gültigkeit hin untersucht.

Wie wir sehen werden, ist das Werkzeug der skalaren Beugungstheorie in den angegebenen Näherungen nur für sehr kleine Quellen geeignet, was für das Beispiel der Taschenlampe erst in einiger Entfernung erfüllt ist. Dort sind die Felder aber üblicherweise schon weit abgeklungen, was in unserem Beispiel bedeutet, dass der Strahl sehr schwach wird. Als Ausweg werden wir die sogenannte paraxiale Wellengleichung für den freien Raum herleiten und Lösungen der Differentialgleichung suchen. Es zeigt sich, dass wir mit Hilfe dieser Lösungen dann den Lichtstrahl recht gut beschreiben können. Nachteilig ist dabei nur, dass wir Beugungseffekte, die wir mit der skalaren Beugungstheorie beschreiben können, hier nicht mehr sehen werden. Es liegt also an dem Ziel, welche der beiden Verfahren man anwendet.

Im Rahmen der Beugungstheorie wird angenommen, dass sich das Feld im wesentlichen wellenförmig in z- Richtung ausbreitet. Der Zusammenhang zwischen dem Feldverlauf in der Ebene $z = z_0$, hier $z_0 = 0$, und einer beliebigen anderen, dazu parallel verlaufenden, Ebene $z = \mathsf{const}$. wird hergeleitet. Es stellt sich heraus, dass es eine eindeutige Beziehung zwischen den Feldern in beiden Ebenen gibt, wenn man voraussetzt, dass sich die Wellen nur in positive oder nur in negative z-Richtung ausbreiten. Dies ist eine **Strahlungsbedingung** an die Wellen. Im allgemeinen Fall benötigt man für eine eindeutige Beziehung die Kenntnis des Feldes in der betreffenden Ebene $z = \mathsf{const}$ und zusätzlich die Kenntnis der partiellen Ableitung senkrecht zur Ebene, also in z-Richtung.

Wellengleichungen gelten für das skalare Potenzial Φ, das Vektorpotenzial $\vec{A}$ und die Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$. In der skalaren Beugungstheorie wird hier repräsentativ die Ausbreitung nur einer Komponente der Vektoren bzw. das skalare Potenzial diskutiert.

8.3.1 Monochromatische Wellen

Monochromatische Wellen besitzen eine harmonische Zeitabhängigkeit $e^{i\omega t}$, aber im allgemeinen eine beliebige Ortsabhängigkeit $u\left\{\vec{r}\right\}$. Wir können schreiben

$$\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} = u\left\{\vec{r}\right\} \exp\{i\,\omega t\} \tag{8.220}$$

und meinen damit wie üblich den Realteil. Dieser Ansatz zur Lösung der Wellengleichung wird im übrigen auch in der Quantentheorie zur Lösung der Schrödingergleichung verwendet. Die Größe Ψ repräsentiert z. B. die y-Komponente der elektrischen Feldstärke $\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} = E_{\mathsf{y}}\left\{\vec{r}, t\right\}$. In quellenfreien, also ladungsdichtefreien und stromdichtefreien Bereichen lautet die Wellengleichung

$$\Delta\Psi\left\{\vec{r},t\right\} - \frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}^2\Psi\left\{\vec{r},t\right\}}{\mathrm{d}t^2} = 0 \quad . \tag{8.221}$$

Einsetzen von (8.220) liefert für monochromatische Wellen die **Helmholtzgleichung**

$$\Delta u\left\{\vec{r}\right\} + k^2 u\left\{\vec{r}\right\} = 0 \tag{8.222}$$

mit $k^2 = \omega^2/c^2$. Der ortsabhängige Teil monochromatischer Wellen hat demnach die Helmholtzgleichung (8.222) zu erfüllen.

Nicht-monochromatische Wellen lassen sich durch eine zeitliche Fourier Transformation als Überlagerung monochromatischer Wellen darstellen. Jede Frequenzkomponente, d. h. jede Spektralkomponente, hat dann eine Helmholtzgleichung der Form (8.222) zu erfüllen. Wir machen uns jetzt die Erkenntnis zunutze, dass die cosinusförmige Amplitudenverteilung in einer Ebene als Überlagerung zweier ebener Wellen gedeutet werden kann, die unterschiedliche Ausbreitungsrichtung haben. Bei beliebiger Form der Amplitudenverteilung müsste zunächst eine räumliche Fourierzerlegung nach cos-Funktionen erfolgen um dann die Amplituden der ebenen Wellen zu berechnen. Diese beiden Schritte werden im folgenden bei der Ermittlung des Raumfrequenzspektrums mit komplexer Fouriertransformation zusammengefasst.

8.3.2 Bestimmung des Raumfrequenzspektrums

Wir ordnen dem ortsabhängigen Feld $u\left\{x,y,z=0\right\} = u_0\left\{x_0,y_0\right\}$ in der Ebene $z=0$ durch die zweidimensionale ortsabhängige Fouriertransformation

$$\boxed{U_0\left\{\nu_{\mathrm{x}},\nu_{\mathrm{y}}\right\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0\left\{x_0,y_0\right\}\exp\{i2\pi(\nu_{\mathrm{x}}x_0+\nu_{\mathrm{y}}y_0)\}\ \mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}y_0 \qquad (8.223)}$$

mit **Raumfrequenz** ν_{x}, ν_{y} (Einheit $[\frac{1}{\mathrm{m}}]$) das **Raumfrequenzspektrum** $U_0\left\{\nu_{\mathrm{x}},\nu_{\mathrm{y}}\right\} = U\left\{\nu_{\mathrm{x}},\nu_{\mathrm{y}},z=0\right\}$ zu. Der Index "0" deutet an, dass hier die Größen an der Stelle $z=0$ gemeint sind. Die Fourier-Rücktransformation

$$u_0\left\{x,y\right\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_0\left\{\nu_{\mathsf{x}},\nu_{\mathsf{y}}\right\} \exp\{-i2\pi(\nu_{\mathsf{x}}x_0+\nu_{\mathsf{y}}y_0)\}\ \mathrm{d}\nu_{\mathsf{x}}\ \mathrm{d}\nu_{\mathsf{y}} \tag{8.224}$$

gestattet die eindeutige Berechnung des Feldes aus dem Raumfrequenzspektrum. Die Raumfrequenzen sind das Analogon zur üblichen Frequenz, die als Fouriertransformierte der Zeit aufgefasst werden kann. Der Ausdruck Frequenz steht also im strengeren Sinne für das Wort Zeitfrequenz und entsprechend steht das Wort Frequenzspektrum genaugenommen für Zeitfrequenzspektrum. Jeder der drei Raumrichtungen wird eine Raumfrequenz zugeordnet. Man kann aber auch statt der kartesischen Größen x, y und z zum Beispiel auch den Radius ρ in Zylinder- oder r in Kugelkoordinaten wählen und erhält entsprechende Raumfrequenzen. Für das Raumfrequenzspektrum einer ortsabhängigen Größe gilt das gleiche wie für das (Zeit)Frequenzspektrum einer zeitabhängigen Variablen: Je schneller sich die Größe mit der Zeit bzw. dem Ort ändert, desto höher sind die darin enthaltenen Zeit- bzw. Raumfrequenzen. Dies kann unmittelbar verstanden werden, da ja die Spektren mit demselben Formalismus berechnet werden. Der wesentliche Unterschied zwischen den Spektren ist, dass das Zeitfrequenzspektrum eindimensional ist (nur von f abhängt), während das Raumfrequenzspektrum bis zu dreidimensional sein kann (wir betrachten im weiteren aber nur zweidimensionale Raumfrequenzspektren).

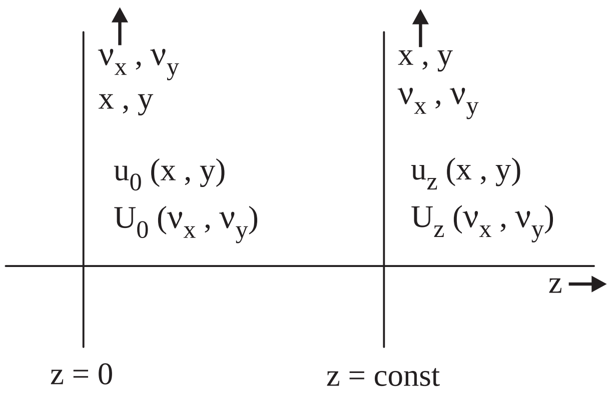
8.3.3 Ausbreitung des Raumfrequenzspektrums

Eine entsprechende Entwicklung wie für die Ebene $z = 0$ können wir für jede beliebige Ebene $z = \mathsf{const}$ durchführen. Wir schreiben gemäß (8.224)

$$u_{\mathsf{z}}\left\{x,y\right\} = u\left\{x,y,z\right\} = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} U_{\mathsf{z}}\left\{\nu_{\mathsf{x}},\nu_{\mathsf{y}}\right\} \exp\{-2\pi i(\nu_{\mathsf{x}}x+\nu_{\mathsf{y}}y)\}\ \mathrm{d}\nu_{\mathsf{x}}\ \mathrm{d}\nu_{\mathsf{y}} \quad , \tag{8.225}$$

wobei $U_{\mathsf{z}}\left\{\nu_{\mathsf{x}},\nu_{\mathsf{y}}\right\} = U\left\{\nu_{\mathsf{x}},\nu_{\mathsf{y}},z\right\}$ das Raumfrequenzspektrum in der Ebene $z = const$ bezeichnet. Zur Illustration dienen Abbildung 8.18 und Abbildung 8.19.

Abbildung 8.18: Feldverteilungen und Raumfrequenzspektren in den Ebenen $z = 0$ und $z = const$



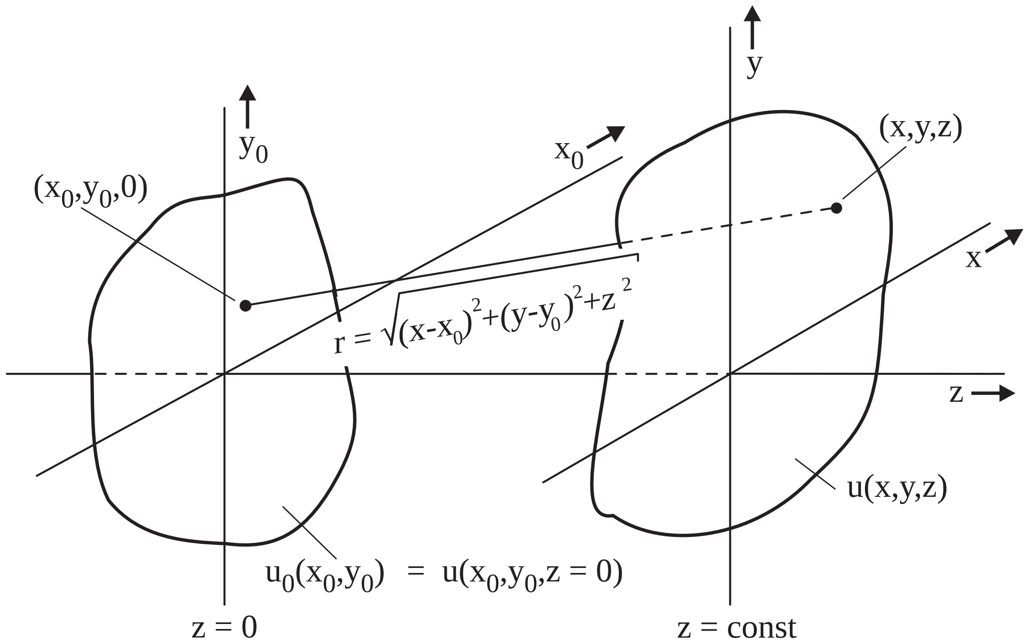


Abbildung 8.19: Geometrie zur Beugung

Das Feld $u\{x, y, z\}$ muss die Helmholtzgleichung (8.222) erfüllen. Benutzung von (8.225) zur Berechnung der partiellen Ableitungen $\partial^2/\partial x^2$ und $\partial^2/\partial y^2$ führt auf eine gewöhnliche Differentialgleichung für das Raumfrequenzspektrum

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2} U\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}, z\} + (k^2 - 4\pi^2\nu_\mathsf{x}^2 - 4\pi^2\nu_\mathsf{y}^2) U\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}, z\} = 0 \quad . \tag{8.226}$$

In dieser Differentialgleichung sind ν_x und ν_y als feste Parameter anzusehen. Die allgemeine Lösung von (8.226) ist

$$U_\mathsf{z}\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}\} = U\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}, z\} = U_0\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}\} \exp\{-ik_\mathsf{z} z\} + \overline{U}_0\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}\} \exp\{ik_\mathsf{z} z\} \tag{8.227}$$

mit

$$k_\mathsf{z} = k^2 - k_\mathsf{x}^2 - k_\mathsf{y}^2 = k^2 - (2\pi\nu_\mathsf{x})^2 - (2\pi\nu_\mathsf{y})^2 \tag{8.228}$$

und $k_\mathsf{z} = \beta$, wobei der

Phasenkoeffizient

$$\beta = \sqrt{k^2 - (2\pi\nu_\mathsf{x})^2 - (2\pi\nu_\mathsf{y})^2} \tag{8.229}$$

auftritt. Der erste Term beschreibt eine Welle, die sich in positive z-Richtung ausbreitet, der zweite eine in negative z-Richtung laufende Welle. Legt man die **Strahlungsbedingung** zugrunde, dass durch die experimentelle Situation vorgegeben nur in positive z-Richtung laufende Wellen vorkommen sollen, dann muss man $\overline{U}_0 = 0$ verlangen. Damit ergibt sich ein äußerst einfacher Zusammenhang für die Raumfrequenzspektren in zwei zueinander parallelen Ebenen

$$U_\mathsf{z}\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}\} = U_0\{\nu_\mathsf{x}, \nu_\mathsf{y}\} \exp\{-ik_\mathsf{z} z\} \quad . \tag{8.230}$$

Dieses Resultat zeigt, dass für Raumfrequenzen mit

$$4\pi^2\nu_{\mathsf{x}}^2 + 4\pi^2\nu_{\mathsf{y}}^2 < k^2 \tag{8.231}$$

der Effekt der Ausbreitung über die Strecke z einfach in einer Phasendrehung der Komponenten des Raumfrequenzspektrums besteht. Da die ebenen Wellenkomponenten verschiedene Ausbreitungsrichtungen besitzen, werden die unterschiedlichen Phasenverzögerungen verständlich.

Für Raumfrequenzen mit

$$4\pi^2\nu_{\mathsf{x}}^2 + 4\pi^2\nu_{\mathsf{y}}^2 > k^2 \tag{8.232}$$

ist eine andere Interpretation erforderlich. Jetzt wird die Quadratwurzel in (8.230) imaginär und das Raumfrequenzspektrum klingt in z-Richtung ab

$$U\left\{\nu_{\mathsf{x}}, \nu_{\mathsf{y}}, z\right\} = U\left\{\nu_{\mathsf{x}}, \nu_{\mathsf{y}}, z = 0\right\} \exp\{-\frac{\alpha}{2} z\} \tag{8.233}$$

mit positivem

Intensitäts-Dämpfungskoeffizienten

$$\frac{\alpha}{2} = i k_{\mathsf{z}} = \sqrt{4\pi^2\nu_{\mathsf{x}}^2 + 4\pi^2\nu_{\mathsf{y}}^2 - k^2} \quad . \tag{8.234}$$

Diese Raumfrequenzkomponenten werden bei ihrer Ausbreitung stark gedämpft. Man bezeichnet Wellenkomponenten, die (8.232) erfüllen, als **evaneszente Wellen**. Das gesamte Raumfrequenzspektrum setzt sich offenbar aus ausbreitungsfähigen und evaneszenten Komponenten zusammen. Der Faktor $\frac{1}{2}$ in (8.233) verschwindet, wenn man die Leistungsübertragung betrachtet. Es resultiert, dass die Leistung mit $\exp\{-\alpha z\}$ abklingt, α ist also ein Leistungs-Dämpfungsfaktor. Zusammengefasst gilt also für die Wellenzahl in z-Richtung

$$k_{\mathsf{z}} = \begin{cases} \beta & \text{für} \quad k_{\mathsf{z}}^2 \geq 0 \\ -i\frac{\alpha}{2} & \text{für} \quad k_{\mathsf{z}}^2 < 0 \end{cases} \tag{8.235}$$

mit k_{z} aus (8.228) sowie β und $\frac{\alpha}{2}$ aus (8.229) und (8.183).

8.3.4 Exakte Form des Beugungsintegrals und Fresnel-Näherung

Bei vorausgesetzter Strahlung in positive z-Richtung ist (8.230) ein exaktes Resultat. Fourier-Rücktransformation von (8.230) ergibt

$$u\{x,y,z\} = \iint_{-\infty}^{\infty} U_0\{\nu_x,\nu_y\} \exp\{-ik_z z\} \exp\{-2\pi i(\nu_x x + \nu_y y)\}\ \mathrm{d}\nu_x\ \mathrm{d}\nu_y \quad . \tag{8.236}$$

Drückt man nun noch $U_0\{\nu_x,\nu_y\}$ vermöge (8.223) durch das Feld $u\{x,y,z=0\} = u_0$ aus, so hat man nach Vertauschung der Integrationsreihenfolge das

Beugungsintegral

$$u\{x,y,z\} = \iint_{-\infty}^{\infty} u_0 \left[\iint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-i\,z\sqrt{k^2-(2\pi\nu_x)^2-(2\pi\nu_y)^2}\right\} \right. \tag{8.237}$$
$$\left. \exp\{-i2\pi[\nu_x(x-x_0)+\nu_y(y-y_0)]\}\ \mathrm{d}\nu_x\ \mathrm{d}\nu_y \right]\ \mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}y_0 \quad .$$

Dieses exakte Beugungsintegral ist ein Faltungsintegral. Die innere Fourier-Transformation lässt sich näherungsweise berechnen, wenn $U_0\{\nu_x,\nu_y\}$ nur Raumfrequenzen mit der

Fresnel-Näherung

$$(2\pi\nu_x)^2 + (2\pi\nu_y)^2 \ll k^2 \tag{8.238}$$

enthält. Es handelt sich also um **paraxiale Strahlen** (=Strahlen, die sich nahezu parallel zur z-Achse ausbreiten) mit $k_z \approx k$. In diesem Fall können wir approximieren

$$k_{\mathsf{z}} = \sqrt{k^2 - 4\pi^2\nu_{\mathsf{x}}^2 - 4\pi^2\nu_{\mathsf{y}}^2} \approx k\left(1 - \frac{2\pi^2\nu_{\mathsf{x}}^2}{k^2} - \frac{2\pi^2\nu_{\mathsf{y}}^2}{k^2}\right)$$
$$= k - \frac{2\pi}{k}\pi\left(\nu_{\mathsf{x}}^2 + \nu_{\mathsf{y}}^2\right) \tag{8.239}$$

und erhalten für die innere Fourier-Transformation in (8.237)

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_{\mathsf{z}}z} \exp\left\{\pi\frac{2\pi i}{k}\left(\nu_{\mathsf{x}}^2 + \nu_{\mathsf{y}}^2\right)z\right\} \exp\left\{-i2\pi\left(\nu_{\mathsf{x}}(x - x_0) + \nu_{\mathsf{y}}(y - y_0)\right)\right\}\ \mathrm{d}\nu_{\mathsf{x}}\ \mathrm{d}\nu_{\mathsf{x}}$$
$$= \frac{-k}{i2\pi z}\mathrm{e}^{-ikz} \exp\left\{-i\frac{k}{2z}\left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right)\right\} \quad , \tag{8.240}$$

wobei nur die Fourier-Transformierte einer Gauß-Kurve [2] zu berechnen war.

Mit (8.240) erhalten wir aus (8.237) mit der Wellenlänge $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ die

Fresnel-Näherung des Beugungsintegrals

$$u\left\{x, y, z\right\} = \frac{-1}{i\lambda z}e^{-ikz} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0 \exp\left\{-i\left(\frac{\pi}{\lambda z}(x - x_0)^2 + \frac{\pi}{\lambda z}(y - y_0)^2\right)\right\}\ \mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}y_0\,. \tag{8.241}$$

Sie lässt sich weiter umschreiben zu

$$u\left\{x, y, z\right\} = \frac{-1}{i\lambda z}\mathrm{e}^{-ikz}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u_0\ \exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x_0^2 + y_0^2)\right\} \cdot$$
$$\cdot\ \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right\}\ \mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}y_0 \quad . \tag{8.242}$$

[2]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\{-\pi f^2\}\exp\{\pm i2\pi f t\}\,\mathrm{d}f = \exp\{-\pi t^2\}$$

Die Verteilung $u\left\{x,y,z\right\}$ des Feldes erhält man demnach abgesehen von einem Phasenfaktor und einem konstanten Vorfaktor $\frac{-1}{i\lambda z}$ durch Fourier-Transformation der Verteilung $u_0 \exp\{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x_0^2+y_0^2)\}$ nach den Raumfrequenzen $\frac{x}{\lambda z}$ und $\frac{y}{\lambda z}$.

Huygens-Formalismus

Beim **Huygensschen Prinzip** werden Orte mit

$$z^2 \gg (x-x_0)^2 \,+\, (y-y_0)^2 \tag{8.243}$$

betrachtet, das heißt, es handelt sich um achsnahe Orte. Dies ist die sogenannte **Huygensnäherung**. Nach Abbildung 8.19 gehen von jedem Quellpunkt x_0, y_0 in der Ebene $z=0$ Kugelwellen

$$\frac{\mathrm{e}^{-ikr}}{r} \approx \frac{\mathrm{e}^{-ik\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z^2}}}{z} \approx \frac{\mathrm{e}^{-ikz}}{z}\exp\left\{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x-x_0)^2 - i\frac{\pi}{\lambda z}(y-y_0)^2\right\} \tag{8.244}$$

mit der differentiellen Amplitude $u\left\{x_0,y_0,z=0\right\}\,\mathrm{d}x_0\,\mathrm{d}y_0$ aus, die sich in der z-Ebene mit Koordinaten x, y additiv überlagern. Dies ist das Huygenssche Prinzip in der Fresnel-Näherung. Zusätzlich tritt noch ein Faktor $\frac{-1}{i\lambda}$ auf, der in der ursprünglichen Huygensschen Formulierung nicht vorgesehen war, der aber nach der Ableitung aus der Wellengleichung zwingend erforderlich ist. Das nahezu identische Ergebnis deutet darauf hin, dass die Feldverteilung in der Nähe der Achse (fast) nur durch paraxiale Strahlen erzeugt wird, oder anders gesagt: die Feldverteilung in einem Punkt wird nur durch die Wellen beeinflusst, die von der Quelle auf den Punkt zulaufen. Als zweites gewinnt man die Erkenntnis, dass die Huygens- und die Fresnelnäherung äquivalent sind.

8.3.5 Beugung in Fraunhofernäherung

Die Berechnung des Beugungsintegrals kann unter einschränkenden Bedingungen weiter vereinfacht werden. Für Abstände

$$z \gg \frac{\pi}{\lambda}(x_0^2 + y_0^2) \quad , \tag{8.245}$$

das heißt, die Ausdehnung der Quelle ist klein gegen den betrachteten Abstand der Aufpunkte von der Quelle, kann man den Phasenfaktor im Integral in (8.242) gleich Eins setzen und erhält die

Fraunhofer- oder Fernfeldnäherung

$$u\{x,y,z\} = \frac{-1}{i\lambda z} \mathrm{e}^{ikz} \mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)} \iint_{-\infty}^{\infty} u_0 \exp\left\{ i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0) \right\} \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{d}y_0 \quad . \tag{8.246}$$

Bis auf einen unwesentlichen Vorfaktor ist das Fernfeld die Fourier-Transformierte der Nahfeldverteilung nach den Raumfrequenzen $\frac{x}{\lambda z}$ und $\frac{y}{\lambda z}$. Für paraxiale Strahlen ist die zeitgemittelte Energieflussdichte S_z in z-Richtung proportional zu $|u\{x,y,z\}|^2$, also

$$S \propto |u\{x,y,z\}|^2 \quad , \tag{8.247}$$

so dass der Phasenvorfaktor vor dem Integral in (8.246) für Energiebetrachtungen keine Rolle spielt.

Beispiel 8.3.1: Beugung an einer Kreisscheibe

Als Beispiel betrachten wir die Fernfeldbeugung an einer Kreisscheibe, die wie in Abbildung 8.20 dargestellt, mit einer in z-Richtung laufenden ebenen Welle beleuchtet werden möge. Unmittelbar hinter der Lochscheibe mit Radius $\hat{r}_0$ in der Ebene $z = 0$ kann man für das Feld ansetzen

$$u_0 = u(x_0, y_0, z = 0) = \begin{cases} \hat{u} & \textit{für } x_0^2 + y_0^2 \leq \hat{r}_0^2 \\ 0 & \textit{sonst} \end{cases} \tag{8.248}$$

Hierbei wird angenommen, dass die einfallende Welle den Bereich des Loches ungehindert passiert und außerhalb des Loches durch die Blende vollkommen absorbiert wird.

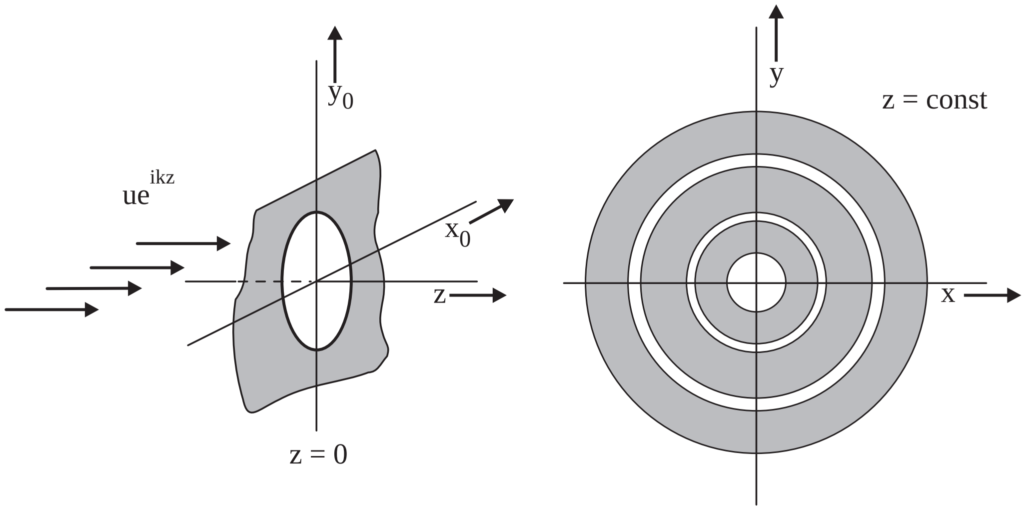


Abbildung 8.20: Beugung an einer kreisrunden Lochscheibe und resultierende Intensitätsverteilung

Fourier-Transformation $(\mathcal{F}\{x\})$ *ergibt mit* $x_0 = r_0 \cos\{\varphi_0\}$, $y_0 = r_0 \sin\{\varphi_0\}$, $x = r\cos\{\varphi\}$, $y = r\sin\{\varphi\}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{u_0\} &= \iint\limits_{-\infty}^{\infty} u\{x_0, y_0, z=0\} \exp\left\{i\frac{2\pi}{\lambda z}(xx_0 + yy_0)\right\} \mathrm{d}x_0\ \mathrm{d}y_0 \\
&= \int\limits_0^{\hat{r}_0} \int\limits_0^{2\pi} \hat{u} \exp\left\{i2\pi\frac{r_0}{\lambda z}(x\cos\{\varphi_0\} + y\sin\{\varphi_0\})\right\} r_0\ \mathrm{d}\varphi_0\ \mathrm{d}r_0 \\
&= \hat{u} \int\limits_0^{\hat{r}_0} \int\limits_0^{2\pi} r_0 \exp\left\{i2\pi\frac{r_0 r}{\lambda z}(\cos\{\varphi\}\cos\{\varphi_0\} + \sin\{\varphi\}\sin\{\varphi_0\})\right\}\ \mathrm{d}\varphi_0\ \mathrm{d}r_0 \qquad (8.249) \\
&= 2\pi\hat{u} \int\limits_0^{\hat{r}_0} r_0 \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \exp\left\{i\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z}\cos\{\varphi_0 - \varphi\}\right\} \mathrm{d}\varphi_0\right]\ \mathrm{d}r_0 \\
&= 2\pi\hat{u} \int\limits_0^{\hat{r}_0} r_0 J_0\left\{\frac{2\pi r_0 r}{\lambda z}\right\}\ \mathrm{d}r_0 \quad ,
\end{aligned}$$

wobei bei der letzten Gleichheit die Besselfunktion J_0 *eingeführt wurde. Für die weitere Auswertung benutzen wir die Identität*

$$\int_0^x \xi J_0\{\xi\}\,\mathrm{d}\xi = xJ_1\{x\} \tag{8.250}$$

und erhalten

$$\mathcal{F}\{u_0\} = 2\pi\hat{r}_0^2\hat{u}\frac{J_1\left\{\frac{2\pi r\hat{r}_0}{\lambda z}\right\}}{\frac{2\pi r\hat{r}_0}{\lambda z}} \quad . \tag{8.251}$$

Nach (8.246) ist damit das Fernfeld

$$u\{r,\varphi,z\} = \frac{-2\pi\hat{r}_0^2\hat{u}}{i\lambda z}\mathrm{e}^{-ikz}\mathrm{e}^{-i\frac{\pi r^2}{\lambda z}}\frac{J_1\left\{\frac{2\pi r\hat{r}_0}{\lambda z}\right\}}{\frac{2\pi r\hat{r}_0}{\lambda z}} \quad . \tag{8.252}$$

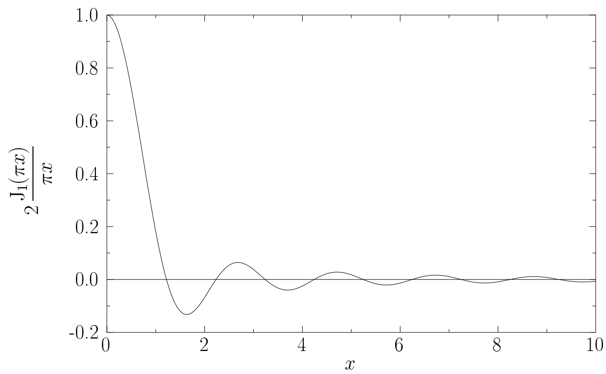


Abbildung 8.21: Verlauf der Funktion $2\frac{J_1\{\pi x\}}{\pi x}$. Der Intensitätsverlauf im Beugungsscheibchen eines kreisrunden Loches ist proportional zum Quadrat dieser Funktion.

Die Fernfeldverteilung ist also maßgeblich durch den Faktor $J_1\{x\}/x$, also Besselfunktion J_1 geteilt durch ihr Argument, bestimmt. Für die Energieflussdichte ergibt sich die Proportionalität

$$S \propto |u\{x,y,z\}|^2 = \left(\frac{2\pi\hat{r}_0^2\hat{u}}{\lambda z}\right)^2\left(\frac{J_1\left\{\frac{2\pi r\hat{r}_0}{\lambda z}\right\}}{\frac{2\pi r\hat{r}_0}{\lambda z}}\right)^2 \quad . \tag{8.253}$$

Diesen Intensitätsverlauf im Beugungsscheibchen bezeichnet man als **Airy-Profil**. *Die erste Nullstelle im Beugungsbild findet man beim Radius*

$$r = \frac{x_{11}}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{2}\cdot\frac{z}{\hat{r}_0} = 1.22\frac{\lambda z}{2\hat{r}_0} \tag{8.254}$$

im Fernfeld Beugungsbild. Dabei ist x_{11} die in (5.117) definierte erste Nullstelle der Besselfunktion erster Ordnung. Der Intensitätsverlauf der Beugung an einer kreisrunden Apertur *ist die Airy-Funktion* $\left[2\frac{J_1\{\pi x\}}{\pi x}\right]^2$*. Die Wurzel der Airyfunktion ist in Abbildung 8.21 dargestellt.*

8.3.6 Allgemeine Formulierung der skalaren Beugungstheorie

Die Beugungstheorie kann auf den allgemeinen Fall zurückgeführt werden, dass das Feld an einem beliebigen Raumpunkt eindeutig ist, wenn auf der umgebenen Fläche an jedem Punkt sowohl das Feld als auch die Normalenableitung bekannt sind. Zur Berechnung lässt sich das Greensche Theorem

$$\iiint\limits_{\mathsf{V}} G\vec{\nabla}^2 u - u\vec{\nabla}^2 G \;\mathrm{d}^3 r = \oiint\limits_{S_{\mathsf{V}}} (G\vec{\nabla} u - u\vec{\nabla} G) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{8.255}$$

vorteilhaft verwenden. Wenn man sowohl G als auch u als komplexe Funktionen des Ortes auffasst deren erste und zweite partielle Ableitungen existieren müssen, liegt es nahe, den Größen auf der rechten Seite die Bedeutung einer Greenschen Funktion G und eines Feldes u zuzuordnen. Sowohl für G als auch für u gelten außerhalb des betrachteten Punktes die Helmholtzgleichungen

$$\begin{aligned} \vec{\nabla}^2 G + k^2 G &= 0 \\ \vec{\nabla}^2 u + k^2 u &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{8.256}$$

Wir konstruieren ein Volumen V′, dass den Aufpunkt nicht enthält, indem wir eine Kugel mit Radius ε zentrisch um den Aufpunkt legen, wie in Bild 8.22 dargestellt ist. Für dieses neue Volumen V′ resultiert dann sofort auf der linken Seite von (8.255) nach Einsetzen von (8.256)

$$\iiint\limits_{V'} G\vec{\nabla}^2 u - u\vec{\nabla}^2 G \;\mathrm{d}^3 r = -\iiint (Gk^2 u - uk^2 G) \;\mathrm{d}^3 r \equiv 0 \tag{8.257}$$

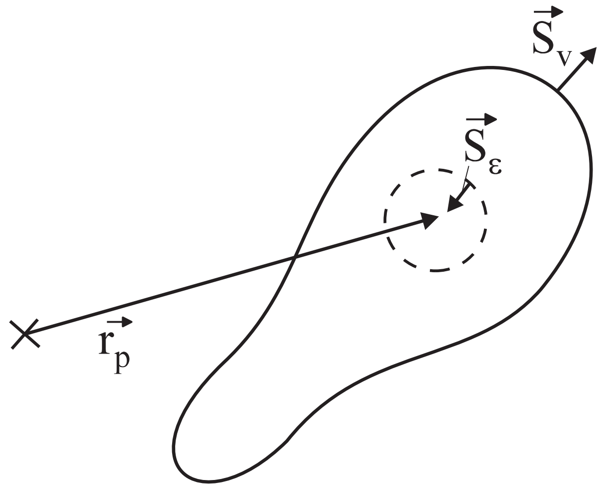


Abbildung 8.22: Konstruktion eines Volumens, das den Punkt P nicht enthält durch umschließen des Punktes mit einer Kugel vom Radius ε.

und somit

$$\oint\!\!\oint_{S_{V'}} (G\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}G) \circ \, \mathrm{d}^2\vec{r} = 0 \quad . \tag{8.258}$$

Die neue Oberfläche $S_{V'}$ ist nur die Summe aus S_V und S_ε ($S_{V'} = S_V + S_\varepsilon$) die jede für sich geschlossen sind. Die Orientierung ist für S_V weg vom Aufpunkt und für S_ε zum Mittelpunkt der Kugel.
Aus (8.258) folgt damit

$$\oint\!\!\oint_{S_V} (G\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}G) \circ \, \mathrm{d}^2\vec{r} = - \oint\!\!\oint_{S_\varepsilon} (G\vec{\nabla}u - u\vec{\nabla}G) \circ \, \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{8.259}$$

wobei zu bemerken ist, dass der Aufpunkt in der linken Fläche ja enthalten ist.
Die Greensche Funktion des freien Raums ist eine Kugelwellenfunktion

$$G\{\vec{r}_p, \vec{r}_q\} = \frac{\exp\{-ik|\vec{r}_p - \vec{r}_q|\}}{4\pi|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} \tag{8.260}$$

mit dem Gradienten

$$\vec{\nabla}_q G = \left(-ik - \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}_q|}\right) \cdot \frac{\exp\{-ik|\vec{r}_p - \vec{r}_q|\}}{4\pi|\vec{r}_p - \vec{r}_q|} \, \vec{\nabla}_q |\vec{r}_p - \vec{r}_q| \tag{8.261}$$

und dem Richtungsfaktor

$$\vec{\nabla}_\mathsf{q}|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}| = -\frac{\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \tag{8.262}$$

Für das Integral auf der rechten Seite von (8.259) liegen alle Aufpunkte $\vec{r}_\mathsf{p}$ auf der Kugeloberfläche, so dass $|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}| = \varepsilon$, $\vec{\nabla}_\mathsf{q}|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}| = -\vec{n}_\varepsilon$, und $\mathrm{d}^2\vec{r} = \mathrm{d}^2 r \cdot \vec{n}_\varepsilon$. Hier zeigt $\vec{n}_\varepsilon$ zum Kugelmittelpunkt. Für genügend kleine Radien ε sind u und $\vec{\nabla}u$ konstant, so dass die Integration über die Kugeloberfläche

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \oiint\limits_{S_\varepsilon} (G\vec{\nabla}_\mathsf{q}u - u\vec{\nabla}_\mathsf{q}G) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \lim_{\varepsilon\to 0} \oiint\limits_{S_\varepsilon} \left[\vec{\nabla}_\mathsf{q}u \circ \vec{n}_\varepsilon + u\left(-ik - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \cdot \frac{\exp\{-ik\varepsilon\}}{4\pi\varepsilon}\ \mathrm{d}^2 r \tag{8.263}$$

zur Multiplikation mit der Oberfläche der Kugel $S_\varepsilon = 4\pi\varepsilon^2$ wird

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \oiint\limits_{S_\varepsilon} (G\vec{\nabla}_\mathsf{q}u - u\vec{\nabla}_\mathsf{q}G) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} &= \lim_{\varepsilon\to 0} 4\pi\varepsilon^2 \left[\vec{\nabla}_\mathsf{q}u \circ \vec{n}_\varepsilon + u\left(-ik - \frac{1}{\varepsilon}\right)\right] \cdot \frac{\exp\{-ik\varepsilon\}}{4\pi\varepsilon} \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0} -u\{\vec{r}_\mathsf{q}\} = -u\{\vec{r}_\mathsf{p}\}\end{aligned} \tag{8.264}$$

Einsetzen in (8.259) ergibt

$$u\{\vec{r}_\mathsf{p}\} = \oiint\limits_{S_\mathsf{V}} \Big(G\{\vec{r}_\mathsf{p}, \vec{r}_\mathsf{q}\}\vec{\nabla}_\mathsf{q}u\{\vec{r}_\mathsf{q}\} - u\{\vec{r}_\mathsf{q}\}\vec{\nabla}_\mathsf{q}G\{\vec{r}_\mathsf{p}, \vec{r}_\mathsf{q}\}\Big) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{8.265}$$

Tatsächlich soll das Potenzial u bzw. dessen Gradient $\vec{\nabla}u$ ja nur auf einer kleinen Fläche σ auf $\vec{S}_\mathsf{V}$ existieren. Dies kann man sich so vorstellen, dass das Feld durch einen Ausschnitt in einer unendlich ausgedehnten Platte einfällt. Im geometrischen Schatten der Platte soll das Feld verschwinden $\vec{r}_\mathsf{q} \in \{S_\mathsf{V} - \sigma\}: \quad u = 0, \quad \vec{\nabla}u = 0$ und in der Öffnung genau so sein, wie es ohne Platte wäre. Dies sind die sogenannten Kirchhoffschen Randbedingungen. Leider haben sie den Schönheitsfehler, dass die Forderung nach dem simultanen Verschwinden von u als auch $\vec{\nabla}u$ auf $S_\mathsf{V} - \sigma$ zur Folge hat, dass überhaupt kein Feld auf S_V existieren kann. Dies folgt aus der allgemeinen Potenzialtheorie, die besagt, dass bei gleichzeitigem Verschwinden des Potenzials und dessen Ableitung auf einem endlichen Flächenstück, das Potenzial auf der gesamten Fläche und in dem darin eingeschlossenem Raum verschwindet. Abhilfe schafft hier die Spiegelungsmethode. Wir konstruieren uns einen zweiten Aufpunkt wie in Abbildung 8.23 gezeigt. Wegen der Reziprozität der Greenschen Funktionen können wir Quelle und Aufpunkt in Gedanken vertauschen (tausche $\vec{r}_\mathsf{p}$ und $\vec{r}_\mathsf{q}$ in den Gleichungen). Wenn wir erreichen, dass die Greensche Funktion hinter dem Schirm verschwindet, brauchen wir keine Forderung an $\vec{\nabla}u$ zu stellen, da dann in (8.265) der erste Term im Integral verschwindet.

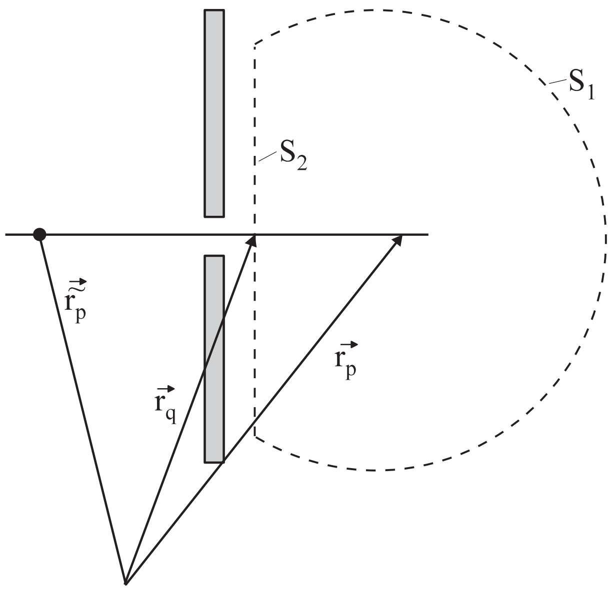


Abbildung 8.23: Vertauschen von Aufpunkt und Quellpunkt und Einfügen eines virtuellen Quellpunktes bei $\vec{\vec{r}}_\mathsf{p}$ mit Hilfe der Spiegelungsmethode. Durch den virtuellen Quellpunkt wird der Einfluss der Blende erfasst und die Greensche Funktion kann allgemein formuliert werden, ohne dass Randbedingungen verletzt werden. Nach errechnen der Greenschen Funktion werden Quell- und Aufpunkt wieder zurückgetauscht (tausche $\vec{r}_\mathsf{q}$ mit $\vec{r}_\mathsf{p}$).

Die Greensche Funktion

$$G^{\pm} = \frac{\exp\{-ik|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|\}}{4\pi|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \pm \frac{\exp\{-ik|\vec{\vec{r}}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|\}}{4\pi|\vec{\vec{r}}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \tag{8.266}$$

erfüllt genau dann diese Forderung, wenn das Minuszeichen verwendet wird, und es ändert

sich nichts an den vorherigen Überlegungen. Das Oberflächenelement auf σ ist $\mathrm{d}^2\vec{r} = \mathrm{d}^2 r\vec{n}_\sigma$ und $|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}| = |\tilde{\vec{r}}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|$ auf σ.
Für den Gradienten von $G = G^-$ resultiert damit

$$\vec{\nabla}_\mathsf{q} G = -\left(-ik - \frac{1}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|}\right) \frac{\exp\{-ik|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|\}}{4\pi|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \cdot \frac{(\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}) - (\tilde{\vec{r}}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q})}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \quad . \tag{8.267}$$

Einsetzen in (8.265) ergibt mit der Aufteilung von S_V in $S_\mathsf{V} = S_1 + S_2$, wobei zu berücksichtigen ist, dass nur auf den Ausschnitt σ in S_2 das Feld als bekannt vorausgesetzt wird und ansonsten für $\vec{r}_\mathsf{q} \in S_1 : \quad u\{\vec{r}_\mathsf{q}\} \equiv 0$ gelten soll,

$$\begin{aligned} u\{\vec{r}_\mathsf{p}\} = {} & 2\iint\limits_{\sigma} u\{\vec{r}_\mathsf{q}\} \cdot \left(-ik - \frac{1}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|}\right) \frac{\exp\{-ik|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|\}}{4\pi|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \cdot \frac{(\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}) \circ \vec{n}_\sigma}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \ \mathrm{d}^2 r \\ & + \iint\limits_{S_1} (G\vec{\nabla}_\mathsf{q} u - u\vec{\nabla}_\mathsf{q} G) \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \end{aligned} \tag{8.268}$$

Es bleibt hier noch das Integral über S_1 zu lösen. Nehmen wir an, dass es sich dabei um eine Kugeloberfläche mit sehr großem Radius r_1 handelt, die um den Aufpunkt $\vec{r}_\mathsf{p}$ zentriert ist. In diesem Fall wird $\vec{r}_\mathsf{q} - \vec{r}_\mathsf{p} = \vec{r}_1$ und $\vec{r}_1$ ist parallel zu $\mathrm{d}^2\vec{r}$. Ist $r_1 = |\vec{r}_1|$ zugleich noch groß gegen $|\vec{r}_\mathsf{p} - \tilde{\vec{r}}_\mathsf{p}|$, gilt

$$\lim_{|\vec{r}_1|\to\infty} \tilde{\vec{r}}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q} = \vec{r}_1 \tag{8.269}$$

so dass

$$\lim_{|\vec{r}_1|\to\infty} \vec{\nabla}_\mathsf{q} G = \lim_{|\vec{r}_1|\to\infty} \left(-ik - \frac{1}{r_1}\right) \cdot G \cdot \frac{\vec{r}_1}{r_1} \tag{8.270}$$

und damit

$$\lim_{|\vec{r}_1|\to\infty} \iint\limits_{S_1} (G\vec{\nabla} u - u\vec{\nabla} G) \circ \mathrm{d}^2\vec{S} = \lim_{r_1\to\infty} \iint\limits_{S_1} G\left(\vec{\nabla} u + iku\frac{\vec{r}_1}{r_1}\right) \circ \mathrm{d}^2\vec{r}$$

$$= \lim_{r_1\to\infty} \iint\limits_{S_1} r_1 \cdot G \left(\vec{\nabla} u \circ \frac{\vec{r}_1}{r_1} + iku \right) r_1 \, \mathrm{d}^2 r \tag{8.271}$$

wobei

$$\lim_{r_1\to\infty} r_1 \cdot G = \exp\{-ikr_1\} \tag{8.272}$$

wird. Wir wollen im weiteren annehmen, dass die Sommerfeldsche Strahlungsbedingung

$$\lim_{r_1\to\infty} \left(\vec{\nabla} u \circ \frac{\vec{r}_1}{r_1} + iku \right) \cdot r_1 \quad \to \quad 0 \tag{8.273}$$

für alle Punkte auf S_1 erfüllt ist. Dies gilt zumindestens für eine Kugelwelle und wir können uns nach dem Huygensschen Prinzip vorstellen, dass sich die Feldverteilung u als Linearkombination von Kugelwellen auffassen lässt. Unter diesen Voraussetzungen resultiert

$$\boxed{u\{\vec{r}_\mathsf{p}\} = \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\sigma} u\{\vec{r}_\mathsf{q}\} \cdot \left(-ik - \frac{1}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \right) \cdot \frac{\exp\{-ik|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|\}}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \cdot \frac{(\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}) \circ \vec{n}_\sigma}{|\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|} \, \mathrm{d}^2 r} \tag{8.274}$$

Für große Abstände $R = |\vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}|$ zwischen Aufpunkt und Quellpunkt ergibt sich die bekannte Näherung

$$u\{\vec{r}_\mathsf{p}\} = \frac{-1}{i\lambda} \iint\limits_{\sigma} u\{\vec{r}_\mathsf{q}\} \cdot \frac{\exp\{-ikR\}}{R} \cdot \frac{\vec{R} \circ \vec{n}}{R} \, \mathrm{d}^2 r \tag{8.275}$$

wobei $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\vec{n} = -\vec{n}_\sigma$ und $\vec{R} = \vec{r}_\mathsf{p} - \vec{r}_\mathsf{q}$ eingesetzt wurde. Das Oberflächenelement $\vec{n} \cdot \mathrm{d}^2 r$ ist in dieser Schreibweise zum Aufpunkt gerichtet, so dass das Skalarprodukt $\vec{R} \circ \vec{n}$ positive Werte ergibt. Häufig wird (8.275) auch in der Form

$$u\{\vec{r}_{\mathsf{p}}\} = \iint\limits_{\sigma} h\{\vec{r}_{\mathsf{p}}, \vec{r}_{\mathsf{q}}\} \cdot u\{\vec{r}_{\mathsf{q}}\} \, \mathrm{d}^2 r \tag{8.276}$$

geschrieben. Aus dem Vergleich resultiert für h

$$h\{\vec{r}_{\mathsf{p}}, \vec{r}_{\mathsf{q}}\} = \frac{\exp\{-ikR\}}{-i\lambda R} \cdot \frac{\vec{R} \circ \vec{n}}{R} \quad . \tag{8.277}$$

8.4 Paraxiale Näherung der Wellengleichung

Wir gehen von der Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0 \tag{8.278}$$

für harmonisch zeitabhängige Felder aus und bemerken, dass die Wellengleichung für jede Komponente von $\vec{E}$ gleichermaßen gilt, als auch für die Amplitude $|\vec{E}| = E$. Dies führt auf die skalare Wellengleichung

$$\Delta E + k^2 E = 0 \quad . \tag{8.279}$$

Nehmen wir an, dass sich die Welle vorwiegend in $z-$Richtung ausbreitet, können wir den Ansatz mit einer Bloch-Welle

$$E = u\{x, y, z\} \cdot \exp\{-ik(z - z_0)\} \tag{8.280}$$

wählen. Einsetzen in (8.279) ergibt für die Amplitude u die Gleichung

$$\Delta u - i2k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} u = 0 \quad . \tag{8.281}$$

Ein Lichtstrahl weitet sich im Laufe der Zeit nur allmählich auf. Dies bedeutet, dass die zweite Ableitung nach z in (8.281) gegen die anderen Terme vernachlässigt werden kann, also

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}u \ll \left\{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u,\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}u,\ 2k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u\right\} \quad . \tag{8.282}$$

Mit (8.282) kann (8.281) in der sogenannten paraxialen Näherung

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}u + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}u - i2k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u = 0 \tag{8.283}$$

geschrieben werden. Fasst man nun noch $\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}y^2}\right) = \vec{\nabla}_\mathsf{s}^2$ mit $\vec{\nabla}_\mathsf{s} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cdot\vec{e}_\mathrm{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\cdot\vec{e}_\mathrm{y}$ zusammen und schreibt $\vec{s} = x\cdot\vec{e}_\mathrm{x} + y\cdot\vec{e}_\mathrm{y}$ folgt die übliche Darstellung für die **paraxiale Wellengleichung**

$$\vec{\nabla}_\mathsf{s}^2\, u\{\vec{s}, z\} - i2k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u\{\vec{s}, z\} = 0 \quad . \tag{8.284}$$

Aus der Fresnel- bzw. Fraunhofer Näherung wissen wir, dass u einen Ausdruck der Form $\exp\left\{-ik\frac{x^2+y^2}{2q}\right\} = \exp\left\{-ik\frac{|\vec{s}|^2}{2q}\right\}$ enthält, wobei $\frac{2q}{k} = \lambda z$, also $q = \pi z$ zu setzen ist. Als Lösungsansatz kann man nun die Variation der Konstanten versuchen, also

$$u\{x, y, z\} = u_\mathsf{z}\{x, y\} = A\{z\}\cdot\exp\left\{-i\frac{k\|\vec{s}\|^2}{2q}\right\} \quad . \tag{8.285}$$

Einsetzen in die paraxiale Wellengleichung führt mit

$$\vec{\nabla}_\mathsf{s}u_\mathsf{z} = \vec{\nabla}_\mathsf{s}\left(A\cdot\exp\left\{-i\frac{k\|\vec{s}\|^2}{2q}\right\}\right) = -i\frac{k}{q}u_\mathsf{z}\cdot\vec{s} \tag{8.286}$$

$$\vec{\nabla}_\mathsf{s}^2u_\mathsf{z} = u_\mathsf{z}\left[-i\frac{2k}{q} - \left(\frac{k\|\vec{s}\|}{2q}\right)^2\right] \tag{8.287}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}u_\mathsf{z} = u_\mathsf{z}\left[\frac{1}{A}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A + i\cdot\frac{k\|\vec{s}\|^2}{2q^2}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}q\right] \tag{8.288}$$

auf

$$\left[\left(\frac{k\|\vec{s}\|}{2q}\right)^2\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}q-1\right)-i\frac{2k}{A}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A+\frac{A}{q}\right)\right]\cdot u_{\mathsf{z}}=0 \quad . \tag{8.289}$$

Diese Gleichung lässt sich für beliebige Punkte (x, y, z) nur erfüllen, wenn gleichzeitig Real- und Imaginärteil verschwinden, also

$$\frac{\partial}{\partial z}q = 1 \tag{8.290}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial z}A+\frac{A}{q}=0 \quad . \tag{8.291}$$

Die erste Differentialgleichung führt auf

$$q = q_0 + z \tag{8.292}$$

mit $q_0 = q\{z = 0\}$, was im wesentlichen mit dem vorher gesagten übereinstimmt. Für A findet man durch probieren $A = A_0\frac{q_0}{q}$.
Tatsächlich sollte in u ja noch eine weitere Abhängigkeit von x und y enthalten sein, die in den Fresnel- und Fraunhofer-Näherungen in den Integralausdrücken zu finden sind. Wie wir bereits wissen, kann man die Integralausdrücke zumindest in der Fraunhofer-Näherung als Produkt zweier Funktionen, die jeweils nur von x und y abhängen, schreiben. Versuchen wir also, auch diese Erkenntnis zu verwenden und setzten

$$u = h\{\vec{\nu}\circ\vec{s}\}\cdot u_{\mathsf{z}} \quad . \tag{8.293}$$

Also

$$E = h\{\vec{\nu} \circ \vec{s}\} \cdot A\{z\} \cdot \exp\left\{-ik\frac{u\vec{s} + u^2}{2q}\right\} . \tag{8.294}$$

Einsetzen in die paraxiale Wellengleichung (8.284) ergibt mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}A \cdot \frac{\partial}{\partial z}q = \frac{\partial}{\partial q}A$ (wegen (8.290))

$$2\vec{\nabla}_{\mathsf{s}}\, h_{m,n} \circ \vec{\nabla}_{\mathsf{s}}\, u_{\mathsf{z}} + u_{\mathsf{z}}\left[\vec{\nabla}^2_{\mathsf{s}}\, h_{m,n} - i2k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}h_{m,n} - i\frac{2k}{A}\left(\frac{\partial}{\partial q}A + \frac{A}{q}\right)h_{m,n}\right] = 0 \quad . \tag{8.295}$$

Erinnern wir uns an die Fraunhofer-Näherung, dann wäre $\vec{\nu} = \nu_{\mathsf{x}} \cdot \vec{e}_{\mathsf{x}} + \nu_{\mathsf{y}} \cdot \vec{e}_{\mathsf{y}}$ und $h_{m,n}$ wäre als Produkt separierbar in

$$h\{\vec{v} \circ \vec{s}\} = h_m\{v_{\mathsf{x}} \cdot x\} \cdot h_n\{v_{\mathsf{y}} \cdot y\} = h_{m,n}\{x, y\} . \tag{8.296}$$

Die Raumfrequenzen waren $z-$abhängig mit $\nu_{\mathsf{x}} = \frac{x_0}{\lambda z}$ und $\nu_{\mathsf{y}} = \frac{y_0}{\lambda z}$, d.h. auch $h_{m,n}$ ist $z-$abhängig.

8.4.1 Hermite-Gauß-Wellen

Für die Auswertung müssen wir uns auf ein Koordinatensystem festlegen. Wegen der Ausbreitung in $z-$Richtung denkt man hier automatisch an Zylinderkoordinaten mit $\vec{s} = \varrho \cdot \vec{e}_{\varrho}$, und $h_{m,n} = h_n\left\{\frac{\varrho}{p_{\mathsf{s}}}\right\} \cdot h_m\{\Phi\}$. Etwas einfacher ist aber die Auswertung in kartesischen Koordinaten bei denen wir

$$h_{m,n} = h_m\left\{\frac{x}{p_{\mathsf{x}}\{z\}}\right\} \cdot h_m\left\{\frac{y}{p_{\mathsf{y}}\{z\}}\right\} \tag{8.297}$$

setzen. Für (8.295) benötigen wir

$$\vec{\nabla}_{\mathsf{s}}\, h_{m,n} = h_{m,n}\left(\frac{1}{p_{\mathsf{x}}}\frac{h'_{\mathsf{m}}\left\{\frac{x}{p_{\mathsf{x}}}\right\}}{h_m\left\{\frac{x}{p_{\mathsf{x}}}\right\}}\vec{e}_{\mathsf{x}} + \frac{1}{p_{\mathsf{y}}}\frac{h'_n\left\{\frac{y}{p_{\mathsf{y}}}\right\}}{h_n\left\{\frac{y}{p_{\mathsf{y}}}\right\}}\vec{e}_{\mathsf{y}}\right) \tag{8.298}$$

wobei $h'_m\left\{\frac{x}{p_\mathsf{x}}\right\} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}h_\mathsf{m}\{\xi\}\Big|_{\frac{x}{p_\mathsf{x}}}$ und h'_n entsprechend die erste Ableitung von h_n ist. Weiterhin benötigen wir

$$\vec{\nabla}_\mathsf{s}^2\, h_{m,n} = h_{m,n}\cdot\left(\frac{1}{p_\mathsf{x}^2}\frac{h''_m}{h_m} + \frac{1}{p_\mathsf{y}^2}\frac{h''_n}{h_n}\right) \tag{8.299}$$

und

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}h_{m,n} = -h_{m,n}\cdot\left(\frac{x}{p_\mathsf{x}^2}\frac{h'_m}{h_m}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p_\mathsf{x} + \frac{y}{p_\mathsf{y}^2}\frac{h'_n}{h_n}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p_\mathsf{y}\right) \quad . \tag{8.300}$$

Gleichung (8.293) wäre mit einem Produktansatz separierbar, wenn u_z aus (8.285) ebenfalls als Produkt $u_\mathsf{z} = u_\mathsf{zx}\{x\}\cdot u_\mathsf{zy}\{y\}$ geschrieben werden könnte. Einfach ist dies für die Exponentialabhängigkeit wobei wir auch gleich noch berücksichtigen können, dass q für die $x-$ und $y-$Richtung unterschiedlich sein dürfen. Bleibt noch $A = A_\mathsf{x}\{z\}\cdot A_\mathsf{y}\{z\}$ und wir können schreiben

$$u_\mathsf{z} = u_\mathsf{x}\cdot u_\mathsf{y} \tag{8.301}$$

mit

$$\begin{aligned} u_\mathsf{x} &= A_\mathsf{x}\{z\}\cdot h_m\left\{\frac{x}{p_\mathsf{x}}\right\}\cdot\exp\left\{ik\frac{x^2}{2q_\mathsf{x}}\right\} \\ u_\mathsf{y} &= A_\mathsf{y}\{z\}\cdot h_n\left\{\frac{y}{p_\mathsf{y}}\right\}\cdot\exp\left\{ik\frac{y^2}{2q_\mathsf{y}}\right\} \quad . \end{aligned} \tag{8.302}$$

Da (8.290) weiterhin gelten soll, müssen wir dies auch für q_x und q_y annehmen, also $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}q_\mathsf{x} = 1$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}q_\mathsf{y} = 1$ und damit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_\mathsf{x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_\mathsf{x}}A_\mathsf{x}$ und $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}A_\mathsf{y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_\mathsf{y}}A_\mathsf{y}$.

Nach einsetzen in (8.295), kürzen um u_z und sortieren folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h_m\cdot p_\mathsf{x}^2}\cdot\left[h''_m - i2kx\left(\frac{p_\mathsf{x}}{q_\mathsf{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p_\mathsf{x}\right)h'_m\right] - i\frac{2k}{A_\mathsf{x}}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_\mathsf{x}}A_\mathsf{x} + \frac{A_\mathsf{x}}{p_\mathsf{x}}\right) \\ +\ &\frac{1}{h_n\cdot p_\mathsf{y}^2}\cdot\left[h''_n - i2ky\left(\frac{p_\mathsf{y}}{q_\mathsf{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p_\mathsf{y}\right)h'_n\right] - i\frac{2k}{A_\mathsf{y}}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p_\mathsf{y}}A_\mathsf{y} + \frac{A_\mathsf{y}}{p_\mathsf{y}}\right) = 0 \end{aligned} \tag{8.303}$$

Der Ausdruck in eckigen Klammern erinnert stark an die

Hermitesche Differentialgleichung

$$f'' - t \cdot f' + m \cdot f = 0, \qquad m \in \mathbb{N}_0 \tag{8.304}$$

die umgeformt

$$\frac{1}{f}\left(f'' - t \cdot f'\right) + m = 0 \tag{8.305}$$

lautet und deren Lösung $f = \mathrm{H}_m\{t\}$ die Hermiteschen Polynome

$$\begin{aligned} \mathrm{H}_0 &= 1 \\ \mathrm{H}_1 &= t \\ \mathrm{H}_{m+1} &= t \cdot \mathrm{H}_m - \mathrm{H}_{m-1} \end{aligned} \tag{8.306}$$

sind. Die Hermiteschen Polynome sind zueinander orthogonal mit dem Gewicht $w_{\mathsf{n}}^2 = \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot n!} \cdot \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\}$, so dass die Orthogonalitätsrelation

$$\frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot n!} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{t^2}{2}\right\} \cdot \mathrm{H}_m \cdot \mathrm{H}_n \;\; \mathrm{d}t = \delta_{m,n} \tag{8.307}$$

gilt. Erweitern wir t zu $\frac{t}{p}$ in (8.304) oder (8.305), lautet die Differentialgleichung $\frac{1}{f}\left(f'' - \frac{t}{p} f'\right) = -m$. Wir nehmen an, das h_m bzw. h_n in (8.303) hermitische Polynome mit Argument $\frac{x}{p_{\mathsf{x}}}$ bzw. $\frac{y}{p_{\mathsf{y}}}$ sind. Einsetzen der Eigenschaft (8.304) in (8.295) ergibt

$$-\frac{m}{q_{\mathsf{x}}^2} - i\frac{2k}{A_{\mathsf{x}}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_{\mathsf{x}}} A_{\mathsf{x}} + \frac{A_{\mathsf{x}}}{q_{\mathsf{x}}}\right) - \frac{n}{q_{\mathsf{y}}^2} - i\frac{2k}{A_{\mathsf{y}}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q_{\mathsf{y}}} A_{\mathsf{y}} + \frac{A_{\mathsf{y}}}{q_{\mathsf{y}}}\right) = 0 \tag{8.308}$$

mit der Bedingung

$$\frac{1}{p_\mathsf{x}} = i2k\left(\frac{p_\mathsf{x}}{q_\mathsf{x}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p_\mathsf{x}\right) \tag{8.309}$$

$$\frac{1}{p_\mathsf{y}} = i2k\left(\frac{p_\mathsf{y}}{q_\mathsf{y}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p_\mathsf{y}\right) \quad . \tag{8.310}$$

Die beiden letzten Differentialgleichungen können zum gleichen Typ

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}p = \frac{p}{q} + \frac{1}{i2kp} \tag{8.311}$$

umgeformt werden. Betrachtet man nur den zweiten Term auf der rechten Seite, würde man eine Proportionalität zu $\sqrt{q}$ vermuten. Versuchen wir es mit $p = \sqrt{p_0\, q}$ und setzen diesen Ansatz in (8.311) ein, resultiert $p_0 = \frac{1}{ik}$ und damit

$$p = \sqrt{\frac{q}{ik}} \quad . \tag{8.312}$$

Aus (8.308) resultieren mit (8.312) nach umstellen zwei Differentialgleichungen der Form

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}A = \left(\frac{\ell}{2} - 1\right)\frac{A}{q} \quad , \tag{8.313}$$

die im Spezialfall für $\ell = 0$ in (8.291) übergeht. Die Lösung ist

$$A = A_\ell \left(\frac{q}{q_0}\right)^{\frac{\ell}{2}-1} \tag{8.314}$$

mit willkürlich wählbaren Konstanten A_ℓ und q_0.

Wir haben damit eine Lösung für die Amplitudenverteilung u in der paraxialen Wellengleichung. Benutzt man (8.312) in der Form $q = ikp^2$ und wählt versuchsweise

$$q_{0\mathsf{x}} = q_{0\mathsf{y}} = -p_0 = \frac{i}{k} \quad , \tag{8.315}$$

resultiert $p_{\mathsf{x}} = p_{\mathsf{y}} = p$ und damit

$$u_{\mathsf{m,n}} = A_m \cdot A_n \cdot (k \cdot p)^{m+n-4} \cdot \mathrm{H}_m \left\{ \frac{x}{p} \right\} \cdot \mathrm{H}_n \left\{ \frac{y}{p} \right\} \cdot \exp\left\{ -\frac{1}{2} \frac{x^2 + y^2}{p^2} \right\} \tag{8.316}$$

mit beliebigen Kombinationen von m und n, so dass auch die Summe

$$u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \cdot (k \cdot p)^{m+n-4} \cdot \mathrm{H}_m \left\{ \frac{x}{p} \right\} \cdot \mathrm{H}_n \left\{ \frac{y}{p} \right\} \cdot \exp\left\{ -\frac{x^2 + y^2}{2 \cdot p^2} \right\} \tag{8.317}$$

eine Lösung für die paraxiale Wellengleichung ist. Wie aus der Mathematik bekannt ist, bilden die H_m und H_n ein vollständiges System und damit haben wir in (8.317) eine vollständige Lösung gefunden.

Die Koeffizienten $A_{m,n}$ ergeben sich aus der Amplitudenverteilung in einer Ebene z mit

$$A_{m,n} = \frac{(k \cdot p)^{4-m-n}}{\pi n! \cdot m! p^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \mathrm{H}_m \left\{ \frac{x}{p} \right\} \cdot \mathrm{H}_n \left\{ \frac{y}{p} \right\} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{8.318}$$

In (8.315) haben wir, nur weil es praktisch war, $q_{0\mathsf{x}} = q_{0\mathsf{y}} = -p_0$ gewählt. Damit verliert man aber sofort den Freiheitsgrad, dass sich die Wellen in den beiden Richtungen unterschiedlich ausdehnen. Dankbar wäre auch die Wahl $q_0 = iz_0$, so dass

$$\boxed{q = iz_0 + z} \tag{8.319}$$

und aus (8.312)

$$\boxed{p = \sqrt{\frac{z_0}{k} - i\frac{z}{k}}} \tag{8.320}$$

resultiert. Mit verschiedenen Werten $q_{0\mathsf{x}} = -iz_{0x}$ und $q_{0\mathsf{y}} = -iz_{0y}$ ergeben sich dann auch verschiedene q_{x} und q_{y} und die Lösung (8.317) nimmt die Form

$$\boxed{u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} A_{m,n} \cdot u_{\mathrm{x}m} \cdot u_{\mathrm{y}n}} \tag{8.321}$$

mit

$$\begin{aligned} u_{\mathrm{x}m} &= \left(\frac{k \cdot p_{\mathsf{x}}^2}{z_{0\mathsf{x}}}\right)^{\frac{m}{2}-1} \cdot \mathrm{H}_m\left\{\frac{x}{p_{\mathsf{x}}}\right\} \cdot \exp\left(\frac{v_{\mathsf{x}}}{k} - i\frac{z-z_0}{k}\right) \\ u_{\mathrm{y}n} &= \left(\frac{k \cdot p_{\mathsf{y}}^2}{z_{0\mathsf{y}}}\right)^{\frac{n}{2}-1} \cdot \mathrm{H}_n\left\{\frac{y}{p_{\mathsf{y}}}\right\} \cdot \exp\left(\frac{v_{\mathsf{y}}}{k} - i\frac{z-z_0}{k}\right) \end{aligned} \tag{8.322}$$

an. Die Amplituden folgen wie oben mittels Orthogonalentwicklung. Zusammengefasst ergibt sich das elektrische Feld in paraxialer Näherung

$$\boxed{\begin{aligned} E = \sum_m \sum_n A_{m,n} \cdot \left(\frac{k \cdot p_{\mathsf{x}}^2}{z_{0\mathsf{x}}}\right)^{\frac{m}{2}-1} &\cdot \quad \mathrm{H}_m\{\frac{x}{p_{\mathsf{x}}}\} \cdot \exp\{-\frac{x^2}{2p_{\mathsf{x}}^2}\} \cdot \\ \left(\frac{k \cdot p_{\mathsf{y}}^2}{z_{0\mathsf{y}}}\right)^{\frac{n}{2}-1} &\cdot \quad \mathrm{H}_n\left\{\frac{y}{p_{\mathsf{y}}}\right\} \exp\{-\frac{y^2}{2p_{\mathsf{y}}^2}\} \cdot \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z}})\} \end{aligned}} \tag{8.323}$$

mit

$$\begin{aligned} p_{\mathsf{x}}^2 &= \frac{1}{k}\left(z_{0\mathsf{x}} - iz\right) \\ p_{\mathsf{y}}^2 &= \frac{1}{k}\left(z_{0\mathsf{y}} - iz\right). \end{aligned} \tag{8.324}$$

Die sogenannte **Rayleighlänge** $z_{0\mathsf{x}}$ bzw. $z_{0\mathsf{y}}$ ist frei wählbar aber konstant.

Die Amplituden $A_{m,n}$ ergeben sich aus der Feldverteilung an einem festen Ort z

$$E\{z\} = \hat{E}\{x, y\} \cdot \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z}})\} \tag{8.325}$$

mit Hilfe der Orthogonalentwicklung zu

$$\boxed{A_{m,n} = \frac{\left(\frac{k \cdot p_\mathsf{x}^2}{z_{0\mathsf{x}}}\right)^{1-\frac{m}{2}} \cdot \left(\frac{k \cdot p_\mathsf{y}^2}{z_{0\mathsf{y}}}\right)^{1-\frac{n}{2}}}{\pi \cdot m! \cdot n! \cdot p_\mathsf{x} \cdot p_\mathsf{y}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \hat{E}\{x, y\} \cdot H_m\left\{\frac{x}{p_\mathsf{x}}\right\} \cdot H_n\left\{\frac{x}{p_\mathsf{y}}\right\} \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y \,. \quad (8.326)}$$

Interessant ist dabei, dass die Wellen offensichtlich immer transversal gaußförmig abklingen und ansonsten an jedem Punkt auf der $z-$Achse das gleiche Verhalten zeigen. Eigentlich sollte doch die Aufweitung des Strahls bestimmt werden. Die Lösung zu diesem scheinbaren Schönheitsfehler finden wir in der Tatsache, dass gemäß (8.311) bzw. (8.312) der Fleckradius p von z abhängt. Bereits in (8.290) hatten wir eine lineare Abhängigkeit $q\{z\}$ angenommen, wobei zu bemerken ist, dass hier q rein reell ist. Das bedeutet wegen (8.312), dass wir ein komplexes p

$$p = \sqrt{-i\frac{q}{k}} = \sqrt{-i\frac{q_0 + z - z_0}{k}} = \sqrt{\frac{v}{k} - i\frac{z - z_0}{k}} \tag{8.327}$$

haben, das wurzelförmig von z abhängt.

Wenn wir das Argument des $\exp-$Terms in (8.322) in Real- und Imaginärteil aufspalten, erkennen wir, wie weit sich die Welle in transversaler Richtung ausdehnt. Setzen wir

$$\frac{1}{2p^2} = \frac{1}{w^2} + i\frac{k}{2R} \tag{8.328}$$

und vergleichen mit (8.320), resultiert

$$\begin{aligned} \frac{1}{w^2} &= \frac{k}{2} \cdot \frac{z_0}{z_0^2 + z^2} \\ \frac{1}{R} &= \frac{z}{z_0^2 + z^2} \,. \end{aligned} \tag{8.329}$$

Umformen ergibt

$$w^2 = \frac{2}{kz_0} \cdot (z_0^2 + z^2) = \frac{2z_0}{k}\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right] = w_0^2\left[1 + \left(\frac{z}{z_0}\right)^2\right] \tag{8.330}$$

mit reellem Fleckradius

$$w = \sqrt{\frac{2}{kz_0}} \cdot \sqrt{z_0^2 + z^2}\Big|_{z \gg v} \simeq \sqrt{\frac{2}{kz_0}} \cdot z = \frac{w_0}{z_0} \cdot z \tag{8.331}$$

und Krümmungsradius der Phasenfront

$$R = \frac{z_0^2}{z} + z \simeq z \left[1 + \left(\frac{z_0}{z}\right)^2\right] \quad . \tag{8.332}$$

Die exp-Funktion in (8.322) lautet also

$$\exp\left\{-\frac{t^2}{2p^2}\right\} = \exp\left\{-\left(\frac{t}{w}\right)^2\right\} \exp\left\{-i\,\frac{kt^2}{2R}\right\} \; . \tag{8.333}$$

Der erste Faktor enthält ein rein reelles Argument. Hier handelt es sich um die Gauß-Funktion, von der auch der Name der Welle herrührt. Die Amplitude nimmt mit größer werdendem Abstand von der Achse exponentiell ab. Wird der zweite Faktor zusammen mit dem Ausbreitungsterm $\exp\{-ikz\}$ betrachtet, ergeben sich sphärisch gekrümmte Phasenfronten mit Krümmungsradius R.

Abschließend wollen wir noch die Ausbreitung einer solchen Eigenwelle des freien Raums (in paraxialer Näherung) untersuchen. Wir beachten (8.327) und wollen uns auf die Vakuumwellenzahl k_0 beziehen, so dass mit $k = n \cdot k_0$

$$\frac{q}{n} = z + iz_0 \tag{8.334}$$

gilt. Die Ausbreitung von z_1 nach $z_2 = z_1 + L$ transformiert dann von $\frac{q_1}{n_1}$ nach $\frac{q_2}{n_2}$, wobei wir gleich angenommen haben, dass auch die Brechzahl in dem neuen Punkt geändert sein kann. In einem homogenen Medium ist $n_1 = n_2$ und es gilt die Transformation $\frac{q_2}{n_2} = \frac{q_1}{n_1} + L$. Wenn man beispielsweise Linsen oder Blenden auf dem Weg von z_1 nach z_2 einbaut, kann man zeigen, dass allgemein gilt

$$\frac{q_2}{n_2} = \frac{A\frac{q_1}{n_1} + B}{C\frac{q_1}{n_1} + D} \quad . \tag{8.335}$$

Diese recht unhandliche Darstellung kann auch in Matrizenschreibweise mit

$$\begin{pmatrix} \frac{q_2}{n_2} \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{q_1}{n_1} \\ 1 \end{pmatrix} \tag{8.336}$$

überführt werden. Die Matrix lautet also für ein homogenes Medium mit der Länge L

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \tag{8.337}$$

Interessant ist, dass diese Matrix-Darstellung verwendet werden kann, um das Feld an einem beliebigen Punkt in einem optischen System zu berechnen. Kennt man das Feld bei $z = 0$, kann man mit (8.326) eine Feldentwicklung vornehmen und die Amplituden $A_{m,n}$ bestimmen. Das Feld in einer beliebigen Ebene $z > 0$ resultiert dann durch errechnen des Koeffizienten p, der aus (8.321) und (8.322) mit (8.334) hervorgeht. Die benötigten Werte für $\frac{q}{n}$ können über (8.336) bestimmt werden, wenn man für jedes Element im Strahlengang eine $ABCD-$Matrix definiert und alle Matrizen entsprechend miteinander multipliziert. Da es sich bei den Eigenwellen in (8.326) um sogenannte Hermite-Gauß-Wellen handelt, spricht man in diesem Zusammenhang auch von Gauß-Optik.

8.4.2 Laguerre-Gauß-Wellen

Bereits in der Diskussion von (8.295) hatten wir festgestellt, dass es sich anbietet, auf Zylinderkoordinaten überzugehen. Die Ergebnisse bei den Hermite-Gauß-Wellen legen nahe, auf p normierte Achsabstände ϱ zu verwenden. Erinnern wir uns an die Orthogonalentwicklung in Zylinderkoordinaten, wäre der Ansatz

$$h_{m,n} = h_m \left\{ \frac{\varrho}{p} \right\} \cdot \exp\left\{ in\varphi \right\} \tag{8.338}$$

mit

$$\vec{s} = \varrho \cdot \vec{e}_\varrho \tag{8.339}$$

naheliegend. Einsetzen in (8.295) führt unter Verwendung von (8.311) und (8.313) auf die Differentialgleichung

$$\frac{1}{h_m}\left[\frac{\varrho}{p}h_m''\left\{\frac{\varrho}{p}\right\} + \left(1-\left(\frac{\varrho}{p}\right)^2\right)h_m'\left\{\frac{\varrho}{p}\right\}\right] - n^2 \cdot \frac{p}{\varrho} + \ell \cdot \frac{\varrho}{p} = 0 \quad , \tag{8.340}$$

die stark an die **Laguerresche Differentialgleichung**

$$x \cdot y'' + (1+\alpha-x)y' + my = 0 \tag{8.341}$$

erinnert. Die Lösung $\{\alpha, m\} \in \mathbb{N}$ sind **Laguerresche Polynome** $\mathrm{L}_m^{(\alpha)}\{x\}$ mit den Eigenschaften

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_0^{(\alpha)}\{x\} &= 1 \\ \mathrm{L}_1^{(\alpha)}\{x\} &= 1+\alpha-x \\ \mathrm{L}_{m+1}^{(\alpha)}\{x\} &= \tfrac{1}{m+1}\left((1+\alpha+2m-x)\cdot \mathrm{L}_m^{(\alpha)}\{x\} - (\alpha+m)\cdot \mathrm{L}_{m-1}^{(\alpha)}\{x\}\right) \quad . \end{aligned} \tag{8.342}$$

Die Laguerreschen Polynome sind im Intervall $[0,\infty)$ orthonormal

$$\int\limits_0^\infty \mathrm{L}_m^{(\alpha)} \cdot \mathrm{L}_{m'}^{(\alpha)} \cdot |w|^2 \, \mathrm{d}x = \delta_{m,m'} \tag{8.343}$$

wenn das Gewicht

$$|w|^2 = \frac{1}{\Gamma\{1+\alpha\}\cdot\binom{\alpha+m}{m}} \cdot x^\alpha \cdot \exp\{-x\} \tag{8.344}$$

verwendet wird. Versucht man an dieser Stelle, (8.295) mit dem Ansatz $h_{m,n} = \mathrm{L}_m^{(\alpha)}\{x\} \cdot \exp\{in\varphi\}$ zu lösen, stellt man fest, dass α und m von $\frac{\varrho}{p}$ abhängen müssten, was ja nicht sein darf. Erinnert man sich dann an die Lösung in kartesischen Koordinaten, ist dort die Lösung für u bereits orthogonal zu den Hermiteschen Polynomen. Die Lösung hier könnte also eine ähnliche Form aufweisen. Nun steht im Gewicht (8.344) $\exp\{-x\}$, was mit $\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{p}\right)^2\right\}$ gleichzusetzen wäre. Wir müssen also den Ansatz

$$u = \sum_{m,n} A_{m,n} \cdot \left(\frac{q}{q_0}\right)^{\frac{\ell}{2}-1} \cdot x^t \cdot \mathrm{L}_m^{(\alpha)}\{x\} \cdot \exp\{-x\} \cdot \exp\{in\varphi\} \tag{8.345}$$

mit

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{\varrho}{p}\right)^2 \tag{8.346}$$

und q und p aus (8.319) und (8.320) versuchen. In der paraxialen Wellengleichung (8.284) wird der Laplaceoperator verwendet, der hier in Zylinderkoordinaten

$$\vec{\nabla}_{\mathsf{s}}^2 = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2} \tag{8.347}$$

geschrieben werden muss und mit der Substitution (8.346) unter Berücksichtigung von (8.327) zu

$$\vec{\nabla}_{\mathsf{s}}^2 = \frac{2}{p^2}\left(x \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} + \frac{1}{4x} \cdot \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\varphi^2}\right) \tag{8.348}$$

wird. Durch die Substitution (8.346) wird auch x von z abhängig, so dass

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}x = \frac{-1}{ikp^2}x \tag{8.349}$$

Verwendung findet. Berücksichtigen wir noch (8.313), wobei wie vorher bereits $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}q = 1$ gesetzt wird, resultiert mit der Abkürzung $y = \mathrm{L}_m^{(\alpha)}\{x\}$ aus (8.284)

$$x \cdot y'' + (1 + 2t - x)y' + \left(\frac{1}{x} \left(t^2 - \left(\frac{n}{2} \right)^2 \right) - 2t - \frac{\ell}{2} \right) y = 0 \quad , \tag{8.350}$$

was für $t = \pm\frac{n}{2}$ die Form (8.341) annimmt. Es ist zu beachten, dass $\alpha = 2t \in \mathbb{N}_0$ sein muss und damit ergibt sich $\alpha = 2t = n$. Der Exponent ℓ in (8.345) ist frei wählbar und ergibt sich aus der Bedingung $m = -2t - \frac{\ell}{2} = -n - \frac{\ell}{2} \epsilon \mathbb{N}_0$ aus der Ordnung m der Laguerreschen Polynoms zu $\ell = -2(m + n)$.

Die Lösung der paraxialen Wellengleichung in Zylinderkoordinaten ist also

$$\begin{aligned} u = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \; & A_{m,n} \cdot \left(\frac{k \cdot p^2}{z_0^2} \right)^{-(m+n+1)} \cdot \left(\frac{\varrho}{\sqrt{2} \cdot p} \right)^n \\ & \cdot \mathrm{L}_m^{(n)} \left\{ \frac{\varrho^2}{2p^2} \right\} \cdot \exp\left\{ -\frac{\varrho^2}{2p^2} \right\} \cdot \exp\{in\varphi\} \,. \end{aligned} \tag{8.351}$$

Wegen (8.343) und (8.344) können die Amplituden der Moden $A_{m,n}$ aus der Feldverteilung an einer beliebigen Stelle z $E = \hat{E}\{\varrho\} \cdot \exp\{i(\omega t - kz)\}$ mit

$$\boxed{\begin{aligned} A_{m,n} = \frac{\left(\frac{k \cdot p^2}{v} \right)^{m+n+1}}{\binom{m+n}{m} \cdot \Gamma\{1+n\}} \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \; & \hat{E}\{\varrho\} \cdot \exp\{-in\varphi\} \cdot \left(\frac{\varrho}{\sqrt{2} \cdot p} \right)^n \\ & \cdot \mathrm{L}_m^{(n)} \left\{ \frac{\varrho^2}{2p^2} \right\} \, \mathrm{d}\left(\frac{\varrho^2}{2p^2} \right) \, \mathrm{d}\varphi \end{aligned}} \tag{8.352}$$

bestimmt werden. Hierbei ist wie in kartesischen Koordianten $p^2 = \frac{1}{k}(z_0 - iz)$ zu setzen und das elektrische Feld lautet

$$\begin{aligned} E = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \; & A_{m,n} \cdot \left(\frac{k \cdot p^2}{z_0} \right)^{-(m+n+1)} \cdot \left(\frac{\varrho}{\sqrt{2} \cdot p} \right)^n \cdot L_m^n \{ \frac{\varrho^2}{2p^2} \} \cdot \exp\{ -\frac{\varrho^2}{2p^2} \} \\ & \cdot \exp\{in\varphi\} \cdot \exp\{i(\omega t - k_z)\} \,. \end{aligned} \tag{8.353}$$

Kapitel 9

Wellenausbreitung in elektrischen Leitern

Wir betrachten homogene, isotrope, elektrische Leiter mit Leitfähigkeit $\sigma \neq 0$. Makroskopisch soll $\varrho = 0$ gelten, also sogenannte Ladungsfreiheit. Genau genommen herrscht Ladungsneutralität der freien Ladungsträger. Wegen der vorausgesetzten Homogenität und Ladungsfreiheit sind **Diffusionsströme**

$$\vec{j}_{\mathrm{D}} = -D_0 \vec{\nabla} \varrho \tag{9.1}$$

mit D_0 als Diffusionskonstante zu vernachlässigen, also $\vec{\nabla}\varrho = 0$. Es bleibt nach dem ohmschen Gesetz eine direkte Proportionalität zwischen Stromdichte (**Konvektionsstrom**) und elektrischer Feldstärke

$$\vec{j}_{\mathrm{c}} = \sigma \vec{E} \quad . \tag{9.2}$$

9.1 Die Wellengleichung für homogene leitfähige Medien

Wir beschreiben das leitfähige lineare Medium durch die Materialparameter ε, μ und σ und haben die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = \vec{\nabla} \circ \mu\mu_0 \vec{H} = 0 \quad , \tag{9.3}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , \tag{9.4}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma \vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \tag{9.5}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \vec{\nabla} \varrho = 0 \quad . \tag{9.6}$$

Nicht ganz selbstverständlich ist die Forderung (9.6), die für

$$\vec{\nabla} \circ E = \frac{\varrho}{\varepsilon\varepsilon_0} \equiv 0 \quad , \tag{9.7}$$

das heißt für Medien ohne freie Ladung, also für Ladungsträgerneutralität, immer erfüllt ist. Aus Abschnitt 2.5.2 ist bekannt, dass ein anfangs ungeladener Körper mit $\varrho(\vec{r}, t = 0) = 0$ sicher für alle Zeiten ungeladen bleibt, also $\varrho(\vec{r}, t) \equiv 0$ gilt für alle Zeiten t. Deshalb erscheint (9.7) für homogene Medien sinnvoll. Aber selbst bei geladener Materie muss die Ladung nur homogen sein, um (9.6) zu erfüllen. Die Ableitung einer Wellengleichung erfolgt ähnlich wie in Abschnitt 7.9. Wir haben

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \underbrace{\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{E})}_{=0} - \Delta \vec{E} = -\vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad . \tag{9.8}$$

Dies ist eine homogene Wellengleichung, die man als

Telegraphengleichung

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} - \mu\mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0 \quad , \tag{9.9}$$

bezeichnet. Für das Magnetfeld erhalten wir entsprechend

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{H}) = \frac{1}{\mu\mu_0} \vec{\nabla} \underbrace{(\vec{\nabla} \circ \mu\mu_0 \vec{H})}_{=0} - \Delta \vec{H}$$

$$\begin{aligned} &= \sigma\vec{\nabla}\times\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \\ &= -\mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} \end{aligned} \tag{9.10}$$

oder

$$\boxed{\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0 \quad .} \tag{9.11}$$

Die Wellengleichungen für das elektrische und magnetische Feld haben dieselbe Form.

9.2 Lösungen der Telegraphengleichung

Wir fragen nach monofrequenten Lösungen der Telegraphengleichung (9.9) der Form

$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_{\mathrm{a}}(\vec{r})\exp\{i\omega t\} \quad . \tag{9.12}$$

Einsetzen in (9.9) liefert die Helmholtzgleichung

$$\Delta\vec{E}_{\mathrm{a}}(\vec{r}) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - i\omega\mu\mu_0\sigma\right)\vec{E}_{\mathrm{a}}(\vec{r}) = 0 \quad , \tag{9.13}$$

bzw.

$$\Delta\vec{E}_{\mathrm{a}} + \omega\mu_0\varepsilon_0\mu(\varepsilon - i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0})\vec{E}_{\mathrm{a}} = 0 \quad . \tag{9.14}$$

Wir führen nun eine **komplexe relative Dielektrizitätskonstante**

$$\overline{\varepsilon} = \varepsilon - i\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \varepsilon' - i\varepsilon'' = \overline{\varepsilon}\{\omega\} \tag{9.15}$$

ein, die für Isolatoren mit $\sigma \to 0$ in die normale relative Dielektrizitätskonstante ε übergeht. Außerdem definieren wir eine komplexe Phasengeschwindigkeit der Welle gemäß

$$\overline{c} = \frac{1}{\sqrt{\overline{\varepsilon}\varepsilon_0\mu\mu_0}} = \frac{c_0}{\sqrt{\overline{\varepsilon}\mu}} \quad . \tag{9.16}$$

Damit können wir schreiben

$$\Delta\vec{E}_{\mathrm{a}}(\vec{r}\,) + \frac{\omega^2}{\overline{c}^2}\vec{E}_{\mathrm{a}}(\vec{r}\,) = 0 \quad . \tag{9.17}$$

Die Helmholtzgleichung wird gelöst durch ebene Wellen

$$\vec{E}_{\mathrm{a}}(\vec{r}\,) = \vec{E}_0 \exp\left\{-i\vec{k}\circ\vec{r}\right\} \tag{9.18}$$

mit **komplexem Ausbreitungsvektor** $\vec{k}$, der auch **komplexer Wellenzahlvektor** genannt wird.

Einsetzen in die Helmholtzgleichung ergibt die **komplexe Dispersionsrelation**

$$\|\vec{k}\|^2 = \vec{k}\circ\vec{k} = k_{\mathrm{x}}^2 + k_{\mathrm{y}}^2 + k_{\mathrm{z}}^2 = \frac{\omega^2}{\overline{c}^2} \quad . \tag{9.19}$$

Einfache Lösungen der Telegraphengleichung sind folglich

$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = \vec{E}_0 \exp\left\{i\omega t - i\vec{k}\circ\vec{r}\right\} \tag{9.20}$$

mit komplexem $\vec{k}$.

Es werde angemerkt, dass nun die Verlustleistung $\sigma|E|^2$ existiert, die sich in Joulescher Wärme äußert (vergleiche Verlustleistung am Widerstand $P = \frac{U^2}{R}$).

Für die weitere Diskussion führen wir wie üblich eine **komplexe Brechzahl**

$$\eta = \sqrt{\mu\overline{\varepsilon}} = \overline{n} - i\kappa \tag{9.21}$$

in vollkommener Analogie zur Maxwellschen Relation $n = \sqrt{\mu\varepsilon}$ in verlustfreien Medien ein. Die **verallgemeinerte Brechzahl** $\overline{n}$ und der **Extinktionskoeffizient** κ sind reelle Größen. Ihre Bedeutung wird durch die folgende Rechnung klar. Zunächst haben wir

$$\mu\overline{\varepsilon} = \overline{n}^2 - \kappa^2 - 2i\overline{n}\kappa \tag{9.22}$$

und durch Einsetzen von (9.15) folgt

$$n^2 - i\mu\frac{\sigma}{\varepsilon_0\omega} = \overline{n}^2 - \kappa^2 - 2i\kappa\overline{n} \quad . \tag{9.23}$$

Das bedeutet für Real- und Imaginärteil

$$n^2 = \overline{n}^2 - \kappa^2 \tag{9.24}$$

und

$$\frac{\mu\sigma}{\varepsilon_0\omega} = 2\kappa\overline{n} \quad . \tag{9.25}$$

Hieraus erhält man

$$\overline{n}^2 = \frac{1}{2}n^2 \pm \sqrt{\frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{4}n^4\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2} \tag{9.26}$$

und, da $\overline{n}$ reell ist, hat man die positive Wurzel zu nehmen

$$\boxed{\overline{n}^2 = \frac{1}{2}n^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}+1\right] \quad .} \tag{9.27}$$

Für $\sigma = 0$ hat man $\overline{n} = n$. Mit (9.24) folgt aus (9.27) unmittelbar

$$\boxed{\kappa^2 = \frac{1}{2}n^2\left[\sqrt{1+\left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}-1\right] \quad .} \tag{9.28}$$

Für $\sigma = 0$ ist auch $\kappa = 0$.

Für den Fall $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \to \infty$ ergibt sich $\overline{n}^2 = \kappa^2$ und damit $\eta \to \frac{n\sigma}{\sqrt{2}\varepsilon\varepsilon_0\omega}(1-i)$

Die Dispersionsrelation (9.19) lautet mit (9.21)

$$k_{\mathrm{x}}^2 + k_{\mathrm{y}}^2 + k_{\mathrm{z}}^2 = \frac{\omega^2}{c_0^2}\eta^2 \quad . \tag{9.29}$$

Speziell für eine in $\pm z$-Richtung laufende Welle ist $k_{\mathrm{x}}^2 = k_{\mathrm{y}}^2 = 0$, und wir schreiben

$$\begin{aligned}\vec{E}\{\vec{r},t\} &= \vec{E}_0 \exp\{i\omega t - ik_z z\} \\ &= \vec{E}_0 \exp\left\{i\omega t - i\frac{\omega}{c_0}\overline{n}z\right\} \exp\left\{-\frac{\omega}{c_0}\kappa z\right\} \\ &= E_0 \cdot \exp\left\{i\omega t - \left(\frac{\omega}{c_0}\cdot\overline{n}z\right)\right\} \exp\left\{-\frac{z}{d}\right\} \quad ,\end{aligned} \tag{9.30}$$

mit der sogenannten **Skin Eindringtiefe**

$$d = \frac{c_0}{\omega\kappa} \tag{9.31}$$

wobei wir uns auf in positive z-Richtung laufende Wellen beschränkt und bei $k_z = \pm\frac{\omega}{c}\eta$ das positive Vorzeichen genommen haben. Die Welle (9.30) breitet sich in z-Richtung mit der

Phasenkonstante

$$\beta = \text{Re}\,\{k_z\} = \frac{\omega}{c_0}\overline{n} = 2\pi\frac{\overline{n}}{\lambda_0} \tag{9.32}$$

aus und klingt mit dem

Intensitätsabsorptionskoeffizienten

$$\alpha = 2\text{Im}\,\{k_z\} = \frac{2\omega}{c_0}\kappa = \frac{4\pi\kappa}{\lambda_0} \tag{9.33}$$

ab, wobei λ_0 die **Vakuumwellenlänge** bedeutet. Wir schreiben die Welle

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\frac{\alpha}{2}z} \exp\{i\omega t - i\beta z\} \quad . \tag{9.34}$$

Die Phasengeschwindigkeit c_{Ph} der Welle ergibt sich aus

$$\beta z - \omega t = const \quad . \tag{9.35}$$

Das bedeutet

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\omega}{\beta} = \frac{c_0}{\overline{n}} = c_{\mathrm{Ph}} \quad . \tag{9.36}$$

Da $\overline{n} > n$ ist, nimmt die Phasengeschwindigkeit mit zunehmender Leitfähigkeit ab. Nach (9.32) ist auch die Wellenlänge kleiner als im Isolator.

9.3 Zusammenhang zwischen elektrischem und magnetischem Feld und Energiefluss in leitfähigen Medien

Nach (8.11) gilt für eine ebene Welle im verlustbehafteten Medium

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu\mu_0\omega}\vec{k} \times \vec{E} \quad . \tag{9.37}$$

Für eine linear polarisierte in z-Richtung laufende Welle $\vec{k} = (0, 0, k_{\mathsf{z}})$

$$\vec{E} = (E_0, 0, 0) \exp\{i\omega t - ik_{\mathsf{z}}z\} = E_{\mathsf{x}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} \tag{9.38}$$

bedeutet dies

$$\vec{H} = (0, H_0, 0) \exp\{i\omega t - ik_{\mathsf{z}}z\} = H_{\mathsf{y}} \cdot \vec{e}_{\mathrm{y}} \tag{9.39}$$

mit

$$H_0 = \frac{k_{\mathsf{z}}E_0}{\mu\mu_0\omega} = \frac{\eta E_0}{\mu\mu_0 c_0} = \frac{E_0}{\overline{Z}} \quad , \tag{9.40}$$

wobei der **komplexe Wellenwiderstand**

$$Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\overline{\varepsilon}\varepsilon_0}} = Z \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon}{\overline{\varepsilon}}} \tag{9.41}$$

eingeführt wurde. Da $k_{\mathsf{z}} = \frac{\omega}{c_0}(\overline{n} - i\kappa)$ bzw. Z komplex sind, sind $\vec{E}$ und $\vec{H}$ nicht mehr in Phase. Die Polardarstellung der komplexen Brechzahl

$$\eta = \overline{n} - i\kappa = \sqrt{\overline{n}^2 + \kappa^2} e^{-i\varphi} \tag{9.42}$$

mit $\tan\varphi = -\kappa/\overline{n}$ führt auf

$$H_0 = \frac{\sqrt{\overline{n}^2 + \kappa^2}}{\mu\mu_0 c_0} E_0 e^{-i\varphi} = \frac{E_x}{|\overline{Z}|e^{i\varphi}} \quad . \tag{9.43}$$

Magnetisches Feld H_{y} und elektrisches Feld E_{x} sind also um den Winkel φ phasenverschoben. Für $\dfrac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \to \infty$, also $\overline{n}^2 = \kappa^2$, erhält man $\varphi = \dfrac{-\pi}{4} = -45^o$.
Für die zeitlich gemittelte Energieflussdichte $\overline{\vec{S}} = (0, 0, \overline{S}_{\mathsf{z}})$ ist

$$\overline{S}_{\mathsf{z}} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{E_{\mathsf{x}} H_{\mathsf{y}}^*\right\} = \frac{1}{2}\text{Re}\left\{\frac{|E_{\mathsf{x}}|^2}{\overline{Z}}\right\} \quad . \tag{9.44}$$

Nun gilt

$$\frac{1}{Z} = \frac{\sqrt{\varepsilon_0}(\overline{n} - i\kappa)}{\mu\sqrt{\mu_0}} \tag{9.45}$$

und damit

$$\overline{S}_{\mathsf{z}} = \frac{\overline{n}}{2\mu\mu_0 c_0}|E_{\mathsf{x}}|^2 = \frac{|E_{0\mathsf{x}}|^2}{2\mu\mu_0 c_{\mathsf{Ph}}} \exp\left\{-2\frac{z}{d}\right\} \quad . \tag{9.46}$$

Die zeitlich gemittelte Energiedichte ist

$$\begin{aligned} \overline{w} = \overline{w}_{\mathsf{e}} + \overline{w}_{\mathsf{m}} &= \frac{1}{4}\text{Re}\left\{E_{\mathsf{x}} D_{\mathsf{x}}^* + B_{\mathsf{y}}^* H_{\mathsf{y}}\right\} = \frac{1}{4}(\varepsilon\varepsilon_0 |E_{\mathsf{x}}|^2 + \mu\mu_0 |H_{\mathsf{y}}|^2) \\ &= \frac{1}{4}\varepsilon\varepsilon_0 |E_{\mathsf{x}}|^2 + \frac{1}{4}\mu\mu_0 \frac{|E_{\mathsf{x}}|^2}{|\overline{Z}|^2} = \frac{1}{4}\left(\varepsilon\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{\mu}(\overline{n}^2 + \kappa^2)\right)|E_{\mathsf{x}}|^2 \quad . \end{aligned} \tag{9.47}$$

Für den Klammerausdruck folgt mit (9.24) und $n^2 = \varepsilon\mu$

$$\begin{aligned} \varepsilon\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{\mu}(\overline{n}^2 + \kappa^2) &= \varepsilon\varepsilon_0 + \frac{\varepsilon_0}{\mu}(2\overline{n}^2 - n^2) = \varepsilon\varepsilon_0 + \frac{2\varepsilon_0\overline{n}^2}{\mu} - \varepsilon\varepsilon_0 \\ &= \frac{2\varepsilon_0 c_0^2}{\mu c_{\mathsf{Ph}}^2} = \frac{2}{\mu\mu_0 c_{\mathsf{Ph}}^2} = \frac{2\overline{n}^2}{\mu\mu_0 c_0^2} \quad . \end{aligned} \tag{9.48}$$

Damit schreibt sich die Energiedichte

$$\overline{w} = \frac{\overline{n}^2}{2\mu\mu_0 c_0^2}|E_\mathsf{x}|^2 = \frac{\overline{n}}{c_0}\frac{\overline{n}}{2\mu\mu_0 c_0}|E_{0\mathsf{x}}|^2 \exp\left\{-2\frac{z}{d}\right\} \quad . \tag{9.49}$$

Im zeitlichen Mittel fallen Energiedichte und Energieflussdichte exponentiell in z-Richtung ab, und es gilt der bekannte Zusammenhang

$$\boxed{\overline{S}_\mathsf{z} = \overline{w}\frac{c_0}{\overline{n}} \quad .} \tag{9.50}$$

9.4 Eindringtiefe und Skineffekt

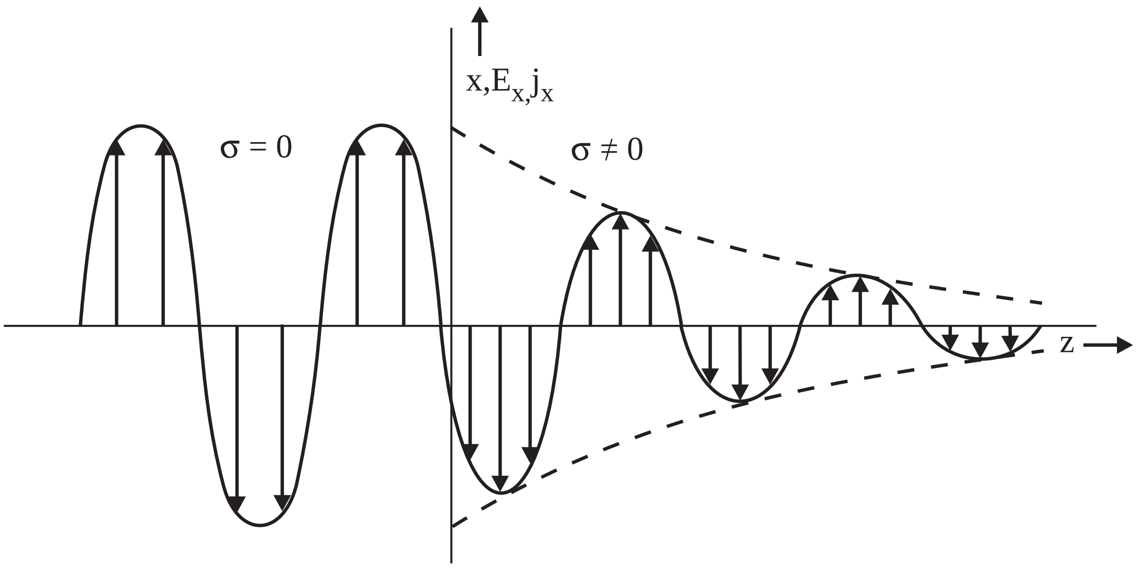


Abbildung 9.1: Dämpfung einer Welle in einem leitfähigen Medium

Wir wollen den exponentiellen Abfall der Felder E_x und H_y noch etwas genauer diskutieren. Mit dem Abklingen von E_x ist wegen

$$j_\mathsf{x} = \sigma E_\mathsf{x} \tag{9.51}$$

unmittelbar auch ein Abfall der Stromdichte verbunden. Fällt eine Welle nach Abbildung 9.1 aus einem Isolator auf ein leitfähiges Medium, dann klingen Feldstärke und Stromdichte unterhalb der Oberfläche rasch ab. Nach (9.30) und mit $\overline{k}_\mathsf{z} = \frac{\omega}{c_0}(\overline{n} - i\kappa)$ schreiben wir für eine in x-Richtung linear polarisierte Welle

$$E_\mathsf{x} = E_\mathsf{a} e^{-\frac{\omega}{c_0}\kappa z} \cos\left\{\frac{\omega}{c_0}\overline{n}z - \omega t\right\} \tag{9.52}$$

und

$$j_\mathsf{x} = \sigma E_\mathsf{a} e^{-\frac{\omega}{c_0}\kappa z} \cos\left\{\frac{\omega}{c_0}\overline{n}z - \omega t\right\} \quad . \tag{9.53}$$

Mit (9.43) folgt für das Magnetfeld

$$\begin{aligned} H_\mathsf{y} &= H_\mathsf{a} e^{-\frac{\omega}{c_0}\kappa z} \cos\left\{\frac{\omega}{c_0}\overline{n}z - \omega t + \varphi\right\} \\ &= \frac{\sqrt{\overline{n}^2 + \kappa^2}}{\mu\mu_0 c_0} E_\mathsf{a} e^{-\frac{\omega}{c_0}\kappa z} \cos\left\{\frac{\omega}{c_0}\overline{n}z - \omega t + \varphi\right\} \quad . \end{aligned}$$

Die Größen $\overline{n}$ und κ sind durch (9.27) und (9.28) bestimmt. Für das Amplitudenverhältnis der magnetischen und elektrischen Felder gilt

$$\frac{H_\mathsf{a}}{E_\mathsf{a}} = \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{\mu\mu_0 c_0}\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2} = \frac{\sqrt[4]{1 + \left(\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}\right)^2}}{Z} \quad . \tag{9.54}$$

Die magnetische Feldstärke nimmt relativ gesehen mit steigender Leitfähigkeit zu. In (9.54) bezeichnet Z den reellen Wellenwiderstand $Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$.

Das Abklingen der Felder ist durch den Extinktionskoeffizienten κ festgelegt. Wir können zwei Grenzfälle unterscheiden, nämlich $\sigma \ll \omega\varepsilon\varepsilon_0$ und $\sigma \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0$. Im ersten Fall dominiert in der Wellengleichung (9.9) bzw. der Helmholtzgleichung (9.13) der von der Verschiebungsstromdichte herrührende Term, im zweiten Fall der von der Konvektionsstromdichte verursachte Dämpfungsterm.

Im ersten Fall beobachtet man wellenartiges Verhalten. Aus (9.28) folgt näherungsweise für $\omega\varepsilon\varepsilon_0 \gg 0$

$$\kappa \approx \frac{1}{2}\frac{n\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega} \quad . \tag{9.55}$$

Die Dämpfung der Welle erfolgt mit dem Intensitätsabsorptionskoeffizienten

$$\alpha = \frac{2\omega\kappa}{c_0} \approx \frac{n\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0 c_0} = \sigma\sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}} = \sigma Z \quad . \tag{9.56}$$

In diesem Fall sind die betrachteten Frequenzen ω so hoch, dass die oszillierenden elektrischen Felder nicht schnell genug durch Ladungsbewegungen kompensiert werden können, und es entstehen praktisch keine Raumladungsfelder. Die Wellenausbreitung erfolgt zwar gedämpft, aber sonst ähnlich wie in einem Dielektrikum.

Im anderen Grenzfall $\sigma \gg \omega\varepsilon\varepsilon_0$ ist die Leitfähigkeit so groß, dass Ladungsbewegungen vorkommen. Das heißt, dass elektrische Ströme so fließen, dass das elektrische Feld der Welle kompensiert wird und eine Abschirmung des Feldes erfolgt. Dieses Verhalten ist typisch für einen elektrischen Leiter. Wir erhalten aus (9.28)

$$\kappa \approx \frac{n}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\varepsilon\varepsilon_0\omega}} = \sqrt{\frac{\sigma\mu}{2\omega\varepsilon_0}} \quad . \tag{9.57}$$

Die Dämpfung erfolgt mit

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{\omega\kappa}{c_0} = \sqrt{\frac{\sigma\mu\mu_0\omega}{2}} \quad . \tag{9.58}$$

Der Abfall der Feldstärke auf den $1/e$-ten Teil definiert die

Skin Eindringtiefe

$$d = \frac{2}{\alpha} = \sqrt{\frac{2}{\sigma\mu\mu_0\omega}} \quad . \tag{9.59}$$

Für Kupfer mit $\sigma = 5.7 \cdot 10^7\,\mathsf{A/(Vm)}$ und $\mu \approx 1$, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathsf{Vs/(Am)}$ erhält man bei der Frequenz $\omega/2\pi = 1000\,\mathsf{Hz}$ die Eindringtiefe $d = 2.1\,\mathsf{mm}$. In dieser Entfernung von der Oberfläche ist die Intensität des Feldes auf den $1/e$-ten Teil, also ca. 37%, des Wertes an der Oberfläche abgeklungen. Gemäß (9.59) verringert sich die Eindringtiefe mit wachsender Frequenz und der Leiter verhält sich fast wie ein idealer Leiter.

Erst bei genügend hohen Frequenzen $\sigma \approx \omega\varepsilon\varepsilon_0$ gehen die typischen Leitereigenschaften allmählich in Isolatoreigenschaften über. Diese Frequenzen liegen bei guten Leitern extrem hoch. Benutzt man die angegebenen Werte für Kupfer für eine grobe Abschätzung, dann kommt man auf $\omega/2\pi \approx 10^{18}$ Hz, also in den Frequenzbereich der Röntgen-Strahlung. Betrachtet man den Stromfluss durch einen Draht mit kreisrundem Querschnitt von Radius a und endlicher Leitfähigkeit, findet man nach gehöriger Rechnung, dass der Drahtwiderstand im Grenzfall kleiner Frequenzen, also $d = \frac{c_0}{\omega\kappa} \gg a$, dem Gleichstromwiderstand entspricht. Bei hohen Frequenzen ($d \ll a$) hingegen werden die Stromfäden aus der Mitte herausgedrängt und der Stromfluss erfolgt im wesentlichen in einer Schicht am äußeren Rand. Dieser Effekt heißt **Stromverdrängungseffekt** oder auch **Skin Effekt**. Die Schicht, in der der Stromfluss hauptsächlich erfolgt, hat die Dicke d, woher auch der Name **Skin Eindringtiefe** rührt.

Kapitel 10

Wellenausbreitung in Wellenleitern

Wellenleiter sind Gebilde, bei denen die Materialkonstanten $\varepsilon = \varepsilon\{x, y\}$, $\mu = \mu\{x, y\}$ und $\sigma = \sigma\{x, y\}$ nicht von der z-Koordinate abhängen. Solche Strukturen erlauben die Wellenführung in z-Richtung. Beispiele sind Hohlrohrwellenleiter der Mikrowellentechnik, integriert-mikroelektronische Streifenleitungen, Koaxialkabel, Glasfasern und integriert-optische Wellenleiter. Abbildung 10.1 zeigt das Schema eines Wellenleiters.

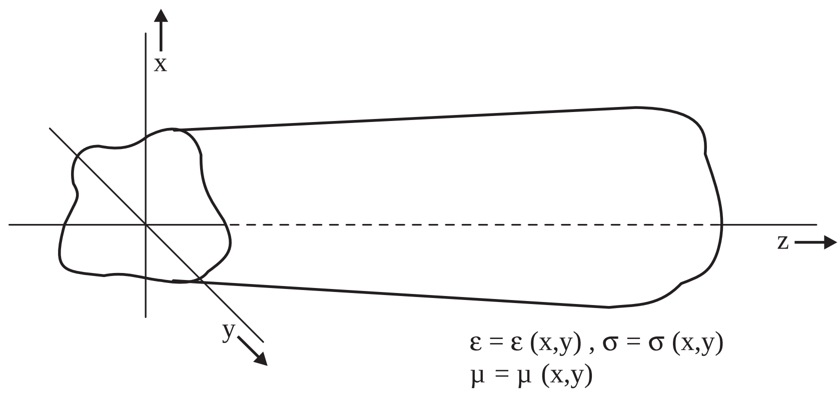


Abbildung 10.1: Schema eines Wellenleiters

10.1 Grundgleichungen für Wellenleiter

Wir legen einen allgemeinen Wellenleiter nach Abbildung 10.1 zugrunde mit $\varepsilon = \varepsilon\{x, y\}$, $\mu = \mu\{x, y\}$, $\sigma = \sigma\{x, y\}$. Wir nehmen an, dass keine Raumladungen vorhanden sind, $\varrho = 0$, und das ohmsche Gesetz $\vec{j} = \sigma\vec{E}$ gültig ist. Die Maxwellschen Gleichungen lauten damit

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad , \tag{10.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \sigma\vec{E} + \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad , \tag{10.2}$$

$$\vec{\nabla} \circ (\varepsilon\varepsilon_0 \vec{E}) = 0 \quad , \tag{10.3}$$

$$\vec{\nabla} \circ (\mu\mu_0 \vec{H}) = 0 \quad . \tag{10.4}$$

In Bereichen, in denen $\varepsilon\{x, y\} = \varepsilon = \mathsf{const}$ und $\mu\{x, y\} = \mu = const$ sind, folgt aus den letzten beiden Gleichungen

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E} = 0 \quad , \vec{\nabla} \circ \vec{H} = 0 \quad . \tag{10.5}$$

Wir wollen für unsere weiteren Überlegungen annehmen, dass (10.5) gültig ist.

Zur Lösung der Maxwellgleichungen suchen wir in z-Richtung laufende Wellen der Form

$$\vec{E} = \vec{\hat{E}}\{x, y\} \exp\{i\omega t - ik_z z\} \quad , \tag{10.6}$$

$$\vec{H} = \vec{\hat{H}}\{x, y\} \exp\{i\omega t - ik_z z\} \quad . \tag{10.7}$$

Damit erhält man wegen $\partial/\partial z = -ik_z$ und $\partial/\partial t = i\omega$ aus den Maxwellgleichungen der Reihe nach $(\mu = \mathsf{const})$ für die kartesischen Komponenten

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\,k_z E_y = -i\,\omega\mu\mu_0 H_x \quad , \tag{10.8}$$
$$-\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\,k_z E_x = -i\,\omega\mu\mu_0 H_y \quad , \tag{10.9}$$
$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -i\,\omega\mu\mu_0 H_z \quad , \tag{10.10}$$
$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + i\,k_z H_y = (\sigma + i\,\omega\varepsilon\varepsilon_0) E_x \quad , \tag{10.11}$$
$$-\frac{\partial H_z}{\partial x} - i\,k_z H_x = (\sigma + i\,\omega\varepsilon\varepsilon_0) E_y \quad , \tag{10.12}$$
$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = (\sigma + i\,\omega\varepsilon\varepsilon_0) E_z \quad , \tag{10.13}$$
$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_x}{\partial y} - i\,k_z E_z = 0 \quad , \tag{10.14}$$
$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} - i\,k_z H_z = 0 \quad . \tag{10.15}$$

Aus den Gleichungen (10.8) und (10.12) kann man E_y und H_x als Funktion von H_z und E_z berechnen. Aus den Gleichungen (10.9) und (10.11) bekommt man E_x und H_y als Funktion von E_z und H_z. Man führt zur Abkürzung

$$\boxed{k_\rho^2 = \omega^2\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0 - k_z^2 - i\,\omega\sigma\mu\mu_0 = k^2 - k_z^2 - i\omega\sigma\mu\mu_0} \tag{10.16}$$

ein, wobei man k_ρ als Ausbreitungskonstante in Querrichtung interpretieren kann. Man spricht auch vom **transversalen Ausbreitungskoeffizienten**. Damit kann man schreiben

$$E_x = \frac{1}{k_\rho^2}\left(-i\,k_z\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\,\omega\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \quad , \tag{10.17}$$
$$E_y = \frac{1}{k_\rho^2}\left(-i\,k_z\frac{\partial E_z}{\partial y} + i\,\omega\mu\mu_0\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \quad , \tag{10.18}$$
$$H_x = \frac{1}{k_\rho^2}\left((\sigma + i\omega\varepsilon\varepsilon_0)\frac{\partial E_z}{\partial y} - i\,k_z\frac{\partial H_z}{\partial x}\right) \quad , \tag{10.19}$$
$$H_y = \frac{1}{k_\rho^2}\left((-\sigma - i\omega\varepsilon\varepsilon_0)\frac{\partial E_z}{\partial x} - i\,k_z\frac{\partial H_z}{\partial y}\right) \quad . \tag{10.20}$$

Einsetzen dieser Ausdrücke in (10.14) oder (10.15) liefert

$$\boxed{\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + k_\rho^2 E_z = 0} \tag{10.21}$$

und Einsetzen in (10.10) oder (10.15) ergibt

$$\boxed{\frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} + k_\rho^2 H_z = 0 \quad .} \tag{10.22}$$

Diese beiden zweidimensionalen Helmholtzgleichungen hätte man auch durch Einbringen der Ansätze (10.6) oder (10.7) in die Telegraphengleichungen für $\vec{E}$ und $\vec{H}$ direkt erhalten können. Die Bestimmung der Feldverteilung in einem Wellenleiter ist damit zurückgeführt auf die Lösung der beiden Helmholtzgleichungen (10.21) und (10.22) für die Felder E_z und H_z. Die anderen Komponenten ergeben sich aus (10.17) bis (10.20).

Da die Maxwellgleichungen ein lineares Differentialgleichunssystem bilden, kann man jede Lösung zusammensetzen aus drei Typen,

$$\text{den } \textbf{TEM-Wellen} \text{ mit } E_z = 0 \text{ und } H_z = 0 \quad , \tag{10.23}$$

$$\text{den } \textbf{TE-Wellen} \text{ mit } E_z = 0 \text{ und } H_z \neq 0 \quad , \tag{10.24}$$

$$\text{und den } \textbf{TM-Wellen} \text{ mit } E_z \neq 0 \text{ und } H_z = 0 \quad , \tag{10.25}$$

wobei die Transversalität auf die z-Richtung als Ausbreitungsrichtung der Wellen bezogen wird. Für rein transversale TEM-Wellen folgt aus $E_z = 0$ und $H_z = 0$ dann nicht zwangsläufig auch das Verschwinden der übrigen Feldkomponenten, wenn der transversale Ausbreitungskoeffizient k_ρ verschwindet. Als Bedingung gilt demnach für

TEM-Wellen

$$k^2 - k_{\mathsf{z}}^2 - i\,\omega\sigma\mu\mu_0 = 0 \quad . \tag{10.26}$$

Wir werden später auf TEM-Wellen zurückkommen.

10.1.1 TE-Wellen in Wellenleitern

Für TE-Wellen ist $E_{\mathsf{z}} = 0$ für H_{z} gilt die Wellengleichung (10.22). Die übrigen Feldkomponenten lauten nach (10.17) bis (10.20)

$$E_{\mathsf{x}} = -i\frac{1}{k_\rho^2}\,\omega\mu\mu_0\frac{\partial H_{\mathsf{z}}}{\partial y} \quad , \tag{10.27}$$

$$E_{\mathsf{y}} = i\frac{1}{k_\rho^2}\,\omega\mu\mu_0\frac{\partial H_{\mathsf{z}}}{\partial x} \quad , \tag{10.28}$$

$$H_{\mathsf{x}} = -i\frac{k_{\mathsf{z}}}{k_\rho^2}\frac{\partial H_{\mathsf{z}}}{\partial x} \quad , \tag{10.29}$$

$$H_{\mathsf{y}} = -i\frac{k_{\mathsf{z}}}{k_\rho^2}\frac{\partial H_{\mathsf{z}}}{\partial y} \quad . \tag{10.30}$$

Offenbar muss $k_\rho \neq 0$ sein, damit keine unendlich großen Feldkomponenten auftreten, und es

$$\vec{E}_{\mathsf{TE}} \circ \vec{H}_{\mathsf{TE}} = 0 \quad , \tag{10.31}$$

d.h. $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stehen überall aufeinander senkrecht.

10.1.2 TM-Wellen in Wellenleitern

TM-Wellen sind transversal bezüglich des Magnetfeldes. Es gilt $H_{\mathsf{z}} = 0$ und für E_{z} die Wellengleichung (10.21). Die übrigen Feldkomponenten ergeben sich zu

$$E_{\mathsf{x}} = -i\frac{k_{\mathsf{z}}}{k_\rho^2}\frac{\partial E_{\mathsf{z}}}{\partial x} \quad , \tag{10.32}$$

$$E_\mathsf{y} = -i\frac{k_\mathsf{z}}{k_\rho^2}\frac{\partial E_\mathsf{z}}{\partial y} \quad , \tag{10.33}$$

$$H_\mathsf{x} = \frac{(\sigma + i\,\omega\varepsilon\varepsilon_0)}{k_\rho^2}\frac{\partial E_\mathsf{z}}{\partial y} \quad , \tag{10.34}$$

$$H_\mathsf{y} = -\frac{(\sigma + i\,\omega\varepsilon\varepsilon_0)}{k_\rho^2}\frac{\partial E_\mathsf{z}}{\partial x} \quad . \tag{10.35}$$

Auch hier gilt $k_\rho \neq 0$ und

$$\vec{E}_\mathsf{TM} \circ \vec{H}_\mathsf{TM} = 0 \quad , \tag{10.36}$$

d. h. auch bei TM-Wellen stehen $\vec{E}$ und $\vec{H}$ aufeinander senkrecht.

10.1.3 TEM-Wellen in Wellenleitern

Hierfür gilt $E_\mathsf{z} = 0\,,\; H_\mathsf{z} = 0$ und $k_\rho = 0$. Aus $k_\rho = 0$ resultiert direkt $k^2 = k_\mathsf{z}^2 - i\omega\sigma\mu\mu_0$ Für die anderen Feldkomponenten resultiert nach (10.8) bis (10.15)

$$-k_\mathsf{z}E_\mathsf{y} = \omega\mu\mu_0 H_\mathsf{x} \quad , \tag{10.37}$$

$$k_\mathsf{z}E_\mathsf{x} = \omega\mu\mu_0 H_\mathsf{y} \quad , \tag{10.38}$$

$$\frac{\partial E_\mathsf{y}}{\partial x} - \frac{\partial E_\mathsf{x}}{\partial y} = 0 \quad , \tag{10.39}$$

$$\frac{\partial E_\mathsf{x}}{\partial x} + \frac{\partial E_\mathsf{y}}{\partial y} = 0 \quad , \tag{10.40}$$

$$\frac{\partial H_\mathsf{y}}{\partial x} - \frac{\partial H_\mathsf{x}}{\partial y} = 0 \quad , \tag{10.41}$$

$$\frac{\partial H_\mathsf{x}}{\partial x} + \frac{\partial H_\mathsf{y}}{\partial y} = 0 \quad . \tag{10.42}$$

Dies bedeutet

$$\vec{E}_\mathsf{TEM} \circ \vec{H}_\mathsf{TEM} = 0 \quad , \tag{10.43}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{E}_\mathsf{TEM} = \vec{\nabla} \circ \vec{H}_\mathsf{TEM} = 0 \quad . \tag{10.44}$$

In TEM-Wellen stehen $\vec{E}$ und $\vec{H}$ überall aufeinander senkrecht und beide Felder $\vec{E}$ und $\vec{H}$ sind quellenfrei.

Es sei noch angemerkt, dass TEM-Wellen nicht in allen Wellenleitertypen auftreten können, weil die Randbedingungen an den Grenzflächen bei diesem Wellentyp nicht erfüllt werden können. Zum Beispiel treten TEM-Wellen in Koaxialleitern auf, nicht dagegen in metallischen Hohlleitern wie z. B. Rechteckhohlleitern.

10.2 Rechteckhohlleiter

Wir behandeln ideale Rechteckhohlrohr-Wellenleiter, kurz Rechteckhohlleiter, nach Abbildung 10.2, die ein verlustfreies Dielektrikum mit $\sigma = 0$ enthalten und außen eine unendliche Leitfähigkeit $\sigma = \infty$ aufweisen. Damit im Hohlleitermantel keine unendlich großen Ströme fließen, muss man an den Grenzflächen die Randbedingung

$$\vec{E}_{\mathsf{tan}}\Big|_{\mathsf{Rand}} = 0 \tag{10.45}$$

verlangen. Damit steht $\vec{E}$ auf der Randfläche senkrecht. Nun gibt es zwei Möglichkeiten. Entweder es verschwindet auch die Normalkomponente von $\vec{E}$, oder bei nicht verschwindender Komponente E_{norm} muss die Normalkomponente von $\vec{H}$ verschwinden, denn $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stehen überall senkrecht aufeinander. Es gilt also die weitere Randbedingung für TEM-, TE- oder TM-Wellen

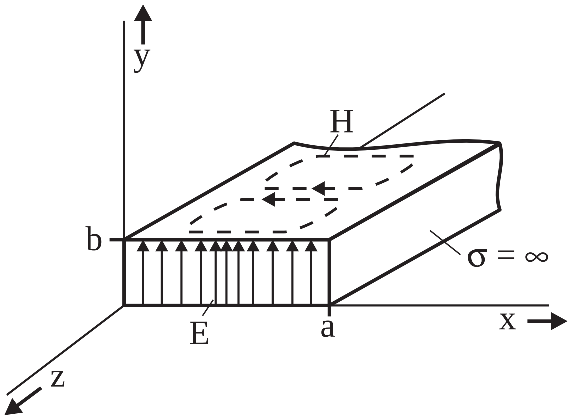
$$E_{\mathsf{norm}} = 0 \quad \text{oder} \quad H_{\mathsf{norm}} = 0 \quad . \tag{10.46}$$

Unter Beachtung dieser Randbedingungen suchen wir Lösungen des Wellenleiterproblems.

10.2.1 TE-Wellen im Rechteckhohlleiter

Im verlustfreien homogenen dielektrischen Innenraum des Wellenleiters gilt die Helmholtzgleichung (10.22)

Abbildung 10.2: Rechteckhohlleiter mit ideal leitenden Wänden



$$\frac{\partial^2 H_\mathsf{z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_\mathsf{z}}{\partial y^2} + k_\rho^2 H_\mathsf{z} = 0 \quad , \tag{10.47}$$

und wie üblich ist für TE-Wellen $E_\mathsf{z} = 0$. Der **Separationsansatz**

$$H_\mathsf{z} = X\{x\}Y\{y\}\exp\{i\omega t - i\,k_\mathsf{z} z\} \tag{10.48}$$

führt auf Lösungen der Form

$$H_\mathsf{z} = (C_1 \sin\{k_\mathsf{x} x\} + C_2 \cos\{k_\mathsf{x} x\})(C_3 \sin\{k_\mathsf{y} y\} + C_4 \cos\{k_\mathsf{y} y\})\exp\{i\omega t - i\,k_\mathsf{z} z\} \tag{10.49}$$

mit noch zu bestimmenden Konstanten C_1, C_2, C_3 und C_4. Aus (10.27) und (10.28) folgt

$$\begin{aligned} E_\mathsf{x} = -i\frac{\omega\mu\mu_0}{k_\rho^2} & [(C_1 \sin\{k_\mathsf{x} x\} + C_2 \cos\{k_\mathsf{x} x\}) \\ & \cdot (C_3 k_\mathsf{y} \cos\{k_\mathsf{y} y\} - C_4 k_\mathsf{y} \sin\{k_\mathsf{y} y\})\exp\{i\omega t - i\,k_\mathsf{z} z\}] \end{aligned} \tag{10.50}$$

und

$$\begin{aligned} E_\mathsf{y} = i\frac{\omega\mu\mu_0}{k_\rho^2} & [(C_1 k_\mathsf{x} \cos\{k_\mathsf{x} x\} - C_2 k_\mathsf{x} \sin\{k_\mathsf{x} x\}) \\ & \cdot (C_3 \sin\{k_\mathsf{y} y\} + C_4 \cos\{k_\mathsf{y} y\})\exp\{i\omega t - i\,k_\mathsf{z} z\}] \quad . \end{aligned} \tag{10.51}$$

Die Randbedingung $E_{\mathsf{tan}} = 0$ erfordert $E_{\mathsf{y}}(x = 0\,,\, y, z) = 0$ für $0 \le y \le b$ und $E_{\mathsf{x}}(x, y = 0, z) = 0$ für $0 \le x \le a$. Damit folgt aus (7.3.7) $C_1 k_{\mathsf{x}} = 0$ und aus (7.3.6) $C_3 k_{\mathsf{y}} = 0$. E_{x} und E_{y} haben damit die Form ($k_{\mathsf{x}} \neq 0\,,\, k_{\mathsf{y}} \neq 0$ angenommen)

$$E_{\mathsf{x}} = C_5 \cos\{k_{\mathsf{x}} x\} \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} \exp\{i\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \quad , \tag{10.52}$$

$$E_{\mathsf{y}} = C_6 \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} \cos\{k_{\mathsf{y}} y\} \exp\{i\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \quad . \tag{10.53}$$

mit neuen Konstanten C_5 und C_6. Die Randbedingungen $E_{\mathsf{y}}(x = a\,,\, y, z) = 0$ und $E_{\mathsf{x}}(x, y = b, z) = 0$ sind nur zu erfüllen, wenn

$$\boxed{k_{\mathsf{x}} = \frac{l\pi}{a} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{\mathsf{x}} = \frac{2a}{l} \quad \text{mit } l \text{ ganzzahlig}} \tag{10.54}$$

und

$$\boxed{k_{\mathsf{y}} = \frac{m\pi}{b} \quad \text{bzw.} \quad \lambda_{\mathsf{y}} = \frac{2a}{m} \quad \text{mit } m \text{ ganzzahlig}} \tag{10.55}$$

gilt. Hierbei wurden die Beziehungen $k_{\mathsf{x}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathsf{x}}}$ und $k_{\mathsf{y}} = \frac{2\pi}{\lambda_{\mathsf{y}}}$ ausgenützt, wobei λ_{x} und λ_{y} die Wellenlängen in x- bzw. in y-Richtung sind. Es kommen also nur diskrete Wellenzahlen vor, die noch die Dispersionsrelation

$$k_\rho^2 = k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2 = \omega^2 \mu\mu_0 \varepsilon\varepsilon_0 - k_{\mathsf{z}}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{\mathsf{z}}^2 \tag{10.56}$$

erfüllen müssen, die sich durch Einsetzen von (10.49) in (10.47) ergibt. Dieses Ergebnis erinnert stark an die Orthogonalentwicklung in kartesischen Koordinaten. Mit den Konstanten C_{TE} lauten damit die Feldkomponenten für TE-Wellen

$$H_{\mathsf{z}} = C_{\mathsf{TE}} \cos\{k_{\mathsf{x}} x\} \cos\{k_{\mathsf{y}} y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \quad , \tag{10.57}$$

$$E_{\mathsf{z}} = 0 \quad , \tag{10.58}$$

$$E_{\mathsf{x}} = i\frac{\omega\mu\mu_0}{k_{\mathsf{x}}^2+k_{\mathsf{y}}^2}C_{\mathsf{TE}}\cos\{k_{\mathsf{x}}x\}\sin\{k_{\mathsf{y}}y\}\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.59}$$

$$E_{\mathsf{y}} = -i\frac{\omega\mu\mu_0}{k_{\mathsf{x}}^2+k_{\mathsf{y}}^2}C_{\mathsf{TE}}\sin\{k_{\mathsf{x}}x\}\cos\{k_{\mathsf{y}}y\}\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.60}$$

$$H_{\mathsf{x}} = i\frac{k_{\mathsf{x}}k_{\mathsf{z}}}{k_{\mathsf{x}}^2+k_{\mathsf{y}}^2}C_{\mathsf{TE}}\sin\{k_{\mathsf{x}}x\}\cos\{k_{\mathsf{y}}y\}\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.61}$$

$$H_{\mathsf{y}} = i\frac{k_{\mathsf{y}}k_{\mathsf{z}}}{k_{\mathsf{x}}^2+k_{\mathsf{y}}^2}C_{\mathsf{TE}}\cos\{k_{\mathsf{x}}x\}\sin\{k_{\mathsf{y}}y\}\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.62}$$

wobei k_{x} und k_{y} durch (10.54) und (10.55) gegeben sind und k_{z} sich aus (10.56) berechnet. Jede Wellenform ist durch zwei ganze Zahlen l, m gekennzeichnet. Die Bezeichnung ist TE_{lm}-Welle. Indizes $l = 0$ und $m = 0$ gleichzeitig sind nicht möglich, da alle E-Feldkomponenten verschwinden. Es gibt also keine TE_{00}-Welle. Die Aussage kann mathematisch durch

$$\boxed{l + m > 0} \tag{10.63}$$

beschrieben werden.

Aus (10.56) folgt für die Phasengeschwindigkeit der Hohlrohrwelle

$$c_{\mathsf{Ph}} = \frac{\omega}{k_{\mathsf{z}}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \frac{l^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2}}} \tag{10.64}$$

wobei noch (10.54) und (10.55) beachtet wurden. Für die Gruppengeschwindigkeit gilt

$$c_{\mathsf{gr}} = \frac{\partial\omega}{\partial k_{\mathsf{z}}} = \frac{c^2}{c_{\mathsf{Ph}}} \tag{10.65}$$

wobei $c = c_0/\sqrt{\mu\varepsilon}$ die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Dielektrikum bezeichnet. Wir betrachten noch die **Freiraumwellenlänge** λ im unbegrenzten Dielektrikum gemäß

$$\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = \omega^2\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0 \tag{10.66}$$

und die in Ausbreitungsrichtung im Wellenleiter gemessene Wellenlänge λ_{z}

$$\frac{2\pi}{\lambda_\mathsf{z}} = k_\mathsf{z} = \sqrt{\frac{4\pi^2}{\lambda^2} - \frac{l^2\pi^2}{a^2} - \frac{m^2\pi^2}{b^2}} \quad . \tag{10.67}$$

Die **Hohlrohrwellenlänge** λ_z ist stets größer als λ, denn

$$\lambda_\mathsf{z} = \frac{\lambda}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 \left(\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}\right)}} \quad . \tag{10.68}$$

Für die Grenzwellenlänge

$$\lambda = \lambda_{\mathsf{gr}\,l,m} = \frac{2}{\sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}}} \tag{10.69}$$

ist die Hohlrohrwellenlänge der Wellenform l, m, d. h. der Mode $\mathsf{TE}_{l,m}$ sogar unendlich. Für größere Wellenlängen, d. h. kleinere Kreisfrequenzen

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} < \omega_\mathsf{gr} = \frac{2\pi c}{\lambda_\mathsf{gr}} = \pi c \sqrt{\frac{l^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \tag{10.70}$$

ist die Mode $\mathsf{TE}_{l,m}$ nicht ausbreitungsfähig. Sie wird nach (10.67) mit imaginärem k_z exponentiell abklingen. Für Abmessungen $a \geq b$ besitzt die Mode TE_{10} die kleinste aller möglichen Grenzfrequenzen

$$(\omega_\mathsf{gr})_{\mathsf{TE}_{10}} = \frac{\pi c}{a} \quad . \tag{10.71}$$

Die zugehörige Grenzwellenlänge ist

$$\lambda_\mathsf{gr} = 2a \quad . \tag{10.72}$$

Die nächst höheren Moden TE_{20} und TE_{11} haben Grenzfrequenzen

$$(\omega_\mathsf{gr})_{\mathsf{TE}_{20}} = \frac{2\pi c}{a} = 2(\omega_\mathsf{gr})_{\mathsf{TE}_{10}} \tag{10.73}$$

und

$$(\omega_\mathsf{gr})_{\mathsf{TE}_{11}} = \pi c \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}} = \frac{\pi c}{ab}\sqrt{a^2 + b^2} \tag{10.74}$$

und die TE_{01}-Mode hat die Grenzfrequenz

$$(\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{01}} = \frac{\pi c}{b} = (\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{10}} \cdot \frac{a}{b} < (\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{11}} . \tag{10.75}$$

Der Frequenzbereich, in dem nur die TE_{10}-Mode ausbreitungsfähig ist, wird durch $(\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{10}} \leq \omega \leq \mathsf{Min}\{(\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{20}}\ ,\ (\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{01}}\}$ bestimmt. Der maximale Frequenzbereich ergibt sich aus der Bedingung $(\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{20}} \leq (\omega_{\mathsf{gr}})_{\mathsf{TE}_{01}}$ für das Seitenverhältnis $\frac{a}{b} \geq 2$. Der Wellenleiter ist dann im Frequenzbereich

$$\frac{\pi c}{a} \leq \omega \leq 2\frac{\pi c}{a} \tag{10.76}$$

einmodig, d. h. es ist nur die TE_{10}-Mode ausbreitungsfähig.

Die an den Oberflächen vorhandenen normalen elektrischen und tangentialen magnetischen Felder rufen dort Flächenladungen und Flächenströme hervor, die aus den Randbedingungen berechnet werden können und sich mit den Feldern zeitlich ändern. Ströme und Ladungen müssen selbstverständlich die Kontinuitätsgleichung erfüllen.

10.2.2 TM-Wellen im Rechteckhohlleiter

In diesem Fall gilt $H_{\mathsf{z}} = 0$ und im homogenen verlustfreien Innenraum des Hohlleiters gilt die Helmholtzgleichung

$$\frac{\partial^2 E_{\mathsf{z}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_{\mathsf{z}}}{\partial y^2} + k_\rho^2 E_{\mathsf{z}} = 0 \tag{10.77}$$

Der **Separationsansatz**

$$E_{\mathsf{z}} = X\{x\}Y\{y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \tag{10.78}$$

führt auf Lösungen der Form

$$E_{\mathsf{z}} = (C_1 \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} + C_2 \cos\{k_{\mathsf{x}} x\})(C_3 \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} + C_4 \cos\{k_{\mathsf{y}} y\}) \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \tag{10.79}$$

mit Konstanten C_1, C_2, C_3, C_4. Die Randbedingungen $E_z(x = 0, y, z) = 0$ und $E_z(x, y = 0, z) = 0$ für $0 \leq y \leq b$ bzw. $0 \leq x \leq a$ erfordern $C_2 = C_4 = 0$. Damit erhält man $(C_{\mathsf{TM}} = \mathrm{const})$ die Felder

$$E_{\mathsf{z}} = C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}}x\} \sin\{k_{\mathsf{y}}y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.80}$$

$$H_{\mathsf{z}} = 0 \quad , \tag{10.81}$$

$$E_{\mathsf{x}} = -i\frac{k_{\mathsf{z}}k_{\mathsf{x}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \cos\{k_{\mathsf{x}}x\} \sin\{k_{\mathsf{y}}y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.82}$$

$$E_{\mathsf{y}} = -i\frac{k_{\mathsf{z}}k_{\mathsf{y}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}}x\} \cos\{k_{\mathsf{y}}y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.83}$$

$$H_{\mathsf{x}} = i\frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0 k_{\mathsf{y}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}}x\} \cos\{k_{\mathsf{y}}y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad , \tag{10.84}$$

$$H_{\mathsf{y}} = -i\frac{\omega\varepsilon\varepsilon_0 k_{\mathsf{x}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \cos\{k_{\mathsf{x}}x\} \sin\{k_{\mathsf{y}}y\} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}}z\} \quad . \tag{10.85}$$

Die Wellenvektorkomponenten haben wegen der zu erfüllenden Randbedingungen bei $x = a$ und $y = b$ wieder diskreten Charakter

$$k_{\mathsf{x}} = \frac{l\pi}{a} \quad , k_{\mathsf{y}} = \frac{m\pi}{b} \tag{10.86}$$

wie bei TE-Wellen. Auch die Dispersionsrelation (10.56) behält ihre Gültigkeit, so dass alle Überlegungen zur Ausbreitungsgeschwindigkeit, Hohlrohrwellenlänge, Grenzfrequenz u.s.w. ganz genauso gelten wie im Falle von TE-Wellen.

Offenbar muss man $l \neq 0$ und $m \neq 0$ wählen, damit in (10.80) bis (10.85) nicht alle Feldkomponenten verschwinden. Es gibt also keine TM_{00}-, TM_{10}- und TM_{01}-Wellen. Dies bedeutet in anderer Schreibweise, dass

$$\boxed{l \cdot m > 0} \tag{10.87}$$

sein muss. Die Welle mit der kleinsten Grenzfrequenz ist demnach die TM_{11}-Welle. Ihre Grenzfrequenz ist durch (10.74) gegeben. Die Überlegungen zur Einmodigkeit eines Wellenleiters lassen sich damit sehr einfach auf den Fall ausdehnen, dass gleichzeitig TE- und TM-Wellen vorkommen.

10.2.3 TEM-Wellen

In Rechteckhohlleitern gibt es keine TEM-Wellen. Dies kann man folgendermaßen einsehen. Wellenleiterwellen sind von der Form (10.6),

$$\vec{E}\{x,y,z,t\} = \hat{\vec{E}}\{x,y\}\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \quad . \tag{10.88}$$

Für TEM-Wellen ist $E_{\mathsf{z}} = 0$, also auch $\hat{E}_{\mathsf{z}} = 0$. Wegen (10.39) gibt es eine zweidimensionale Potenzialfunktion $\hat{\Phi}(x,y)$ so dass

$$\hat{E}_{\mathsf{x}}\{x,y\} = -\frac{\partial \hat{\Phi}(x,y)}{\partial x} \tag{10.89}$$

und

$$\hat{E}_{\mathsf{y}}\{x,y\} = -\frac{\partial \hat{\Phi}(x,y)}{\partial y} \tag{10.90}$$

gilt. Aus (10.40) folgt eine zweidimensionale Laplacegleichung für $\hat{\Phi}$

$$\frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{\Phi}}{\partial y^2} = 0 \quad . \tag{10.91}$$

Für festes z und t ist $\hat{\Phi}$ auf dem gesamten einfach zusammenhängenden Wellenleiterrand eine Konstante, denn die Feldstärkevektoren stehen überall senkrecht auf dem idealen Leiter. Die eindeutig bestimmte Lösung der zweidimensionalen Laplacegleichung zu der Randbedingung $\hat{\Phi}$(Rand)$= const$ ist aber

$$\hat{\Phi} = const \tag{10.92}$$

und demnach folgt

$$\hat{E}_{\mathsf{x}}\{x,y\} = \hat{E}_{\mathsf{y}}\{x,y\} \equiv 0 \quad . \tag{10.93}$$

Diese Überlegungen kann man sofort auf alle Wellenleiter mit einfach zusammenhängenden ideal leitenden Wänden übertragen. Sie gelten dagegen nicht für Wellenleiter mit mehrfach zusammenhängenden Berandungen.

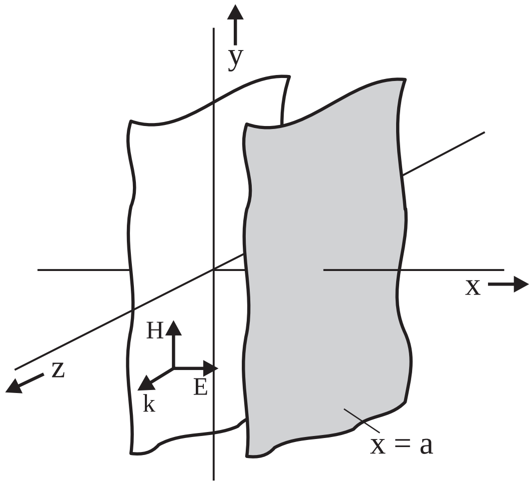


Abbildung 10.3: Parallelplattenleiter

Zum Beispiel gibt es bereits beim Wellenleiter mit unendlich ausgedehnten parallelen Platten nach Abbildung 10.3 keine Beschränkungen für E_x, so dass die ebene TEM-Welle

$$\vec{E} = (\hat{E}_{\mathsf{x}}, 0, 0)^T \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \quad , \tag{10.94}$$

$$\vec{H} = (0, \hat{H}_{\mathsf{y}}, 0)^T \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \tag{10.95}$$

eine mögliche Lösungsform darstellt. Für festes z und t ist das Potenzial $\hat{\Phi}$ auf jeder der beiden Platten konstant, aber die Potenzialdifferenz zwischen beiden Platten ist

$$\hat{\Phi} = \hat{E}_{\mathsf{x}} a \quad . \tag{10.96}$$

Diese Potenzialdifferenz schwankt mit z und t gemäß

$$\Phi = \hat{\Phi} \exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} \quad . \tag{10.97}$$

Neben den TEM-Wellen gibt es noch alle TE- und TM-Wellen des Rechteckhohlleiters als mögliche Ausbreitungsformen im Parallelplattenleiter. Bei letzteren Wellen hängt die Potenzialdifferenz

$$\Phi = \int_0^a E_x(x, y, z, t)\, \mathrm{d}x \tag{10.98}$$

zwischen zwei gegenüberliegenden Punkten $(0, y, z)$ und (a, y, z) auf dem Wellenleiter außer von z und t noch von y ab.

TEM-Wellen gibt es außerdem beim Koaxialkabel oder beim Rechteckhohlleiter mit Innenleiter, die schematisch in Abbildung 10.47 dargestellt sind. Hierbei sind die Berandungen offenbar nicht einfach zusammenhängend, so dass sich in Ebenen $z = const$ Potenzialdifferenzen zwischen verschiedenen Teilen der Berandung aufbauen und damit TEM-Wellen existieren können.

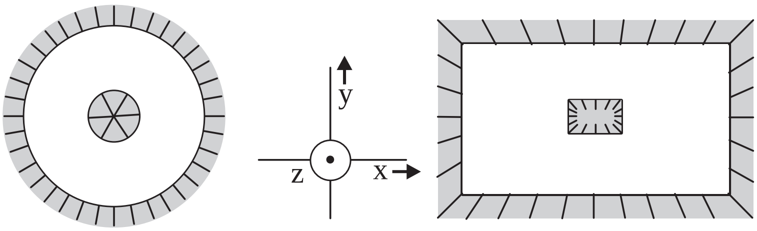


Abbildung 10.4: Koaxialleiter (links) und Rechteckhohlleiter mit Innenleiter (rechts) als Beispiel für TEM-Wellenleiter

Man kann zeigen, dass im Koaxialkabel als Grundmode nur TEM-Wellen als Ausbreitungsformen vorkommen.

10.3 Orthogonalität, Feldentwicklung und Störungen

Die geführten Wellen eines Wellenleiters sind im Sinne der Reziprozität zueinander orthogonal, solange sie verlustlos geführt sind. Aber auch für die Moden in verlustbehafteten Medien lässt sich eine Entwicklung nach den Moden angeben. Ausgehend von dem Reziprozitätstheorem für zeitharmonische Wellen in linearen verlustbehafteten Medien (8.93)

$$\vec{\nabla} \circ \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_2^* + \vec{E}_2^* \times \vec{H}_1\right) + -i\omega \left(\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2^* + \mu_0(\mu_2 - \mu_1)\vec{H}_1 \circ \vec{H}_2^*\right)$$

$$+ (\sigma_2 + \sigma_1)\vec{E}_1 \circ \vec{E}_2^* = -\vec{E}_1 \circ \vec{j}_2^* - \vec{E}_2^* \circ \vec{j}_1$$

kann für Wellen, die sich in z- Richtung gemäß $\exp\{-i\gamma z\}$ ausbreiten, ein Ansatz der Form

$$\vec{E}_1 = \sum_m \vec{E}_m\{x,y\} \exp\{i(\omega t - \gamma_m z)\} \tag{10.99}$$

$$\vec{H}_1 = \sum_m \vec{H}_m\{x,y\} \exp\{i(\omega t - \gamma_m z)\} \tag{10.100}$$

$$\vec{E}_2 = \sum_p \vec{E}_p\{x,y\} \exp\{i(\omega t - \gamma_p z)\} \tag{10.101}$$

$$\vec{H}_2 = \sum_p \vec{H}_p\{x,y\} \exp\{i(\omega t - \gamma_p z)\} \tag{10.102}$$

gewählt werden. Die Feldamplituden hängen dabei nur von den zur Ausbreitungsrichtung z transversalen Amplituden x, y ab. Mit dem transversalen Nablaoperator $\vec{\nabla}_\mathrm{t} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_\mathrm{x} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_\mathrm{y}$ resultiert für eine Paarung m, p

$$\begin{aligned}
&-i(\gamma_p^* - \gamma_m)\left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} \exp\{i(\gamma_p^* - \gamma_m)z\} \\
&+\vec{\nabla}_\mathrm{t} \circ \left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \exp\{i(\gamma_p^* - \gamma_m)z\} \\
&-i\omega\left(\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* + \mu_0(\mu_2 - \mu_1)\vec{H}_m \circ \vec{H}_p^*\right) \exp\{i(\gamma_p^* - \gamma_m)z\} \\
&+(\sigma_2 + \sigma_1)\vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* \exp\{i(\gamma_p^* - \gamma_m)z\} \\
= &-\vec{E}_m \circ \vec{j}_2^* \exp\{i(\omega t - \gamma_m z)\} - \vec{E}_p^* \circ \vec{j}_1 \exp\{-i(\omega t - \gamma_p^* z)\} \quad .
\end{aligned}$$

Nach Integration über die Querschnittsfläche bleibt unter Anwendung des Divergenzsatzes (B.19) **für Felder, die in großer Entfernung von der z- Achse verschwinden**

$$\begin{aligned}
&\exp\{i(\gamma_p^* - \gamma_m)z\} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[i(\gamma_m - \gamma_p^*)\left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} \\
&+ -i\omega\left(\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* + \mu_0(\mu_2 - \mu_1)\vec{H}_m \circ \vec{H}_p^*\right) + (\sigma_2 + \sigma_1)\vec{E}_m \circ \vec{E}_p^*\Big]\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
= &-\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\vec{E}_m \circ \vec{j}_2^* \exp\{i(\omega t - \gamma_m z)\} + \vec{E}_p^* \circ \vec{j}_1 \exp\{-i(\omega t - \gamma_p^* z)\}\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad .
\end{aligned} \tag{10.103}$$

Zur Diskussion soll zunächst von Medien ohne Quellen ausgegangen werden. Dann reduziert sich obige Gleichung (10.103) auf

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Big[-i(\gamma_m - \gamma_p^*)\left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_z + (\sigma_2 + \sigma_1)\vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* \\ - i\omega\left(\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)\vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* + \mu_0(\mu_2 - \mu_1)\vec{H}_m \circ \vec{H}_p^*\right)\Big] \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \quad . \tag{10.104}$$

Wenn sowohl die Felder m und p Lösung zum selben Problem sind, unterscheiden sich die Materialgrößen ϵ_1 und ϵ_2 sowie μ_1 und μ_2 nicht und (10.104) vereinfacht sich für verlustlose Medien weiter zu

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} (\gamma_m - \gamma_p^*)\left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \quad . \tag{10.105}$$

Dies bedeutet, dass Lösungen der verlust- und quellfreien Maxwellgleichungen desselben Problems mit unterschiedlicher Ausbreitungskonstante $\gamma_m \neq \gamma_p$ zueinander orthogonal sind:

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \quad . \tag{10.106}$$

10.3.1 Feldentwicklung in verlustlosen Medien

Unter der Annahme, dass alle linear unabhängigen Lösungen der Maxwellgleichungen voneinander unterschiedliche Ausbreitungskonstanten γ haben, man sagt, sie seinen **nicht entartete Lösungen**, stellt das Integral (10.106) den Leistungstransport der Lösung $m = p$ in z- Richtung dar. Hier ist $\vec{E}_p \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_p$ durch $2\mathrm{Re}\left\{\vec{E}_p \times \vec{H}_p^*\right\}$ zu ersetzen:

$$P_p = \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{Re}\left\{\vec{E}_p \times \vec{H}_p^*\right\} \circ \vec{e}_z \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad . \tag{10.107}$$

Obiges Integral kann als Skalarprodukt betrachtet und zur Entwicklung einer vorgegebenen Feldverteilung $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ herangezogen werden. Dabei gilt die Orthogonalrelation

$$\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = 2P_m \delta_{mp} = \begin{cases} 0 & \text{für } m \neq p \\ 2P_m & \text{für } m = p \end{cases} \quad .$$

Die Feldverteilung kann in dem betrachteten Abschnitt von außen induziert worden sein. Als Beispiel sei eine von außen auf die Stirnfläche eines Wellenleiters einfallende Welle genannt. Die Felder im Wellenleiter sind über die tangentialen Stetigkeitsbedingungen mit denen außerhalb direkt verknüpft. Wir die Reflektion vernachlässigt, sind bei ladungs- und stromfreien Grenzflächen beide Feldverteilungen gleich. Die induzierten Felder $\vec{E}_1, \vec{H}_1$ werden nach den Lösungen der Wellengleichung im Wellenleiter gemäß der Reihe

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= \sum_m a_m \vec{E}_m \exp\{i(\omega t - \gamma_m z)\} \\ \vec{H}_1 &= \sum_m a_m \vec{H}_m \exp\{i(\omega t - \gamma_m z)\} \end{aligned} \tag{10.108}$$

entwickelt. Die Amplitudenfaktoren a_m der Felder $\vec{E}_m, \vec{H}_m$ ergeben sich somit zu

$$a_m = \frac{1}{2P_m} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_m^* + \vec{E}_m^* \times \vec{H}_1\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \quad .$$

Die Amplitudenfaktoren a_m sind eng mit dem sogenannten **Anregungswirkungsgrad** η_m für die Lösungen der Wellengleichung verknüpft. Er ist definiert durch

$$\eta_m = \frac{\text{Leistung in Mode } m}{\text{Gesamtleistung im Feld 1}} \quad . \tag{10.109}$$

Die Leistung in Mode m, die durch das Feld 1 angeregt wurde, resultiert zu

$$
\begin{aligned}
P_{1m} &= \frac{1}{2} \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \Big((a_m \vec{E}_m) \times (a_m^* \vec{H}_m^*) + (a_m^* \vec{E}_m^*) \times (a_m \vec{H}_m) \Big) \circ \vec{e}_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= |a_m|^2 P_m \quad ,
\end{aligned}
\tag{10.110}
$$

während die Leistung in Feld 1 durch

$$
P_1 = \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{Re} \left\{ \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* \right\} \circ \vec{e}_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \tag{10.111}
$$

gegeben ist. Wird in (10.110) a_m durch (10.109) ersetzt, resultiert für den Anregungswirkungsgrad zunächst

$$
\eta_m = \frac{P_{1m}}{P_1} = |a_m|^2 \frac{P_m}{P_1} = \frac{\left| \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_m^* + \vec{E}_m^* \times \vec{H}_1 \right) \circ \vec{e}_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right|^2}{|2P_m|^2} \cdot \frac{P_m}{P_1} \tag{10.112}
$$

Hier kann der Wirkungsgrad noch negativ werden, wenn nämlich eine Mode die Leistung entgegen der z- Richtung transportiert ($P_m < 0$). Durch Betragsbildung lässt sich dieser Zustand heilen. Dann ergibt sich nach kürzen um $|P_m|$

$$
|\eta_m| = \frac{\left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_1 \times \vec{H}_m^* + \vec{E}_m^* \times \vec{H}_1 \right) \circ \vec{e}_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right|^2}{\left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} 2\mathrm{Re} \left\{ \vec{E}_m \times \vec{H}_m^* \right\} \circ \vec{e}_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right| \left| \iint\limits_{-\infty}^{\infty} 2\mathrm{Re} \left\{ \vec{E}_1 \times \vec{H}_1^* \right\} \circ \vec{e}_z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \right|} \tag{10.113}
$$

10.3.2 Feldentwicklung in verlustbehafteten Medien

Etwas schwieriger gestaltet sich die Feldentwicklung für verlustbehaftete Medien, da hier die einzelnen linear unabhängigen Lösungen nicht mehr zueinander orthogonal sind. Unter der Annahme, dass wieder die Felder 1 und 2 Lösungen desselben quellfreien aber jetzt verlustbehafteten Problems mit $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ sind, resultiert aus (10.104)

$$\iint\limits_{-\infty}^{+\infty} \left[-i(\gamma_m - \gamma_p^*)\left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} + 2\sigma \vec{E}_m \circ \vec{E}_p^*\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0 \tag{10.114}$$

Die Feldentwicklung nach (10.108) erfolgt jetzt dadurch, dass das Integral $\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \vec{E}_1 \circ \vec{E}_p^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ genauer untersucht wird. Einsetzen von (10.108) und Umformen von (10.114) ergibt

$$\begin{aligned} 2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \vec{E}_1 \circ \vec{E}_p^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= 2\iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \sum_m a_m \vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sum_m a_m \iint\limits_{-\infty}^{\infty} 2\sigma \vec{E}_m \circ \vec{E}_p^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= i\sum_m a_m(\gamma_m - \gamma_p^*) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad . \end{aligned} \tag{10.115}$$

Dieser Schritt wird für alle möglichen Lösungen p der Wellengleichung durchgeführt. Dann resultiert die Matrixgleichung

$$[M_{m,p}](a_m) = (I_p) \quad , \tag{10.116}$$

wobei die einzelnen Elemente der Matrix $[M_{m,p}]$ und des Anregungsvektors (I_p) aus den bekannten Lösungen $\vec{E}_m, \vec{H}_m, \vec{E}_p, \vec{H}_p$ der Maxwellgleichungen zu berechnen sind:

$$M_{m,p} = i(\gamma_m - \gamma_p^*) \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\vec{E}_m \times \vec{H}_p^* + \vec{E}_p^* \times \vec{H}_m\right) \circ \vec{e}_\mathrm{z} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{10.117}$$

$$I_p = 2 \iint\limits_{-\infty}^{\infty} \sigma \vec{E}_1 \circ \vec{E}_p^* \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad . \tag{10.118}$$

Die Amplituden a_m der Feldentwicklung stehen direkt in dem Amplitudenvektor (a_m) und werden mittels Matrixinversion berechnet.

10.4 Berechnung der Felder aus Vektorpotenzialen

Wir wollen hier ein Verfahren angeben, mit dem die Felder in Rechteckhohlleitern aus Potenzialen berechnet werden.

10.4.1 TM- Wellen

Zunächst sollen solche Wellen betrachtet werden, bei denen das magnetische Feld senkrecht zur Wellenleiterachse ($z-$Richtung) stehen, also TM-Wellen. Die Ausbreitung möge in $z-$Richtung erfolgen. Da $\vec{B}$ senkrecht auf $\vec{e_\mathsf{z}}$ steht, resultiert für $\vec{A}$ sofort der Ansatz

$$\boxed{\vec{A} = \sum_{m,n} \tilde{A}_{m,n}\{x,y\} \cdot \exp\left\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\right\} \vec{e_\mathsf{z}} \quad .} \tag{10.119}$$

Wie schon bei der Orthogonalentwicklung in der Elektrostatik wählen wir einen **Produktansatz** für A, diesmal allerdings mit komplexen $\exp$-Funktionen statt $\sin$ und $\cos$ und versuchen es mit $k_\mathsf{x} = m\frac{\pi}{a}$ und $k_\mathsf{y} = n\frac{\pi}{b}$

$$\begin{aligned}\tilde{A} = &\left(A_{1,m}\exp\left\{im\pi\frac{x}{a}\right\} + A_{2,m}\exp\left\{-im\pi\frac{x}{a}\right\}\right)\cdot\\ &\cdot\left(A_{3,n}\exp\left\{in\pi\frac{y}{b}\right\} + A_{4,n}\exp\left\{-in\pi\frac{y}{b}\right\}\right) \quad .\end{aligned} \tag{10.120}$$

Dieser Ansatz für $\vec{A}$ erfüllt die Wellengleichung, wenn die Dispersionsrelation

$$k^2 = \beta^2 + \left(m\pi\frac{1}{x}\right)^2 + \left(n\pi\frac{1}{b}\right)^2 \tag{10.121}$$

erfüllt ist. Der Ausbreitungskoeffizient β folgt also aus

$$\boxed{k_{\mathsf{z},m,n} = +\sqrt{k^2 - \left(m\pi\frac{1}{x}\right)^2 - \left(n\pi\frac{1}{y}\right)^2} \tag{10.122}}$$

wobei Ausbreitung in positive $z-$Richtung vorausgesetzt wurde. Auf den Wellenleiterwänden muss das tangentiale elektrische Feld verschwinden. Aus dieser Stetigkeitsbedingung folgen die Bestimmungsgleichungen für $A_{1,m}$, $A_{2,m}$, $A_{3,n}$ und $A_{4,n}$. Es gilt

$$\vec{E} = -i\frac{c^2}{\omega}\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A}\right] \tag{10.123}$$

und mit der Wellengleichung

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -i\frac{c^2}{\omega}\left[\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) + k^2\vec{A}\right] \\ &= -i\frac{c^2}{\omega}\left[\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}A\vec{e_{\mathsf{x}}} + \frac{\partial^2}{\partial y\partial z}A\vec{e_{\mathsf{y}}} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2}A + k^2A\right)\vec{e_{\mathsf{z}}}\right] \quad .\end{aligned} \tag{10.124}$$

Die $x-$Komponente lautet also

$$\begin{aligned}E_{\mathsf{x}} = \vec{e_{\mathsf{x}}}\circ\vec{E} = i\frac{c^2}{\omega} \\ &\cdot\sum_m\sum_n m\frac{\pi}{a}k_{\mathsf{z},m,n} \\ &\cdot\left(A_{1,m}\cdot\exp\left\{im\pi\frac{x}{a}\right\} - A_{2,m}\cdot\exp\left\{-im\pi\frac{x}{a}\right\}\right) \\ &\cdot\left(A_{3,n}\cdot\exp\left\{in\pi\frac{y}{b}\right\} + A_{,4n}\cdot\exp\left\{-in\pi\frac{y}{b}\right\}\right) \\ &\cdot\exp\left\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n}z)\right\} \quad .\end{aligned} \tag{10.125}$$

Da sich im folgenden in den Klammertermen oft nur das Vorzeichen ändert, wird zur Vereinfachung der Darstellung auf die Ausformulierung, wie in (10.125), verzichtet und die y-Komponente ist dann

$$E_{\mathsf{y}} = \vec{e_{\mathsf{y}}} \circ \vec{E} = i\frac{c^2}{\omega} \cdot \sum_{m}^{\infty}\sum_{n}^{\infty} n\frac{\pi}{b}k_{\mathsf{z},m,n}\left(\ldots+\ldots\right)\left(\ldots+\ldots\right)\exp\left\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n}z)\right\} \quad . \tag{10.126}$$

Die z-Komponente ist

$$E_{\mathsf{z}} = \vec{e_{\mathsf{z}}} \circ \vec{E} = -i\frac{c^2}{\omega} \cdot \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}(k^2 - k_{\mathsf{z},m,n}^2)\left(\ldots+\ldots\right)\left(\ldots+\ldots\right)\exp\left\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n}z)\right\} \quad . \tag{10.127}$$

Das tangentiale elektrische Feld auf den Wänden bei $y = 0$ und $y = b$ ist E_{x} und E_{z}. Betrachten wir nur E_{x}, resultiert aus $E_{\mathsf{x}}\{y=0\} \stackrel{!}{=} 0$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} m\left(\ldots-\ldots\right)\left(A_{3,n}+A_{4,n}\right) \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.128}$$

und aus $E_{\mathsf{x}}\left\{y=b\right\} \stackrel{!}{=} 0$ folgt mit $\exp\left\{\pm in2\pi\right\} = 1$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m\left(\ldots-\ldots\right)\left(A_{3,n}+A_{4,n}\right)\cdot\exp\left\{in\pi\right\} \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.129}$$

Vergleicht man mit der Bedingung für die $z-$Komponente bei $y = 0$ und $y = b$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ldots+\ldots\right)\left(A_{3,n}+A_{4,n}\right)\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \tag{10.130}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\ldots+\ldots\right)\left(A_{3,n}+A_{4,n}\right)\exp\left\{in\pi\right\}\left[\left(\frac{m}{a}\right)^2+\left(\frac{n}{b}\right)^2\right] \tag{10.131}$$

stellt man fest, dass der erste Faktor in den Summen nur dann in allen vier Gleichungen Null ergibt, wenn sowohl $A_{1,m}$ und $A_{2,m}$ verschwindet. Dies ist die (nicht gesuchte) Triviallösung mit dem Resultat $\vec{A} = 0$. Auf der anderen Seite lässt sich eine Lösung finden, wenn $A_{4,n} = -A_{3,n}$ ist. Außerdem muss $m \neq 0$ sein. Mit der gleichen Diskussion für das tangentiale Feld bei $x = 0$ und $x = a$ resultiert $A_{2,m} = -A_{1,m}$. Zusammenfassen des Produktes $A_{1,m} \cdot A_{3,n} = \frac{1}{2i} A_{m,n}$ ergibt

$$\boxed{\tilde{A}_{m,n} = A_{m,n} \sin\left\{m\pi \frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi \frac{y}{b}\right\} \quad .} \tag{10.132}$$

Der Fall, dass m oder n gleich Null ist, also $m \cdot n = 0$, ist auszuschließen, da dann sowohl $\vec{E} = 0$ als auch $\vec{H} = 0$ werden weil $\tilde{A}_{m,n} = 0$ wird. Es gilt also die bereits bekannte Nebenbedingung $m \cdot n > 0$ für TM-Wellen. Die Felder lauten dann

$$\begin{aligned}\vec{B} = & \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \cdot \left(\frac{n\pi}{b} \sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_{\mathsf{x}} - \frac{\pi m}{a} \cos\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_{\mathsf{y}}\right) \\ & \cdot \exp\left\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\right\}\end{aligned} \tag{10.133}$$

$$\begin{aligned}\vec{E} = & -i\frac{c^2}{\omega} \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \exp\left\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\right\} \\ & \cdot \Bigg(- i\frac{m\pi \cdot k_{\mathsf{z},m,n}}{a} \cos\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_{\mathsf{x}} \\ & + - i\frac{n\pi k_{\mathsf{z},m,n}}{b} \sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_{\mathsf{y}} \\ & + \left(k^2 - k_{\mathsf{z},m,n}^2\right) \sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e}_{\mathsf{z}}\Bigg)\end{aligned} \tag{10.134}$$

10.4.2 TE- Wellen

Betrachtet man TE-Wellen, so wird das elektrische Vektorpotenzial $\vec{F}$ zur Berechnung herangezogen. Mit dem gleichen Ansatz wie für das magnetische Vektorpotenzial gilt

$$\boxed{\vec{F} = -\varepsilon\varepsilon_0 \sum \tilde{F}_{m,n}\{x,y\} \cdot \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\}\, \vec{e_{\mathsf{z}}}} \tag{10.135}$$

und

$$\begin{aligned}\tilde{F}_{m,n} = &\left(F_{1,m} \exp\left\{im\pi\frac{x}{a}\right\} + F_{2,m} \exp\left\{-im\pi\frac{x}{a}\right\}\right) \cdot \\ &\cdot \left(F_{3,n} \exp\left\{in\pi\frac{y}{b}\right\} + F_{4,n} \exp\left\{-in\pi\frac{y}{b}\right\}\right) \quad .\end{aligned} \tag{10.136}$$

Das elektrische Feld ist dann mit $\vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{F}$

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{m,n} \left(\frac{\partial}{\partial y}\tilde{F}_{m,n}\vec{e_{\mathsf{x}}} - \frac{\partial}{\partial x}\tilde{F}_{m,n}\vec{e_{\mathsf{y}}}\right) \tag{10.137}$$

und damit in vorher eingeführter Kurzschreibweise bezüglich (10.136)

$$E_{\mathsf{x}} = i\pi\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \cdot n \cdot (\ldots + \ldots)(\ldots - \ldots) \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\} \tag{10.138}$$

$$E_{\mathsf{y}} = i\pi\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} \cdot m \cdot (\ldots - \ldots)(\ldots + \ldots) \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\} \tag{10.139}$$

Die Stetigkeitsbedingungen bei $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ und $y = b$ erfordern

$$\sum_m \sum_n (\ldots + \ldots)(F_{3,n} - F_{4,n}) \cdot n \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.140}$$

$$\sum_m \sum_n (\ldots + \ldots)(F_{3,n} - F_{4,n}) \exp\{-n\pi\} \cdot n \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.141}$$

$$\sum_m \sum_n (F_{1,m} - F_{2,m})(\ldots + \ldots) \cdot m \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.142}$$

$$\sum_m \sum_n (F_{1,m} - F_{2,m})(\ldots + \ldots) \exp\{-m\pi\} \cdot m \stackrel{!}{=} 0 \tag{10.143}$$

Dies lässt sich nur erfüllen, wenn $F_{4,n} = F_{3,n}$ und $F_{2,m} = F_{1,m}$ ist. Ausklammern und ersetzen von $F_{1,m} \cdot F_{3,n} = \frac{1}{2}F_{m,n}$ ergibt

$$\boxed{\tilde{F}_{m,n} = F_{m,n} \cos\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \quad . \qquad (10.144)}$$

Der Fall, dass gleichzeitig m und n gleich Null werden, also $m + n = 0$, ist auszuschließen, da dann keine Felder existieren, weil $\vec{F}$ ortsunabhängig wird. Es gilt also die Nebenbedingung $m + n > 0$. Die Felder lauten

$$\begin{aligned}\vec{E} = &-\sum_{m,n} \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0} F_{m,n} \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\} \\ &\cdot \left(\frac{n\pi}{b} \cos\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e_{\mathsf{x}}} + \frac{m\pi}{a} \sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e_{\mathsf{y}}}\right) \qquad (10.145)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{B} = -i\omega\mu\mu_0 &\sum_{m,n} F_{m,n} \cdot \exp\{i(\omega t - k_{\mathsf{z},m,n} z)\} \\ &\left(i\frac{k_{\mathsf{z},m,n} m\pi}{a} \sin\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e_{\mathsf{x}}} \right. \\ &\quad + i\frac{k_{\mathsf{z},m,n} n\pi}{b} \cos\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \sin\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e_{\mathsf{y}}} \\ &\quad \left. + (k^2 - k_{\mathsf{z},m,n}^2) \cos\left\{m\pi\frac{x}{a}\right\} \cos\left\{n\pi\frac{y}{b}\right\} \vec{e_{\mathsf{z}}} \right) \quad . \qquad (10.146)\end{aligned}$$

10.5 Eigenwellen eines Rundhohlleiters

Wie wir im vorigen Abschnitt sahen, eignen sich die Potenziale $\vec{A}$ und $\vec{F}$ zur Berechnung der Eigenwellen eines Wellenleiters. Der von der Orthogonalentwicklung bekannte Ansatz in kartesischen Koordinaten führte mit geringen Modifikationen zur Lösung beim Rechteckhohlleiter. Hier wollen wir nun das gleiche Verfahren auf einen Rundhohlleiter anwenden.

10.5.1 TM-Eigenwellen

Wir wählen den Ansatz

$$\vec{A} = \sum_m \sum_n \tilde{A}_{m,n}\{\varrho\} \exp\{i(\omega t + m\varphi - \varphi_0 - k_{\mathsf{z}m,n} z)\} \vec{e_{\mathsf{z}}} \tag{10.147}$$

mit

$$\tilde{A}_{m,n} = \tilde{A}_{1,m,n}\, \mathrm{J}_m \left\{\kappa_{m,n} \frac{\varrho}{a}\right\} + \tilde{A}_{2,m,n}\, \mathrm{N}_m \left\{\kappa_{m,n} \cdot \frac{\varrho}{a}\right\} \tag{10.148}$$

Die homogene Wellengleichung $\Delta \vec{A} + k^2 \vec{A} = 0$ ist erfüllt, wenn die Dispersionsrelation

$$k^2 = k_{\mathsf{z}m,n}^2 + \left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2 \tag{10.149}$$

gilt. Dies ist eine Bestimmungsgleichung für den frei wählbaren Ausbreitungskoeffizienten in $z-$Richtung

$$\boxed{k_{\mathsf{z}m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2}} \tag{10.150}$$

Das elektrische Feld folgt aus

$$\begin{aligned}
\vec{E} &= \frac{c^2}{i\omega} \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right) \\
&= \frac{c^2}{i\omega} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \varphi} A \vec{e_{\varrho}} - \frac{\partial}{\partial \varrho} A \vec{e_{\varphi}}\right) \\
&= \frac{c^2}{i\omega} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} A \vec{e_{\varphi}} + \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial z} A \vec{e_{\varrho}} + \left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} A - \Delta A\right) \vec{e_{\mathsf{z}}}\right] \\
&= \frac{c^2}{i\omega} \left[\frac{1}{\varrho} \frac{\partial^2}{\partial \varphi \partial z} A \vec{e_{\varphi}} + \frac{\partial^2}{\partial \varrho \partial z} A \vec{e_{\varrho}} + \left(k^2 - k_{\mathsf{z}m,n}^2\right) A \vec{e_{\mathsf{z}}}\right]
\end{aligned} \tag{10.151}$$

Einsetzen des Ansatzes ergibt für die Tangentialkomponenten

$$\vec{e_\varphi} \circ \vec{E} = \frac{c^2}{i\omega} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sum_m \sum_n m k_{\mathsf{z}m,n} \cdot \tilde{A}_{m,n} \exp\left\{i\left(\omega t + m\varphi - \varphi_0 - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \quad (10.152)$$

und

$$\vec{e_\mathsf{z}} \circ \vec{E} = \frac{c^2}{i\omega} \sum_m \sum_n \left(k^2 - k_{\mathsf{z}m,n}^2\right) \cdot \tilde{A}_{m,n} \exp\left\{i\left(\omega t + m\varphi - \varphi_0 - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \quad (10.153)$$

Auf der Metallwand ($\varrho = a$) muss das tangentiale elektrische Feld verschwinden. Daraus resultiert wegen

$$\vec{e_\varphi} \circ \vec{E}\Big|_{\varrho=a} = \frac{c^2}{i\omega} \frac{1}{\varrho} \sum \sum m \cdot k_{\mathsf{z}m,n} \cdot A_{2,m,n} \, \mathrm{N}_m \left\{\kappa_{m,n}\right\} \cdot \exp\left\{\ldots\right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad (10.154)$$

und

$$\vec{e_\mathsf{z}} \circ \vec{E}\Big|_{\varrho=a} = \frac{c^2}{i\omega} \sum \sum \left(k^2 - k_{\mathsf{z}m,n}^2\right) A_{2,m,n} \, \mathrm{N}_m \left\{\kappa_{m,n}\right\} \cdot \exp\left\{\ldots\right\} \stackrel{!}{=} 0 \quad ,(10.155)$$

dass $A_{2mn} = 0$ sein muss, ansonsten lassen sich nicht beide Stetigkeitsbedingungen gleichzeitig erfüllen. Das magnetische Vektorpotenzial lautet demnach

$$\vec{A} = \sum_m \sum_n A_{m,n} \, \mathrm{J}_m \left\{\kappa_{m,n} \frac{\varrho}{a}\right\} \cdot \exp\left\{i\left(m\varphi - \varphi_0\right)\right\} \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \quad (10.156)$$

mit

$$k_{\mathsf{z}m,n} = \begin{cases} \beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2} & \text{für} \quad \kappa_{m,n} \leq k \cdot a \\ -i\alpha_{m,n} = -i\sqrt{\left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2 - k^2} & \text{für} \quad \kappa_{m,n} > k \cdot a \end{cases} \quad (10.157)$$

Eine TM-Welle ist im Hohlleiter ausbreitungsfähig, wenn $\kappa_{m,n} < k \cdot a$ wird. Die Felder lauten

$$\vec{B} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{m,n} \cdot \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n}\cdot z\right)\right\} \exp\left\{i\left(m\varphi - \varphi_0\right)\right\}$$
$$\cdot\left[\frac{m}{\varrho}\cdot \mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varrho} - \underbrace{\frac{\partial}{\partial\varrho}\mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\cdot\frac{\varrho}{a}\right\}}_{\frac{1}{2}(\mathrm{J}_{m-1}\{\ldots\}-\mathrm{J}_{m+1}\{\ldots\})\frac{\kappa_{m,n}}{a}} \vec{e_\varphi}\right] \tag{10.158}$$

und

$$\vec{E} = \frac{c^2}{i\omega}\sum_m\sum_n A_{m,n}\exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n}\cdot z\right)\right\}\exp\left\{i\left(m\varphi-\varphi_0\right)\right\}$$
$$\cdot\left[-i\frac{k_{\mathsf{z}m,n}\cdot\kappa_{m,n}}{2a}\left(\mathrm{J}_{m-1}\left\{\frac{\kappa_{m,n}\varrho}{a}\right\} - \mathrm{J}_{m+1}\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\right)\vec{e_\varrho}\right.$$
$$\left. -i\frac{k_{\mathsf{z}m,n}\cdot m}{\varrho}\mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varphi} + \mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2\cdot\vec{e_\mathsf{z}}\right] \tag{10.159}$$

Für die Grundwelle ist $m = 0$ und $n = 1$. Wegen $\mathrm{J}_{-1}\{x\} = -\mathrm{J}_1\{x\}$ lauten die Felder dann einfach

$$\vec{B}_{0,1} = A_{0,1}\exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n}z - \varphi_0\right)\right\}\cdot\frac{\kappa_{0,1}}{a}\cdot\mathrm{J}_1\left\{\kappa_{0,1}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varphi} \tag{10.160}$$

und

$$\vec{E}_{0,1} = \frac{c^2}{i\omega}A_{0,1}\exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n}z - \varphi_0\right)\right\}$$
$$\cdot\left[i\frac{k_{\mathsf{z},0,1}\kappa_{0,1}}{a}\mathrm{J}_1\left\{\kappa_{0,1}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varrho} + \left(\frac{\kappa_{0,1}}{a}\right)^2\mathrm{J}_0\left\{\kappa_{0,1}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\mathsf{z}}\right] \tag{10.161}$$

10.5.2 TE-Eigenwellen

Zur Berechnung der TE-Welle verwenden wir den Ansatz

$$\vec{F} = -\varepsilon\varepsilon_0\sum_m\sum_n \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n}z\right)\right\}\exp\left\{i\left(m\varphi-\varphi_0\right)\right\}$$
$$\cdot\left(F_{m,n,1}\mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\} + F_{m,n,2}\mathrm{N}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\right)\vec{e_\mathsf{z}} \quad . \tag{10.162}$$

Auch hier ist die Wellengleichung erfüllt, wenn $\left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2 + k^2_{\mathsf{z},m,n} = k^2$ wird. Das tangentiale elektrische Feld auf der Hohlleiterwand muss verschwinden. Da $\vec{E}$ nur eine ϱ- und eine φ-Komponente aufweist, lautet die Forderung

$$\begin{aligned} \vec{e_\varphi} \circ \vec{E}\Big|_{\varrho=a} &\stackrel{!}{=} 0 \\ &= -\sum_m \sum_n \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \exp\left\{i\left(m\varphi - \varphi_0\right)\right\} \\ &\quad \cdot \left(F_{m,n,1} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \mathrm{J}_m \left\{\kappa_{m,n} \frac{\varrho}{a}\right\}\Big|_{\varrho=a} + F_{m,n,2} \cdot \frac{\partial}{\partial \varrho} \mathrm{N}_m \left\{\kappa_{m,n} \frac{\varrho}{a}\right\}\Big|_{\varrho=a} \right) \quad . \end{aligned} \tag{10.163}$$

Mit dieser Forderung kann noch keine Bestimmung von $\kappa_{m,n}$, $F_{m,n,1}$ und $F_{m,n,2}$ getroffen werden. Das Feld bei $\varrho = 0$ darf nicht divergieren, da sonst der Poyntingvektor divergiert und damit unendlich viel Leistung transportiert wird. Aus dieser Überlegung folgt $F_{m,n,2} = 0$ und damit sofort

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varrho} \mathrm{J}_m \left\{\kappa_{m,n} \cdot \frac{\varrho}{a}\right\}\Big|_{\varrho=a} = \frac{\kappa_{m,n}}{a} \mathrm{J}'_m \left\{\kappa_{m,n}\right\} = 0 \tag{10.164}$$

Die $\kappa_{m,n}$ sind also die Nullstellen der ersten Ableitung von J_m. Zu beachten ist, dass für alle Besselfunktionen J_m außer J_1 $\lambda_{m,1} = 0$ ist. Für das Potenzial folgt also mit $F_{m,n,1} = F_{m,n}$

$$\vec{F} = -\varepsilon\varepsilon_0 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} F_{m,n} \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \exp\left\{i\left(m\varphi - \varphi_0\right)\right\} \mathrm{J}_m \left\{\kappa_{m,n} \frac{\varrho}{a}\right\} \vec{e_\mathsf{z}} \tag{10.165}$$

mit

$$k_{\mathsf{z}m,n} = \begin{cases} \beta_{m,n} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2} & \text{für} \quad ka \geq \kappa_{m,n} \\ -i\alpha_{m,n} = -i\sqrt{\left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2 - k^2} & \text{für} \quad ka < \kappa_{m,n} \end{cases} \quad . \tag{10.166}$$

Die Felder haben die Darstellung

$$\vec{E} = \sum_m \sum_n \quad F_{m,n} \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \exp\left\{i\left(m\varphi - \varphi_0\right)\right\}$$
$$\cdot \left[i\frac{m}{\varrho}\,\mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varrho} - \frac{\kappa_{m,n}}{a}\,\mathrm{J}'_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varphi}\right] \tag{10.167}$$

$$\vec{B} = \frac{1}{-i\omega}\sum_m \sum_n F_{m,n} \exp\left\{i\left(\omega t - k_{\mathsf{z}m,n} z\right)\right\} \exp\left\{i\left(m\varphi - \varphi_0\right)\right\} \tag{10.168}$$
$$\cdot \left[-i\frac{k_{\mathsf{z}m,n}\kappa_{m,n}}{a}\cdot \mathrm{J}'_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varrho} + \frac{m k_{\mathsf{z}m,n}}{\varrho}\,\mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_\varphi} + \left(\frac{\kappa_{m,n}}{a}\right)^2 \mathrm{J}_m\left\{\kappa_{m,n}\frac{\varrho}{a}\right\}\vec{e_{\mathsf{z}}}\right]$$

Zur Berechnung von $\vec{B}$ siehe auch Fußnote[1]

10.6 Hohlraumresonatoren

Hohlraumresonatoren entstehen, wenn Hohlrohrwellenleiter am Anfang und Ende mit leitenden Platten abgeschlossen werden. Die Hohlrohrwellen müssen dann in der Anfangsebene $z = 0$ und Endebene $z = d$ zusätzlich noch die Randbedingungen $E_{\mathsf{x}}\{z = 0\} = 0$, $E_{\mathsf{y}}\{z = 0\} = 0$ und $E_{\mathsf{x}}\{z = d\} = 0$ und $E_{\mathsf{y}}\{z = d\} = 0$ erfüllen. Man kann dies einfach dadurch erreichen, dass man zwei in positive und negative z-Richtung laufende Hohlrohrwellen mit geeigneter Phase überlagert

$$\vec{E}\{x, y, z, t\} = \hat{\vec{E}}\{x, y\}\frac{1}{2}\Big(\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} + \exp\{i\,\omega t + i\,k_{\mathsf{z}} z\}\Big) \tag{10.169}$$

[1] Die ersten beiden Komponenten wurden aus $-i\omega\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{E}$ bestimmt. Für die z- Komponente gibt es zwei Möglichkeiten: Im ersten Fall wird die z- Komponente ebenfalls wie zuvor berechnet. Es ergibt sich dann die Differentialgleichung $(-1/\rho)^2[(\kappa_{m,n}\rho/a)\,\mathrm{J}'_m\{\kappa_{m,n}\rho/a\} + (\kappa_{m,n}\rho/a)^2\,\mathrm{J}''_m\{\kappa_{m,n}\rho/a\} + m^2\,\mathrm{J}_m\{\kappa_{m,n}\rho/a\}]$. Durch Erweiterung um den Summanden $(\kappa_{m,n}\rho/a)^2\,\mathrm{J}_m\{\kappa_{m,n}\rho/a\}$ entsteht daraus die Besselsche Differentialgleichung $x^2y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0$, womit obiges Ergebnis geklärt wäre. Der andere Weg verwendet den Zusammenhang $\vec{E} = (1/\varepsilon\varepsilon_0)\vec{\nabla}\times\vec{F}$, der in die vorige Gleichung eingesetzt wird. Es resultiert $(-i\omega\varepsilon\varepsilon_0)\vec{B} = \vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{F}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{F}) - \Delta\vec{F}$. Die z- Komponente von $\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\circ\vec{F})$ ergibt $-k^2_{\mathsf{z}m,n}(\vec{F}\circ\vec{e}_{\mathsf{z}})$ während nach Verwendung der Wellengleichung $\Delta\vec{F}$ durch $-k^2\vec{F}$ zu ersetzen ist. Zusammengefasst resultiert also $\vec{B}\circ\vec{e}_{\mathsf{z}} = (-1/i\omega\varepsilon\varepsilon_0)(\kappa^2_{m,n}/a^2)(\vec{F}\circ\vec{e}_{\mathsf{z}})$

für TM-Wellen und

$$\vec{H}\{x,y,z,t\} = \vec{\tilde{H}}\{x,y\}\frac{1}{2i}\Big(\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} - \exp\{i\,\omega t + i\,k_{\mathsf{z}} z\}\Big) \tag{10.170}$$

für TE-Wellen. Die Randbedingungen bei $z = 0$ sind damit zu erfüllen.

Wenn man noch

$$k_{\mathsf{z}} = \frac{n\pi}{d} \quad n \text{ ganzzahlig} \tag{10.171}$$

verlangt, wobei d nach Abbildung 10.5 die Resonatorlänge bezeichnet, ist auch die Randbedingung am anderen Ende $z = d$ gewährleistet.

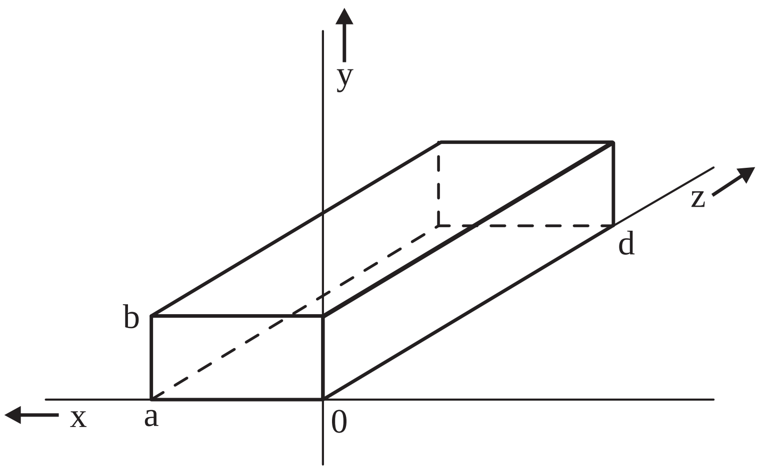


Abbildung 10.5: Rechteckhohlraumresonator

Da in Wellenleitern bereits nur diskrete Werte für k_{x} und k_{y} auftreten und jetzt noch Bedingungen für k_{z} hinzukommen, gibt es wegen der zu erfüllenden Dispersionsrelation

$$\boxed{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\omega^2 = \frac{\omega^2}{c^2} = k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2 + k_{\mathsf{z}}^2} \tag{10.172}$$

nur diskrete Frequenzen ω_{i}, bei denen sich Wellen in einem Hohlraumresonator ausbilden können. Bei diesen Resonanzfrequenzen schwingt der Hohlraumresonator. Die Schwingungsform leitet sich aus den Hohlrohrwellen ab. In z-Richtung gibt es Stehwellen mit insgesamt n Knoten. Die Bezeichnung der Schwingungen erfordert drei Indizes und im allgemeinen zwei Polarisationsmöglichkeiten TE und TM, so dass wir Schwingungen $\mathrm{TE}_{l,m,n}$ und $\mathrm{TM}_{l,m,n}$ unterscheiden, wenn der Hohlleiter TE- und TM-Wellen führt. Im Koaxialleiterresonator gibt es dagegen TEM-Wellen und damit $\mathrm{TEM}_{l,m,n}$-Eigenschwingungen. Wir diskutieren im folgenden Resonanzschwingungen des Rechteckhohlraumresonators.

10.6.1 TE-Eigenschwingungen des Rechteckhohlraumresonators

Wir gehen genauso vor wie in Abschnitt 10.2.1, müssen jetzt aber eine vor- und rücklaufende Welle überlagern. Wir starten von (10.57)

$$H_\mathsf{z} = C_\mathsf{TE}\frac{1}{2i}\cos\{k_\mathsf{x}x\}\cos\{k_\mathsf{y}y\}\big(\exp\{i\,\omega t - i\,k_\mathsf{z}z\} + \exp\{i\,\omega t + i\,k_\mathsf{z}z\}\big) \tag{10.173}$$

$$= C_\mathsf{TE}\cos\{k_\mathsf{x}x\}\cos\{k_\mathsf{y}y\}\sin\{k_\mathsf{z}z\}\exp\{i\,\omega t\} \quad . \tag{10.174}$$

Bei der Berechnung der anderen Komponenten werden (10.27) bis (10.30) benutzt, wobei in (10.29) und (10.30) zu berücksichtigen ist dass für die rücklaufende Welle

$$H_\mathsf{x} = i\frac{k_\mathsf{z}}{k_\rho^2}\frac{\partial H_\mathsf{z}}{\partial x} \tag{10.175}$$

und

$$H_\mathsf{y} = i\frac{k_\mathsf{z}}{k_\rho^2}\frac{\partial H_\mathsf{z}}{\partial y} \tag{10.176}$$

gelten. Damit bekommen wir insgesamt für das Feld der TE-Eigenschwingung

$$H_\mathsf{z} = C_\mathsf{TE}\cos\{k_\mathsf{x}x\}\cos\{k_\mathsf{y}y\}\sin\{k_\mathsf{z}z\}\exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.177}$$

$$E_\mathsf{z} = 0 \quad , \tag{10.178}$$

$$E_{\mathsf{x}} = i\frac{\omega\mu\mu_0}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TE}} \cos\{k_{\mathsf{x}}x\} \sin\{k_{\mathsf{y}}y\} \sin\{k_{\mathsf{z}}z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.179}$$

$$E_{\mathsf{y}} = -i\frac{\omega\mu\mu_0}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TE}} \sin\{k_{\mathsf{x}}x\} \cos\{k_{\mathsf{y}}y\} \sin\{k_{\mathsf{z}}z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.180}$$

$$H_{\mathsf{x}} = -\frac{k_{\mathsf{x}}k_{\mathsf{z}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TE}} \sin\{k_{\mathsf{x}}x\} \cos\{k_{\mathsf{y}}y\} \cos\{k_{\mathsf{z}}z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.181}$$

$$H_{\mathsf{y}} = -\frac{k_{\mathsf{y}}k_{\mathsf{z}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TE}} \cos\{k_{\mathsf{x}}x\} \sin\{k_{\mathsf{y}}y\} \cos\{k_{\mathsf{z}}z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad . \tag{10.182}$$

Die Randbedingung $E_{\mathsf{x}}\{z=0\} = 0$ und $E_{\mathsf{y}}\{z=0\} = 0$ sind erfüllt.

Für

$$k_{\mathsf{z}} = \frac{n\pi}{d} \tag{10.183}$$

mit ganzzahligem n ist auch die Randbedingung bei $z = d$ erfüllt. Für Hohlrohrwellen galt bislang schon

$$k_{\mathsf{x}} = \frac{\ell\pi}{a} \tag{10.184}$$

und

$$k_{\mathsf{y}} = \frac{m\pi}{b} \quad , \tag{10.185}$$

so dass nach der Dispersionsrelation für die Eigenfrequenzen

$$\boxed{\omega_{\ell,m,n} = c\pi\sqrt{\left(\frac{\ell}{a}\right)^2 + \left(\frac{m}{b}\right)^2 + \left(\frac{n}{d}\right)^2}} \tag{10.186}$$

folgt, wobei ℓ, m, n ganzzahlig sind. Die Schwingungsmuster ergeben sich aus (10.177) bis (10.182). Die Eigenschwingungen werden mit $\mathrm{TE}_{\ell,m,n}$ bezeichnet. Aus den Feldverteilungen liest man ab, dass es keine $\mathrm{TE}_{\ell,m,0}$-Wellen für $n = 0$ und ℓ, m beliebig geben kann, da hierfür $\vec{E} \equiv 0$ ist. Alle anderen ganzzahligen Tripel ergeben erlaubte Wellenformen. Die Welle mit der niedrigsten Eigenfrequenz ist $\mathrm{TE}_{1,0,1}$ bzw. $\mathrm{TE}_{0,1,1}$. Die Modenzahlen ℓ, m, n müssen die Bedingung

$$\boxed{n(\ell + m) > 0} \tag{10.187}$$

erfüllen.

10.6.2 TM-Eigenschwingungen des Rechteckhohlraumresonators

Wir gehen hierbei aus von der Überlagerung der beiden vor- und rücklaufenden TM-Hohlrohrwellen nach (10.80)

$$\begin{aligned} E_{\mathsf{z}} &= \frac{1}{2} C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} \big(\exp\{i\,\omega t - i\,k_{\mathsf{z}} z\} + \exp\{i\,\omega t + i\,k_{\mathsf{z}} z\}\big) \\ &= C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} \cos\{k_{\mathsf{z}} z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad . \end{aligned} \tag{10.188}$$

Die anderen Feldkomponenten erhalten wir aus (10.32) bis (10.35). Insgesamt haben wir

$$E_{\mathsf{z}} = C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} \cos\{k_{\mathsf{z}} z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.189}$$

$$H_{\mathsf{z}} = 0 \quad , \tag{10.190}$$

$$E_{\mathsf{x}} = i \frac{k_{\mathsf{z}} k_{\mathsf{x}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \cos\{k_{\mathsf{x}} x\} \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} \sin\{k_{\mathsf{z}} z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.191}$$

$$E_{\mathsf{y}} = i \frac{k_{\mathsf{z}} k_{\mathsf{y}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} \cos\{k_{\mathsf{y}} y\} \sin\{k_{\mathsf{z}} z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.192}$$

$$H_{\mathsf{x}} = i \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 k_{\mathsf{y}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \sin\{k_{\mathsf{x}} x\} \cos\{k_{\mathsf{y}} y\} \cos\{k_{\mathsf{z}} z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad , \tag{10.193}$$

$$H_{\mathsf{y}} = -i \frac{\omega \varepsilon \varepsilon_0 k_{\mathsf{x}}}{k_{\mathsf{x}}^2 + k_{\mathsf{y}}^2} C_{\mathsf{TM}} \cos\{k_{\mathsf{x}} x\} \sin\{k_{\mathsf{y}} y\} \cos\{k_{\mathsf{z}} z\} \exp\{i\,\omega t\} \quad . \tag{10.194}$$

Zur Erfüllung der Randbedingungen muss man dieselben Bedingungen (10.183) bis (10.185) wie für TE-Eigenschwingungen verlangen. Damit ergeben sich nach (10.186) auch dieselben Eigenfrequenzen. TE- und TM-Eigenschwingungen derselben Ordnung sind also entartet.

Es gibt keine $\mathrm{TM}_{0,m,n}$-Eigenschwingungen für $\ell = 0$ und m, n beliebig und auch keine $\mathrm{TM}_{\ell,0,n}$-Eigenschwingungen für $m = 0$ und ℓ, n beliebig, denn hierfür sind nach (10.189) bis (10.194) nur E_x und H_y bzw. E_y und H_z von Null verschieden, und man hätte nicht existierende TEM-Moden. Die TM-Eigenschwingung mit der kleinsten Eigenfrequenz ist $\mathrm{TM}_{1,1,0}$. Es gilt die Bedingung

$$\boxed{\ell \cdot m > 0 \quad . \qquad (10.195)}$$

Durch geeignete Abmessungen $a > d > b$ erreicht man, dass die Eigenwelle mit der kleinsten Eigenfrequenz die $\mathrm{TE}_{1,0,1}$-Welle ist. Sie ist nicht entartet, da die entsprechende TM-Eigenschwingung nicht existieren kann.

Kapitel 11

Abstrahlung harmonisch schwingender Quellen

In Abschnitt 6.5 hatten wir mit den Gleichungen (7.95) bzw. (7.129) die retardierten Potenziale als partikuläre Lösungen der inhomogenen Wellengleichung kennengelernt. Bezogen auf die Wellengleichung (7.87) lautet die retardierte Lösung mit der Greenschen Funktion

$$\phi_{\mathsf{el}} = q \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \int_{\infty}^{\infty} \frac{\varrho\left\{\vec{r}', t'\right\}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} G\left\{\vec{r}, \vec{r}', t, t'\right\} \ \mathrm{d}t' \ \mathrm{d}r' \quad . \tag{11.1}$$

Im freien Raum folgt daraus die Darstellung

$$\boxed{\phi_{\mathsf{el}} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0} \frac{\varrho\left\{\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ \mathrm{d}^3 r'} \tag{11.2}$$

Die analoge Lösung für das magnetische Vektorpotenzial im freien Raum lautet

$$\boxed{\vec{A}\{\vec{r}, t\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{j}\left\{\vec{r}', t - \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \ \mathrm{d}^3 r' \quad .} \tag{11.3}$$

Die Ladungsdichte ϱ bzw. die Stromdichte $\vec{j}$ bestimmt also als Quelle am Ort $\vec{r}'$ mit einer Laufzeitverzögerung $\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}$ das Potenzial an jedem Ort $\vec{r}$ und zu jedem Zeitpunkt t.
Für eine zeitlich harmonische Stromdichteverteilung

$$\vec{j}\,\{\vec{r},t\} = \vec{\hat{j}}\{\vec{r}\}\cos\{\omega t\} = \text{Re}\left\{\vec{\hat{j}}\{\vec{r}\}e^{i\,\omega t}\right\} \tag{11.4}$$

erhalten wir sofort

$$\vec{A}\{\vec{r},t\} = \text{Re}\left\{e^{i\omega t}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\hat{j}}\{\vec{r}'\}e^{-i\,k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'\right\} \quad , \tag{11.5}$$

wobei $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$ benutzt wurde. Wir werden im folgenden die Realteilbildung wieder konventionsgemäß weglassen und schreiben

$$\vec{A}\{\vec{r},t\} = \vec{\hat{A}}\{\vec{r}\}e^{i\,\omega t} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{\hat{j}}\{\vec{r}'\}e^{-i\,k|\vec{r}-\vec{r}'|}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r' e^{i\,\omega t} \quad . \tag{11.6}$$

Damit ergibt sich das Magnetfeld

$$\vec{H}\{\vec{r},t\} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{A}\{\vec{r},t\} = \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{\hat{A}}(\vec{r})e^{i\,\omega t} \quad . \tag{11.7}$$

Das elektrische Feld erhält man außerhalb der Stromverteilung $(\vec{j} = 0)$ einfach aus dem Ampère-Maxwellschen Gesetz

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = i\,\omega\varepsilon\varepsilon_0\vec{E} \quad , \tag{11.8}$$

wobei auch für das elektrische Feld eine harmonische Zeitabhängigkeit angenommen wurde. Mit dem Wellenwiderstand $Z = \sqrt{\frac{\mu\mu_0}{\varepsilon\varepsilon_0}}$ kann man auch schreiben

$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = -i\frac{Z}{k}\vec{\nabla}\times\vec{H}\{\vec{r},t\} \quad . \tag{11.9}$$

Die hier berechneten Felder sind unabhängig von irgendwelchen Eichungen direkt mit Hilfe der Maxwellschen Gleichungen berechnet worden. Der Vollständigkeit halber sei noch erwähnt, dass Stromdichteschwankungen über die **Kontinuitätsgleichung** immer auch mit Ladungsdichteschwankungen zusammenhängen. Aus

$$\frac{\partial \varrho\{\vec{r},t\}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \circ \vec{j}\,\{\vec{r},t\} = -\vec{\nabla} \circ \hat{\vec{j}}\,(\vec{r})e^{i\,\omega t} \tag{11.10}$$

folgt

$$\varrho\{\vec{r},t\} = \frac{-1}{i\,\omega}\vec{\nabla} \circ \hat{\vec{j}}\,(\vec{r})e^{i\,\omega t} + \varrho_0(\vec{r}) \quad , \tag{11.11}$$

wobei $\varrho_0\{\vec{r}\}$ als Integrationskonstante eine zeitlich feste Ladungsdichte bedeutet, die wir nicht weiter betrachten $\varrho_0\{\vec{r}\} = 0$. Separiert man die Ladungsdichte genau wie die Stromdichte in einen orts- und einen zeitabhängigen Teil

$$\varrho(\vec{r},t) = \hat{\varrho}(\vec{r})e^{i\omega t} \quad , \tag{11.12}$$

resultiert aus der Kontinuitätsgleichung

$$\boxed{\hat{\varrho}(\vec{r}) = \frac{-1}{i\omega}\vec{\nabla} \circ \hat{\vec{j}}\,(\vec{r}) \quad .} \tag{11.13}$$

Bis auf den Monopolbeitrag $\hat{\varrho} = Q \cdot \delta^3\{\vec{r}\}$ kann man also im Prinzip die Abstrahlung einer zeitveränderlichen Ladungsdichteverteilung durch das magnetische Vektorpotenzial erfassen und braucht keinen weiteren Formalismus für das skalare elektrische Potenzial aufzubauen. Es bleibt noch der Beitrag von zeitveränderlichen Monopolen zu diskutieren. Nach Fourierzerlegung lautet das Potenzial jeder Spektralkomponente

$$\phi = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{q\{t'\}\delta\{\vec{r}'\}}{4\pi\varepsilon\varepsilon_0|\vec{r}-\vec{r}'|} \cdot \delta\left\{t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\} \mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3r' = \frac{q\left\{t - \frac{r}{c}\right\}}{r} \tag{11.14}$$

Da die Ladung eines Monopols erhalten bleibt, und es definitionsgemäß keinen Ladungsstrom zur Quelle, oder weg von ihr, gibt, muss q zeitunabhängig sein. Daher ist der Monopolbeitrag zum Potenzial (und zu den Feldern) notwendigerweise statisch. Dies bedeutet, dass alle Spektralkomponenten der Fourierzerlegung für $\omega \neq 0$ mit $q\{\omega \neq 0\} = 0$ verschwinden.

11.1 Abstrahlung von räumlich eng begrenzten sinusförmig oszillierenden Quellen

Wir nehmen an, dass die oszillierende Stromquelle auf ein Volumen begrenzt ist, dessen Durchmesser klein gegen die Wellenlänge ist, $d \ll \lambda$, wie es in Abbildung 11.1 angedeutet ist.

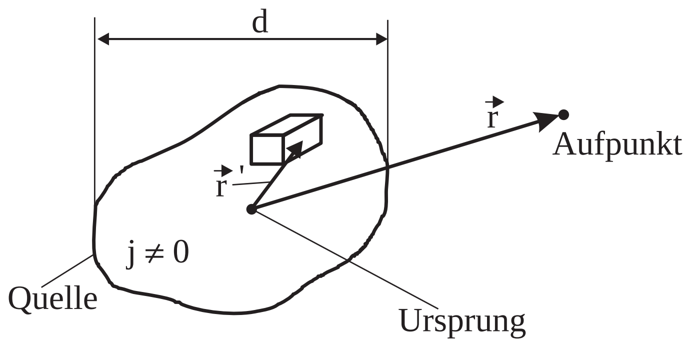


Abbildung 11.1: Räumlich begrenzte strahlende Quelle

Wir legen den Ursprung in die Mitte der Stromverteilung und haben für die Quellpunkte

$$|\vec{r}'| < d \ll \lambda \quad . \tag{11.15}$$

Der Raum außerhalb der Quellverteilung lässt sich unter diesen Voraussetzungen in drei Zonen einteilen:

$d \ll \lvert\vec{r}\rvert \ll \lambda$	**Nahzone**
$d \ll \lvert\vec{r}\rvert \sim \lambda$	**Zwischenzone**
$d \ll \lambda \ll \lvert\vec{r}\rvert$	**Fern- bzw. Wellenzone**

Sowohl in der Nahzone als auch in der Fernzone lassen sich Näherungen für das Potenzial angeben, die verhältnismäßig einfach zu berechnen sind. In der Zwischenzone ergibt sich der größte Rechenaufwand. Da aber gerade diese Zone in den meisten Fällen von geringem Interesse ist, werden wir im folgenden nur die Näherungen für die Nah- und die Fernzone genauer betrachten.

11.1.1 Nahzone

Die **Nahzone** der Strahlungsquelle ist definiert durch Aufpunkte $\vec{r}$ mit

$$d \ll |\vec{r}| \ll \lambda \quad . \tag{11.16}$$

Hierfür gilt auch $|\vec{r} - \vec{r}'| \ll \lambda$ und $k|\vec{r} - \vec{r}'| \ll 1$, so dass wir für Punkte $\vec{r}$ in der Nahzone den Phasenfaktor im Integranden von (11.6) gleich Eins setzen können und erhalten näherungsweise in homogenen Medien

für $d \ll |\vec{r}| \ll \lambda$

$$\boxed{\vec{A}\{\vec{r}, t\} \approx \frac{\mu\mu_0}{4\pi} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\vec{\jmath}\{\vec{r}'\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \, \mathrm{d}^3r' \, e^{i\,\omega t} \quad .} \tag{11.17}$$

Dies ist einfach das statische Potenzial, das zeitlich sinusförmig oszilliert. In der Nahzone hat sich die Retardierung also näherungsweise überhaupt nicht bemerkbar gemacht.

11.1.2 Fernzone

Die **Fernzone** oder **Wellenzone** bzw. **Strahlungszone** der Quelle ist definiert durch

$$|\vec{r}'| < d \lesssim \lambda \ll |\vec{r}| \quad , \tag{11.18}$$

wobei hier zugelassen werden kann, dass d in die Größenordnung der Wellenlänge kommen kann. Wir haben näherungsweise

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r}| \left(1 - 2\frac{\vec{r} \circ \vec{r}'}{|\vec{r}||\vec{r}|} + \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}\right)^{1/2}$$

$$\approx |\vec{r}| \left[1 - \frac{1}{2}\left(2\frac{\vec{r}\circ\vec{r}'}{|\vec{r}||\vec{r}|} - \frac{|\vec{r}'|^2}{|\vec{r}|^2}\right)\right] \tag{11.19}$$
$$\approx |\vec{r}| \left(1 - \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}\circ\frac{\vec{r}'}{|\vec{r}|}\right) \quad .$$

Bei der Auswertung von (11.6) approximieren wir im Integranden

$$\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \approx \frac{1}{|\vec{r}|} = \frac{1}{r} \tag{11.20}$$

und im Exponenten, der wegen der Periodizität empfindlicher vom Abstand abhängt

$$\exp\{-i\,k|\vec{r}-\vec{r}'|\} \approx \exp\{-i\,kr\}\exp\left\{i\,k\frac{\vec{r}}{r}\circ\vec{r}'\right\} \quad . \tag{11.21}$$

Hierbei ist zu beachten, dass

$$\frac{\vec{r}}{r} = \vec{e}_{\mathrm{r}} \tag{11.22}$$

ein Einheitsvektor in Richtung des Aufpunktes $\vec{r}$ darstellt. Wir bekommen in homogenen Medien

für $|\vec{r}'| < \lambda \ll |\vec{r}|$

$$\vec{A}\{\vec{r},t\} \approx \frac{e^{-i\,kr}}{r}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{j}\{\vec{r}'\}\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}')\}\;\mathrm{d}^3r'e^{i\,\omega t} \quad . \tag{11.23}$$

Dies ist eine Kugelwelle $\frac{1}{r}\exp\{i(\omega t - kr)\}$ mit einer von der Richtung $\vec{e}_{\mathrm{r}}$ abhängigen Amplitude

$$\vec{A}_0 = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{j}\{\vec{r}'\}\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}')\}\;\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{11.24}$$

$\vec{A}\{\vec{r},t\}$ lässt sich also als Kugelwelle mit **Richtungsfaktor** $\vec{A}_0$ darstellen:

$$\vec{A} \approx \frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{\exp\{i(\omega t - kr)\}}{r}\vec{A}_0 \quad . \tag{11.25}$$

11.2 Das elektrische und magnetische Feld in der Strahlungszone räumlich begrenzter Quellen

Für das magnetische Feld gilt

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{A} \approx \frac{e^{i\,\omega t}}{4\pi}\vec{\nabla}\times\left(\frac{e^{-i\,kr}}{r}\vec{A}_0\right)\\ &= \frac{e^{i\,\omega t}}{4\pi}\left[\frac{e^{-i\,kr}}{r}\vec{\nabla}\times\vec{A}_0 + \left(\vec{\nabla}\frac{e^{-i\,kr}}{r}\right)\times\vec{A}_0\right] \quad .\end{aligned} \tag{11.26}$$

Dieser Term soll möglichst noch genähert werden, um ihn handlicher zu machen. Dazu müssen die beiden Summanden genauer untersucht werden. Nun ist

$$\vec{\nabla}\frac{e^{-i\,kr}}{r} = \left(-i\frac{k}{r} - \frac{1}{r^2}\right)e^{-i\,kr}\vec{e}_{\mathrm{r}} \approx -i\frac{k}{r}e^{-i\,kr}\vec{e}_{\mathrm{r}} \quad , \tag{11.27}$$

wobei die Näherung für $r \gg \lambda$ gerechtfertigt ist. Da die Rotation nur auf die ungestrichenen Koordinaten wirkt, gilt

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\times\vec{A}_0 &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\nabla}\times\left(\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\}\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\right)\ \mathrm{d}^3r'\\ &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\vec{\nabla}\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\right)\times\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\} + \exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\underbrace{\vec{\nabla}\times\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\}}_{=0}\right]\ \mathrm{d}^3r'\\ &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} i\,k\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\left(\vec{\nabla}\frac{\vec{r}\circ\vec{r}\,'}{r}\right)\times\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\}\ \mathrm{d}^3r'\\ &= \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} i\,k\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\left(\frac{\vec{r}\,'}{r} - \frac{\vec{r}\circ\vec{r}\,'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\}\ \mathrm{d}^3r' \quad ,\end{aligned} \tag{11.28}$$

wobei $\vec{\nabla}\times j\{\vec{r}\,'\} = 0$ ist, da $\vec{\nabla}$ nur partiell auf ungestrichene Koordinaten wirkt. Für den ersten Term in (11.26) bekommt man also

$$\frac{e^{-i\,kr}}{r}\vec{\nabla}\times A_0 = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} i\,k\frac{e^{-i\,kr}}{r}\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\left(\frac{\vec{r}\,'}{r}-\frac{\vec{r}\circ\vec{r}\,'}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\right)\times\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\})\ \mathrm{d}^3r' \tag{11.29}$$

und der zweite Term lautet

$$\left(\vec{\nabla}\frac{e^{-i\,kr}}{r}\right)\times A_0 = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{-i\,k}{r}e^{-i\,kr}\exp\{i\,k(\vec{e}_{\mathrm{r}}\circ\vec{r}\,')\}\,(\frac{\vec{r}}{r}\times\vec{j}\,\{\vec{r}\,'\})\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{11.30}$$

Der Vergleich zeigt, dass das Kreuzprodukt von (11.29) zu $\vec{r}\,'$ proportional ist, (11.30) dagegen zu $\vec{r}$. Da $|\vec{r}\,'| \ll |\vec{r}|$ ist, ist (11.29) gegenüber (11.30) zu vernachlässigen, und man kann näherungsweise setzen

$$\boxed{\vec{H}\approx\frac{-i\,k}{4\pi r}(\vec{e}_{\mathrm{r}}\times\vec{A}_0)e^{i\,\omega t-i\,kr} \quad .} \tag{11.31}$$

Gemeint ist wie immer der Realteil.

Da im Fernfeld $\vec{j}=0$ gilt, erhält man das elektrische Feld nach (11.9) zu

$$\vec{E}=\frac{-i\,Z}{k}\vec{\nabla}\times\vec{H}\approx-\frac{Z}{4\pi}\left[\vec{\nabla}\left(\frac{e^{-i\,kr}}{r}\right)\times\left(\vec{e}_{\mathrm{r}}\times\vec{A}_0\right)+\frac{e^{-i\,kr}}{r}\vec{\nabla}\times\left(\vec{e}_{\mathrm{r}}\times\vec{A}_0\right)\right]e^{i\omega t} \quad . \tag{11.32}$$

Mit derselben Argumentation wie bei der Berechnung von $\vec{H}$ ist jetzt der zweite Term gegenüber dem ersten zu vernachlässigen, und wir erhalten unter Beachtung von (11.27)

$$\boxed{\vec{E}\approx i\frac{kZ}{4\pi r}e^{-i\,kr}\vec{e}_{\mathrm{r}}\times\left(\vec{e}_{\mathrm{r}}\times\vec{A}_0\right)=-Z\vec{e}_{\mathrm{r}}\times\vec{H} \quad .} \tag{11.33}$$

Kapitel 12

Fernzone spezieller Quellverteilungen

12.1 Dünne lineare Antenne

12.1.1 Fernfeld einer dünnen linearen Antenne

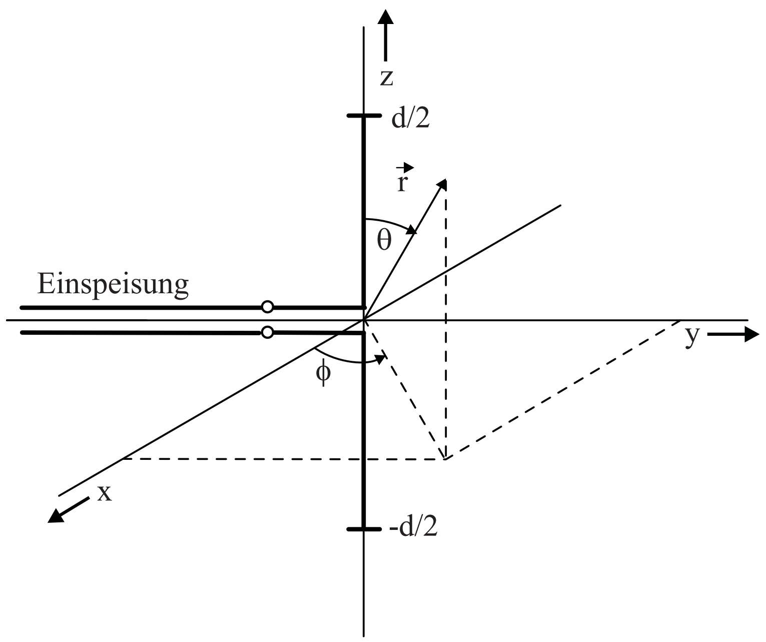


Abbildung 12.1: Dünne lineare Antenne

Wir betrachten eine dünne lineare Antenne nach Abbildung 12.1, die auch **Stabantenne** genannt wird. Die Antenne ist entlang der z-Achse orientiert und wird über eine Mitteleinspeisung betrieben. Für sinusförmige Anregung bildet sich entlang der Antenne eine Stehwelle aus, die bei verschwindender Energieabstrahlung zu einer räumlich sinusförmigen Stromverteilung auf der Antenne führt. Die Stromdichte verschwindet an den Enden. Die Stromdichte ist

$$\vec{j}\,\{\vec{r},t\} = I\sin\left\{k\left(\frac{d}{2}-z\right)\right\}\delta\{x\}\delta\{y\}\vec{e}_{\mathsf{z}}e^{i\,\omega t} \quad . \tag{12.1}$$

Gemäß (11.23) erhalten wir das Vektorpotenzial

$$\begin{aligned}\vec{A}\{\vec{r},t\} &= \vec{e}_{\mathsf{z}}\frac{e^{-i\,kr}}{r}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}I\int\limits_{-d/2}^{d/2}\sin\left\{k\left(\frac{d}{2}-z'\right)\right\}e^{i\,kz'\cos\{\theta\}}\,\mathrm{d}z'e^{i\,\omega t} \\ &= \vec{e}_{\mathsf{z}}\frac{e^{-i\,kr}}{r}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}2I\int\limits_{0}^{d/2}\sin\left\{k\left(\frac{d}{2}-z'\right)\right\}\cos\left\{kz'\cos\{\theta\}\right\}\,\mathrm{d}z'e^{i\omega t} \quad ,\end{aligned} \tag{12.2}$$

wobei wir $\vec{e}_{\mathsf{r}}\circ\vec{r}\,' = x'\cos\{\phi\}\sin\{\theta\} + y'\sin\{\phi\}\sin\{\theta\} + z'\cos\{\theta\}$ berücksichtigt haben. Die Auswertung des letzten Integrals ergibt

$$\vec{A}\{\vec{r},t\} = \vec{e}_{\mathsf{z}}\frac{e^{-i\,kr}}{r}\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\frac{2I}{k}\left[\frac{\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\}-\cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}}{\sin^2\{\theta\}}\right]e^{i\,\omega t} \quad . \tag{12.3}$$

Da die Stromdichte nur eine z-Komponente besitzt, gilt dasselbe für das Vektorpotenzial. Das Magnetfeld bekommt man aus (11.31). Der Richtungsfaktor ist nach Vergleich von (12.3) mit (11.25)

$$\vec{A}_0 = \frac{2I}{k}\left[\frac{\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\theta\right\}-\cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}}{\sin^2\{\theta\}}\right]\cdot\vec{e}_{\mathsf{z}} \quad . \tag{12.4}$$

Das Magnetfeld resultiert damit zu

$$\vec{H}\{\vec{r},t\} = -i\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\,kr}}{r}2I\left[\frac{\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\}-\cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}}{\sin^2\{\theta\}}\right]e^{i\,\omega t}\left(\vec{e}_{\mathsf{r}}\times\vec{e}_{\mathsf{z}}\right) \quad . \tag{12.5}$$

Das Magnetfeld im Fernfeld hat nur eine Komponente senkrecht zu der von der Beobachtungsrichtung $\vec{e}_\mathsf{r}$ und der Stromdichterichtung $\vec{e}_\mathsf{z}$ aufgespannten Ebene. Dies ist in Polarkoordinaten gerade die ϕ-Komponente, wie in Abbildung 12.2 illustriert.

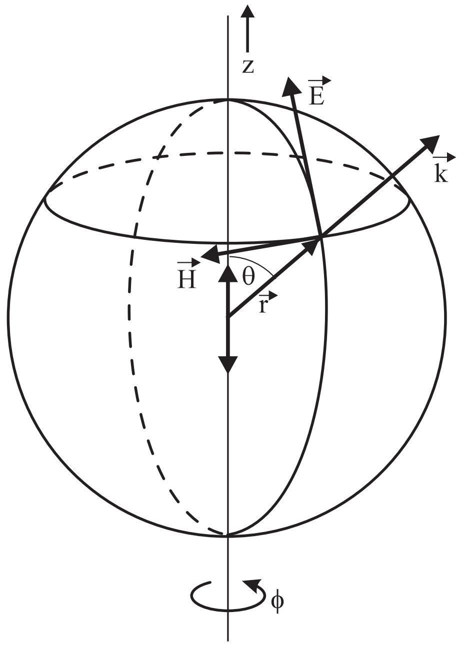


Abbildung 12.2: Zum Fernfeld einer Stabantenne in z-Richtung

Das elektrische Fernfeld bekommt man aus (11.33) zu

$$\vec{E}\{\vec{r},t\} = i\frac{Z}{4\pi}\frac{e^{-i\,kr}}{r}2I\left[\frac{\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}}{\sin^2\{\theta\}}\right]e^{i\,\omega t}\left(\vec{e}_\mathsf{r}\times(\vec{e}_\mathsf{r}\times\vec{e}_\mathsf{z})\right) \quad . \tag{12.6}$$

Es ist in Phase mit dem Magnetfeld und hat eine Komponente nur in θ-Richtung. Wir verwenden die Einheitsvektoren $\vec{e}_\phi$ in ϕ-Richtung und $\vec{e}_\theta$ in θ-Richtung,

$$\vec{e}_\phi = \frac{\vec{e}_\mathsf{z}\times\vec{e}_\mathsf{r}}{|\vec{e}_\mathsf{z}\times\vec{e}_\mathsf{r}|} = \frac{\vec{e}_\mathsf{z}\times\vec{e}_\mathsf{r}}{\sin\{\theta\}} \tag{12.7}$$

und

$$\vec{e}_\theta = \frac{(\vec{e}_\mathsf{z}\times\vec{e}_\mathsf{r})\times\vec{e}_\mathsf{r}}{|(\vec{e}_\mathsf{z}\times\vec{e}_\mathsf{r})\times\vec{e}_\mathsf{r}|} = \frac{(\vec{e}_\mathsf{z}\times\vec{e}_\mathsf{r})\times\vec{e}_\mathsf{r}}{\sin\{\theta\}} \quad . \tag{12.8}$$

Damit schreiben sich die physikalische Bedeutung besitzenden Realteile von (12.5) und (12.6)

$$\vec{H} = H_\phi \vec{e}_\phi \quad , \tag{12.9}$$

mit der **Azimutalkomponente** H_ϕ

$$H_\phi\{\vec{r}, t\} = \frac{I}{2\pi} \frac{\sin\{\omega t - kr\}}{r} \frac{\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\theta\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}}{\sin\{\theta\}} \tag{12.10}$$

und

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_\theta \vec{e}_\theta = Z H_\phi \vec{e}_\theta \tag{12.11}$$

mit der **Polarkomponente**

$E_\theta = Z H_\phi$.

Besonders einfache Ausdrücke ergeben sich für $d = \lambda/2, \lambda, \frac{3}{2}\lambda, \ldots$, wenn die Antennenlänge ein ganzzahliges Vielfaches der halben Wellenlänge beträgt $(k = 2\pi/\lambda)$. Interessant ist auch der Fall einer besonders kurzen Antenne mit $d \ll \lambda$ oder $kd \ll 2\pi$. Hierfür kann man die $\cos$-Terme in (12.10) und (12.11) entwickeln und erhält die

Fernfelder einer kurzen dünnen Antenne

$$\vec{H}\{\vec{r}, t\} = \frac{\pi I}{4} \frac{d^2}{\lambda^2} \sin\{\theta\} \frac{\sin\{\omega t - kr\}}{r} \vec{e}_\phi \tag{12.12}$$

und

$$\vec{E}\{\vec{r}, t\} = Z \frac{\pi I}{4} \frac{d^2}{\lambda^2} \sin\{\theta\} \frac{\sin\{\omega t - kr\}}{r} \vec{e}_\theta \quad . \tag{12.13}$$

Die Feldstärken wachsen proportional zur Stromamplitude I. Für festes I nehmen die Felder quadratisch mit der Frequenz $\omega = 2\pi c/\lambda$ zu.

Es sei noch bemerkt, dass (12.12) und (12.13) die Fernfelder des Hertzschen (Punkt-) Dipols darstellen.

12.1.2 Abstrahlung einer dünnen linearen Antenne

Die Abstrahlung einer Antenne ist durch den Energiefluss ins Unendliche bestimmt, der durch den Energiefluss auf der Fernkugel charakterisiert ist. Zunächst ist der zeitlich gemittelte Poynting Vektor im Fernfeld

$$\overline{\vec{S}} = \overline{\vec{E} \times \vec{H}} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \frac{\left(\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}\right)^2}{r^2 \sin^2\{\theta\}} \vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi \quad . \tag{12.14}$$

Wegen

$$\vec{e}_\theta \times \vec{e}_\phi = \vec{e}_\mathrm{r} \tag{12.15}$$

hat der Poynting Vektor nur eine radiale Komponente. Der Energiefluss $\mathrm{d}^2 P$ durch ein Oberflächenelement $\mathrm{d}^2\vec{r} = \vec{e}_\mathrm{r} r^2\, \mathrm{d}^2\Omega = \vec{e}_\mathrm{r} r^2 \sin\{\theta\}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ der Fernkugel ist demnach

$$\mathrm{d}^2 P = \vec{e}_\mathrm{r} \circ \overline{\vec{S}}\, r^2\ \mathrm{d}^2\Omega \tag{12.16}$$

und die in den Raumwinkel $\mathrm{d}^2\Omega = \sin\{\theta\}\, \mathrm{d}\theta\, \mathrm{d}\phi$ abgestrahlte Leistung ist

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2\Omega} = \lim_{r\to\infty} r^2\, \overline{\vec{S}} \circ \vec{e}_\mathrm{r} \quad . \tag{12.17}$$

Mit (12.14) und (12.15) ergibt sich

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{1}{2} Z \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \frac{\left(\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\theta\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}\right)^2}{\sin^2\{\theta\}}} \tag{12.18}$$

für die auf den Raumwinkel $\mathrm{d}^2\Omega$ bezogene **abgestrahlte Leistung**. Die gesamte abgestrahlte Leistung ist

$$\begin{aligned} P &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2} Z \left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \frac{\left(\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}\right)^2}{\sin\{\theta\}}\, \mathrm{d}\theta\ \mathrm{d}\phi \\ &= \frac{1}{2} I^2 \int_0^{\pi} \frac{Z}{2\pi} \frac{\left(\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}\right)^2}{\sin\{\theta\}}\, \mathrm{d}\theta \quad . \end{aligned} \tag{12.19}$$

Die abgestrahlte Leistung ist proportional zum Quadrat der Amplitude I des Antennenstroms. Man definiert einen **Strahlungswiderstand** R_S der Antenne über

$$P = \frac{1}{2} R_S I^2 \quad , \tag{12.20}$$

wobei der Faktor $\frac{1}{2}$ berücksichtigt, dass bei zeitlich sinusförmigem Stromverlauf die elektrische Leistung mit dem Effektivwert des Stroms zusammenhängt. Man erhält

$$R_S = \int\limits_0^\pi \frac{Z}{2\pi} \frac{\left\{\cos\left\{\frac{kd}{2}\cos\{\theta\}\right\} - \cos\left\{\frac{kd}{2}\right\}\right\}^2}{\sin\{\theta\}} \, \mathrm{d}\theta \quad . \tag{12.21}$$

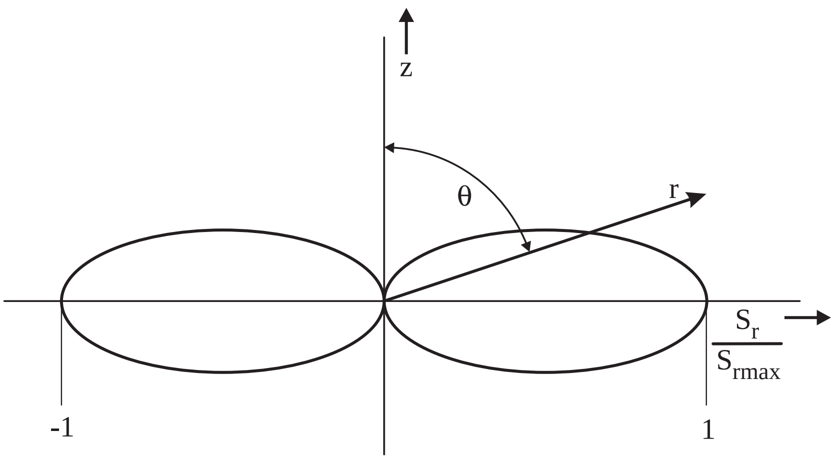


Abbildung 12.3: Richtcharakteristik einer kurzen Stabantenne

Einfach sind die Zusammenhänge für eine kurze Antenne mit $kd \ll 2\pi$. Hierfür ist die Strahlungsleistung pro Raumwinkelelement

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\pi^2 Z d^4 \sin^2\{\theta\}}{16\lambda^4} I^2 \quad . \tag{12.22}$$

Die Richtcharakteristik $(\mathrm{d}^2 P/\mathrm{d}^2\Omega)/(\mathrm{d}^2 P/\mathrm{d}^2\Omega)_{\mathsf{max}}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 P/\mathrm{d}^2\Omega}{(\mathrm{d}^2 P/\mathrm{d}^2\Omega)_{\mathsf{max}}} = \sin^2\{\theta\} \tag{12.23}$$

hat die in Abbildung 12.3 dargestellte Form einer Doppelkeule.

Die Abstrahlung erfolgt hauptsächlich quer zur Stromrichtung und überhaupt nicht in Richtung des Stromflusses. Wegen $\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = 2\pi$ und

$$\int_0^{\pi} \sin^3\{\theta\}\ \mathrm{d}\theta = \int_{-1}^{+1} \sin^2\{\theta\}\ \mathrm{d}\cos\{\theta\} = \int_{-1}^{+1} (1-x^2)\ \mathrm{d}x = \frac{4}{3} \tag{12.24}$$

ist die gesamte

abgestrahlte Leistung einer kurzen Stabantenne

$$P = \frac{1}{2}\,\frac{2\pi\pi^2 Z d^4}{12\lambda^4}\, I^2 = \frac{\pi^3}{12}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^4 Z I^2 \quad . \tag{12.25}$$

Sie wächst proportional zur vierten Potenz der Frequenz $\omega = 2\pi c/\lambda$ und bei kurzen Antennen $d \ll \lambda$ auch proportional zur vierten Potenz der Antennenlänge d. Hierbei ist zu bemerken, dass die Amplitude I auf der kurzen Antenne nirgends auftritt, sondern nur auf der Zuleitung gemessen werden kann. Bezieht man die Amplitude auf den Mittelpunkt der Antenne, so hat man nach (12.1) mit $kd \ll 2\pi$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= I \sin\left\{k\left(\frac{d}{2} - z\right)\right\}\ \delta\{x\}\,\delta\{y\}\,\vec{e}_z\, e^{i\omega t} \\ &\approx I_0\left(1 - \frac{2|z|}{d}\right)\ \delta(x)\,\delta\{y\}\,\vec{e}_z\, e^{i\omega t} \end{aligned} \tag{12.26}$$

zu setzen, wobei

$$I_0 = I\frac{kd}{2} = I\frac{\pi d}{\lambda} \tag{12.27}$$

die Amplitude am Mittelpunkt der Antenne bezeichnet. Bezieht man die abgestrahlte Leistung auf diesen Wert, so folgt aus (12.22) für die abgestrahlte Leistung pro Raumwinkel

$$\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2\Omega} = \frac{1}{2}\,\frac{Zd^2}{16\lambda^2} I_0^2 \sin^2\{\theta\} \tag{12.28}$$

und aus (12.25) für die gesamte abgestrahlte Leistung

$$P = \frac{\pi}{12}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 Z I_0^2 \quad . \tag{12.29}$$

Der Strahlungswiderstand ist demnach

$$R_S = \frac{\pi}{6}\left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 Z \quad , \tag{12.30}$$

wenn man den Widerstand auf den Einspeisepunkt bezieht.

Als **Antennengewinn** G definiert das Verhältnis der maximalen richtungsabhängigen Strahlungsleistung zu der über alle Richtungen gemittelten Strahlungsleistung

$$\boxed{G = \frac{\Omega}{P}\left(\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2\Omega}\right)_{\mathsf{max}} \quad .} \tag{12.31}$$

Es ist nach (12.28)

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}^2\Omega}\right)_{\mathsf{max}} = \frac{1}{32}\,\frac{Z d^2}{\lambda^2}\, I_0^2 \tag{12.32}$$

und nach (12.29) mit dem gesamten Raumwinkel $\Omega = 4\pi$

$$\frac{P}{\Omega} = \frac{1}{24}\,\frac{Z d^2}{\lambda^2}\, I_0^2 \quad . \tag{12.33}$$

Der Antennengewinn der kurzen Stabantenne ist demnach

$$G = \frac{3}{2} \quad . \tag{12.34}$$

Längere Antennen können eine engere Strahlungskeule und damit einen größeren Gewinn besitzen.

12.2 Dipole

Das magnetische Vektorpotenzial lautet in der Fernzone (11.23)

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\exp\{i(\omega t - kr)\}}{r}\iiint_{\infty}^{\infty}\vec{\hat{j}}\{\vec{r}'\}\exp\{-ik\vec{e_{\mathrm{r}}}\circ\vec{r}'\}\,\mathrm{d}^3r' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\exp\{i(\omega t - kr)\}}{r}\vec{A_0}\end{aligned} \qquad (12.35)$$

mit dem Richtungsfaktor $\vec{A_0} = \iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{\hat{j}}\{\vec{r}'\}\cdot\exp\{-ik\vec{e_{\mathrm{r}}}\circ\vec{r}'\}\,\mathrm{d}^3r'$. Die Exponentialfunktion im Richtungsfaktor lässt sich in eine Taylorreihe entwickeln. In

$$\vec{A_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{\hat{j}}\{\vec{r}'\}\cdot\frac{1}{n!}\left(-ik\vec{e_{\mathrm{r}}}\circ\vec{r}'\right)^n\;\mathrm{d}^3r' = \sum\vec{A_{0n}} \qquad (12.36)$$

bestimmen nur die ersten nicht verschwindenden Glieder die Größe des Richtungsfaktors, denn nach Voraussetzung ist $kr' \ll 1$, so dass die Reihe mit steigenden Potenzen rasch abnimmt.

12.2.1 Elektrischer Dipol

Betrachten wir nur das erste Glied der Reihe, so folgt mit partieller Integration unter Berücksichtigung, dass $\vec{\hat{j}}$ auf dem Rand der Quellverteilung verschwindet und Anwendung der Kontinuitätsgleichung $-i\omega\varrho = \vec{\nabla}\circ\vec{j}$

$$\vec{A_{0,0}} = \iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{\hat{j}}\;\mathrm{d}^3\vec{r}' = -\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{r}'\left(\vec{\nabla}'\circ\vec{\hat{j}}\right)\mathrm{d}^3r' = i\omega\iiint_{-\infty}^{\infty}\vec{r}'\varrho\{\vec{r}'\}\;\mathrm{d}^3r' \quad . \qquad (12.37)$$

Wir erinnern uns an das in der Elektrostatik eingeführte Dipolmoment $\vec{p}$ (2.51) und formulieren das

> Vektorpotenzial eines elektrischen Dipols
>
> $$\vec{A} = i\frac{k}{cr}\vec{p}\exp\{i(\omega t - kr)\} \quad . \qquad (12.38)$$

Eine genauere Betrachtung zeigt, dass dieses Potenzial in allen Punkten des Raumes außerhalb des Dipols gilt. Mit $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -i\frac{c}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B}$
und $\vec{\nabla} \times f\{r\}\,\vec{p} = \frac{\vec{r}\times\vec{p}}{r}\frac{\partial}{\partial r}f = (\vec{e_r} \times \vec{p})\,\frac{\partial}{\partial r}f$ sowie
$\vec{\nabla} \times [f \cdot (\vec{r} \times \vec{p})] = f\vec{\nabla} \times (\vec{r} \times \vec{p}) + \left(\vec{\nabla} f\right) \times (\vec{r} \times \vec{p}) = -2f\,(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{p})\,\vec{e_\mathrm{r}} + \left(\vec{\nabla} f\right) \times (\vec{r} \times \vec{p})$
resultieren die Felder

$$\begin{aligned}\vec{B} &= i\frac{k}{c}\left[\left(\vec{\nabla} \times \frac{\vec{p}}{r}\right) - i\frac{k}{r}\left(\vec{\nabla} \times r\vec{p}\right)\right]\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\\ &= i\frac{k}{c}\left(-\frac{1}{r^2} - i\frac{k}{r}\right)\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\,(\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{p})\\ &= \frac{k^2}{c}\left(1 + i\frac{1}{kr}\right)\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\cdot(\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{p}) \end{aligned} \tag{12.39}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{E} &= -ik \cdot \vec{\nabla} \times \left[\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3}\right)\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\cdot(\vec{r} \times \vec{p})\right]\\ &= -ik \cdot \left[-2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3}\right)(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{p})\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\,\vec{e_\mathrm{r}}\right.\\ &\qquad \left. + \vec{\nabla}\left(\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3}\right)\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\right) \times (\vec{r} \times \vec{p})\right]\\ &= ik\left[-2\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3}\right)(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{p})\,\vec{e_\mathrm{r}} + \left[\left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{ikr^3}\right)\frac{-ik\vec{e_\mathrm{r}}}{r} - \left(\frac{1}{r^3} + \frac{3}{ikr^5}\right)\right](\vec{r} \times \vec{p})\right]\cdot\\ &\qquad \exp\{i\,(\omega t - kr)\}\\ &= \frac{k}{r}\left[k\,(\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{p}) \times \vec{e_\mathrm{r}} + \frac{1}{k}\,(3\,\vec{e_\mathrm{r}}\,(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{p}) - \vec{p})\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)\right]\exp\{i\,(\omega t - kr)\} \quad . \end{aligned} \tag{12.40}$$

In der Nahzone resultieren mit $k \cdot r \to 0$ die Näherungen

$$\vec{B} \simeq -i\frac{k}{cr^2}\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\,(\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{p}) \tag{12.41}$$

$$\vec{E} \simeq \frac{1}{r^3}\exp\{i\,(\omega t - kr)\}\,(3\,(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{p})\,\vec{e_\mathrm{r}} - \vec{p}) \tag{12.42}$$

Das elektrische Feld ist abgesehen von der Zeitabhängigkeit gleich dem Feld eines elektrostatischen Dipols. Der Amplitudenfaktor der magnetischen Induktion ist um den Faktor $\frac{kr}{c}$ kleiner als beim elektrischen Feld und verschwindet im statischen Fall. In der Fernzone verhalten sich die Felder wie

$$\vec{B} \simeq \frac{k^2}{cr} \cdot \exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\} \left(\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}\right) \tag{12.43}$$

und

$$\vec{E} \simeq \frac{k^2}{r} \exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\} \left(\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}\right) \times \vec{e}_\mathsf{r} = c\vec{B} \times \vec{e}_\mathsf{r} \tag{12.44}$$

Damit resultiert die zeitlich gemittelte radial abgestrahlte Leistungsdichte

$$\begin{aligned}\overline{S_\mathsf{r}} &= \vec{e}_\mathsf{r} \circ \vec{S_m} = \frac{1}{2}\vec{e}_\mathsf{r} \circ \mathrm{Re}\left\{\vec{E} \times \vec{H}^*\right\} = \frac{c}{2\mu_0}\vec{e}_\mathsf{r} \circ \mathrm{Re}\left\{\left(\vec{B} \times \vec{e}_\mathsf{r}\right) \times \vec{B}^*\right\} \\ &= \frac{k^4}{\hat{r}^2}\frac{1}{2\mu_0 c}\left[\left[\left(\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}\right) \times \vec{e}_\mathsf{r}\right] \times \left(\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}^*\right)\right] \circ \vec{e}_\mathsf{r} \quad .\end{aligned} \tag{12.45}$$

Zur besseren Übersicht nehmen wir die Orientierung von $\vec{p} = p_\mathsf{r}\vec{e}_\mathsf{r} + p_\mathsf{t}\vec{e}_\mathsf{t}$ und erhalten mit $\vec{e}_\ell = \vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{e}_\mathsf{t}$ und $(\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}) = p_\mathsf{t}\vec{e}_\ell$ für $[(\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}) \times \vec{e}_\mathsf{r}] \times (\vec{e}_\mathsf{r} \times \vec{p}^*) = |p_\mathsf{t}|^2\vec{e}_\mathsf{r}$ und damit

$$\overline{S_\mathsf{r}} = \frac{k^4}{r^2} \cdot \frac{z}{2} \left|\vec{p} - \left(\vec{e}_\mathsf{r} \circ \vec{p}\right)\vec{e}_\mathsf{r}\right|^2 \quad . \tag{12.46}$$

Die abgestrahlte Leistungsdichte nimmt zu höheren Frequenzen bzw. kleineren Wellenlängen mit dem Exponenten vier zu. Diese Tatsache findet in der Rayleigh- Streuung ihren Niederschlag.

12.2.2 Magnetischer Dipol

Betrachtet man das Glied erster Ordnung $n = 1$ in (12.36), ergibt sich zunächst

$$\vec{A_{0,1}} = -ik \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \vec{\hat{j}}\,\{\vec{r}'\}\,(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{r}')\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{12.47}$$

und nach Umformung

$$\vec{A_{0,1}} = -ik \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2}\left[(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{r}')\,\vec{\hat{j}} + \left(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{\hat{j}}\right)\vec{r}'\right] + \frac{1}{2}\left(\vec{r}' \times \vec{\hat{j}}\right) \times \vec{e_\mathrm{r}}\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{12.48}$$

Der erste Klammerausdruck im Integranden ist symmetrisch bezüglich der Vertauschung von $\vec{\hat{j}}$ und $\vec{r}'$ und gehört zu einem elektrischen Quadrupol. Wir werden diesen Ausdruck nicht weiter verfolgen. Betrachtet man den zweiten Klammerausdruck, findet man mit dem magnetischen Dipolmoment (4.31) das Vektorpotenzial eines magnetischen Dipols in der Fernzone

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r} \exp\{i(\omega t - kr)\} \cdot \frac{1}{r} \cdot \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} (\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{m})\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{12.49}$$

Eine genauere Betrachtung des Vektorpotenzials, die im gesamten Raum außerhalb der Quellen gilt, ergibt für Quellen, die klein gegenüber der Wellenlänge sind, das

Vektorpotenzial eines magnetischen Dipols

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(\frac{1}{r} + ik\right) \exp\{i(\omega t - kr)\} \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} (\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{m})\ \mathrm{d}^3r' \quad . \tag{12.50}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der magnetischen Induktion des elektrischen Dipols (12.39), findet man sofort die magnetische Induktion des magnetischen Dipols, durch ersetzen von $\vec{p}$ durch $\frac{\mu_o}{4\pi}\frac{c}{k^2}\vec{m}$ in (12.40)

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left[k(\vec{e_\mathrm{r}} \times \vec{m}) \times \vec{e_\mathrm{r}} + \frac{1}{k}\left(3(\vec{e_\mathrm{r}} \circ \vec{m})\,\vec{e_\mathrm{r}} - \vec{m}\right)\left(\frac{1}{r^2} + \frac{ik}{r}\right)\right] \cdot \exp\{i(\omega t - kr)\} \quad . \tag{12.51}$$

In ähnlicher Weise findet man, dass das elektrische Feld des magnetischen Dipols mit dem magnetischen Feld des elektrischen Dipols mit der gleichen Ersetzung wie oben äquivalent ist

$$\vec{E} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\left(1 + \frac{1}{ikr}\right)(\vec{e_{\mathsf{r}}} \times \vec{m}) \exp\{i(\omega t - kr)\} \quad . \tag{12.52}$$

Die radiale Abstrahlung im Fernfeld also wegen $\vec{S} \simeq c\left(\vec{E} \times \vec{e_{\mathsf{r}}}\right)$

$$\overline{S_{\mathsf{r}}} = \frac{k^4}{r^2}\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\right)^2 \cdot \frac{c}{\mu_0}\left[\vec{m} - (\vec{e_{\mathsf{r}}} \circ \vec{m})\,\vec{e_{\mathsf{r}}}\right]^2 = \frac{k^4}{r^2} \cdot \frac{z}{(4\pi)^2} \cdot \left[\vec{m} - (\vec{e_{\mathsf{r}}} \circ \vec{m})\,\vec{e_{\mathsf{r}}}\right]^2 \tag{12.53}$$

12.3 Hertzsche Vektoren

Bereits in Kapitel 7.5 wurden die Vektorpotenziale $\vec{A}$ und $\vec{F}$ eingeführt, für die bei Lorenzeichung in quellenfreien homogenen Gebieten vier entkoppelte homogene Wellengleichungen gelten. Die Lorenzeichung verlangt $\vec{\nabla} \circ \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathsf{el}} = 0$ bzw. $\vec{\nabla} \circ \vec{F} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\phi_{\mathsf{mag}} = 0$. Offensichtlich erscheint es überflüssig, die Felder aus jeweils zwei Potenzialen $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$, $\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathsf{el}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}$ bzw. $\vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{F}$ und $\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathsf{mag}} - \frac{\partial}{\partial t}\vec{F}$ zu bestimmen, da sie ja direkt über die Lorenzeichung miteinander verknüpft sind. Verlangt man

$$\begin{aligned} \vec{A} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} \\ \vec{F} &= \frac{1}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} \quad , \end{aligned} \tag{12.54}$$

resultiert aus der Lorenzeichung sofort

$$\begin{aligned} \phi_{\mathsf{el}} &= -\vec{\nabla} \circ \vec{\pi}_{\mathsf{e}} \\ \phi_{\mathsf{magn}} &= -\vec{\nabla} \circ \vec{\pi}_{\mathsf{m}} \quad . \end{aligned} \tag{12.55}$$

Somit lassen sich die Felder in homogenen linearen Medien sofort aus den **Hertzschen Vektoren** $\vec{\pi}_{\mathsf{e}}$ und $\vec{\pi}_{\mathsf{m}}$ mit

$$\begin{aligned}
\vec{B} &= \frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} \\
\vec{E} &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{\pi}_{\mathsf{e}}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} \\
\vec{D} &= -\frac{1}{c^2}\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} \\
\vec{H} &= \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{\pi}_{\mathsf{m}}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{m}}
\end{aligned} \tag{12.56}$$

ermitteln. Sind sowohl $\vec{\pi}_{\mathsf{e}}$ als auch $\vec{\pi}_{\mathsf{m}}$ von Null verschieden, resultieren die Felder aus einer linearen Superposition der Anteile von $\vec{\pi}_{\mathsf{m}}$ und $\vec{\pi}_{\mathsf{e}}$ gemäß

$$\vec{E} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{\pi}_{\mathsf{e}}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} - \mu\mu_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} \tag{12.57}$$

$$\vec{H} = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{\pi}_{\mathsf{m}}\right) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} - \varepsilon\varepsilon_0\vec{\nabla}\times\frac{\partial}{\partial t}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} \quad . \tag{12.58}$$

In den obigen Gleichungen ist Voraussetzung, dass keine freien Ladungen und Ströme vorhanden sein dürfen. Sehr wohl sind aber nichtlineare Polarisationen erlaubt. Wir verwenden die etwas ungewöhnliche Schreibweise

$$\vec{B} = \mu\mu_0\left(\vec{H} + \vec{M}_{\mathsf{Q}}\right) \tag{12.59}$$

$$\vec{D} = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E} + \vec{P}_{\mathsf{Q}} \quad , \tag{12.60}$$

in der in $\vec{M}_{\mathsf{Q}}$ und $\vec{P}_{\mathsf{Q}}$ nichtlineare Anteile der Polarisation zusammengefasst sind. Die Maxwellschen Gleichungen $\vec{\nabla}\circ\vec{B} = 0$ bzw. $\vec{\nabla}\times\vec{E} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{B}$ und $\vec{\nabla}\times\vec{H} = \frac{\partial}{\partial t}\vec{D}$ bzw. $\vec{\nabla}\circ\vec{D} = 0$ führen nach einsetzen auf

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{m}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} + \vec{M}_{\mathsf{Q}}\right) &= 0 \\
\vec{\nabla}\circ\left(\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{m}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} + \vec{M}_{\mathsf{Q}}\right) &= 0
\end{aligned} \tag{12.61}$$

und

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{e}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} + \frac{\vec{P}_{\mathsf{Q}}}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) = 0$$
$$\vec{\nabla}\circ\left(\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{e}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} + \frac{\vec{P}_{\mathsf{Q}}}{\varepsilon\varepsilon_0}\right) = 0 \quad . \tag{12.62}$$

Die ersten beiden Gleichungen fordern

$$\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{m}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} + \vec{M}_{\mathsf{Q}} = \vec{\nabla}\times\vec{k}_{\mathsf{m}} \tag{12.63}$$

und die letzten

$$\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{e}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} + \frac{\vec{P}_{\mathsf{Q}}}{\varepsilon\varepsilon_0} = \vec{\nabla}\times\vec{k}_{\mathsf{e}} \quad , \tag{12.64}$$

wobei $\vec{k}_{\mathsf{e}}$ und $\vec{k}_{\mathsf{m}}$ zeitunabhängige Vektoren sind. Wenn sowohl $\vec{M}_{\mathsf{Q}}$ und $\vec{P}_{\mathsf{Q}}$ zeitabhängige Quellgrößen sind, so folgt, dass $\vec{k}_{\mathsf{m}} = 0$ und $\vec{k}_{\mathsf{e}} = 0$ sein müssen, und damit resultieren

$$\boxed{\begin{aligned}\Delta\vec{\pi}_{\mathsf{m}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{m}} &= -\vec{M}_{\mathsf{Q}}\\ \Delta\vec{\pi}_{\mathsf{e}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{\pi}_{\mathsf{e}} &= -\frac{\vec{P}_{\mathsf{Q}}}{\varepsilon\varepsilon_0} \quad .\end{aligned}} \tag{12.65}$$

Die formale Lösung dieser inhomogenen Wellengleichung haben wir bereits in Kapitel 4 in der allgemeinen Darstellung mit der Greenschen Funktion kennengelernt. Die im vorhergehenden Abschnitt festgestellte Analogie in den Feldern des elektrischen und magnetischen Dipols hat also offenbar ihre tiefere Begründung in der Existenz der Hertzschen Vektoren, deren Quellen sie sind und die über die vom Wesen her gleichen Gleichungen (12.57) auf die Felder führen. Als Beispiel sollen hier die Hertzschen Vektoren eines elektrischen und eines magnetischen Dipols berechnet werden. Wir nehmen wie üblich harmonische Zeitabhängigkeit an.

Beispiel 12.3.1: Hertzscher Dipol

Wir betrachten den elektrischen Dipol, der auch **Hertzscher Dipol** *genannt wird, mit* $\vec{P}_{\mathsf{Q}} = P_0 \cdot \exp\{i\omega t\} \cdot \delta^3\{\vec{r}\} \cdot \vec{e}_{\mathsf{z}}$. *Den Dipol kann man sich aus zwei Ladungen* Q *und* $-Q$ *im Abstand* ℓ *entstanden denken, wie in Abbildung 12.4 dargestellt ist.*

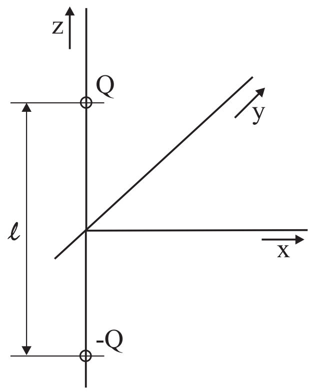


Abbildung 12.4: Hertzscher Dipol im Koordinatenursprung

Die Dipolstärke ist $P_0 = Q_0 \cdot \ell$. *Nach Einführung der harmonisch zeitabhängigen Ladung* $Q = Q_0 \cdot \exp\{i\omega t\}$ *lautet das Dipolmoment* $\vec{P} = Q\{t\} \cdot \ell \cdot \delta^3\{\vec{r}\}$. *Mit der zeitlichen Änderung des Dipolmoments ist ein Polarisationsstrom der Dichte*

$$\begin{aligned} \vec{j}_{\mathsf{pol}} &= -\frac{\partial}{\partial t}\vec{P} = \ell \cdot \delta^3\{\vec{r}\}\,\vec{e}_{\mathsf{z}}\frac{\partial}{\partial t}Q = i\omega P_0 \delta^3\{\vec{r}\}\exp\{i\omega t\}\,\vec{e}_{\mathsf{z}} \\ &= iI_o \cdot \ell \cdot \delta^3\{\vec{r}\} \cdot \exp\{i\omega t\}\,\vec{e}_{\mathsf{z}} \end{aligned} \tag{12.66}$$

verknüpft. Der mit $J = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Q$ *formal eingeführte Strom fließt als Stromfaden in* $z-$*Richtung und hat die Amplitude* $I_0 = \frac{P_0 \cdot \omega}{\ell}$. *Anders ausgedrückt:*

Man kann einem Stromfaden der Länge ℓ in z-Richtung mit harmonischer Zeitabhängigkeit und Amplitude I_0 das harmonisch zeitabhängige Dipolmoment der Amplitude

$$\vec{P}_0 = \frac{I_0 \cdot \ell}{\omega} \cdot \delta^3\{\vec{r}\} \cdot \vec{e}_{\mathsf{z}} \tag{12.67}$$

zuordnen. *Der elektrische Hertzsche Vektor resultiert im freien Raum*

$$\vec{\pi}_{\mathsf{e}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \iiint\limits_{V'} \int\limits_{t'} P_0 \cdot \delta^3\{\vec{r}'\} \cdot \exp\{i\omega t'\}\,\vec{e}_{\mathsf{z}} \cdot \frac{\delta\left\{t' - t + \frac{|\vec{r}-\vec{r}'|}{c}\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}t'\,\mathrm{d}^3 r'$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} P_0 \exp\left\{i\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}\frac{1}{r}\vec{e}_{\mathrm{z}} = \frac{P_0}{4\pi\varepsilon_0 r}\exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\}\cdot\vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{12.68}$$

und nach Ersetzen von P_0

$$\vec{\pi}_{\mathrm{e}} = \frac{I_0 \ell}{4\pi\varepsilon_0 \omega r}\exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\}\cdot\vec{e}_{\mathrm{z}} \quad . \tag{12.69}$$

Mit der Ermittlung des Hertzschen Vektors ist nun die Abstrahlung des Hertzschen Dipols berechenbar, da keine Näherungen gemacht wurden.

Beispiel 12.3.2: Magnetischer Dipol

Als nächstes soll ein harmonisch zeitabhängiger magnetischer Dipol untersucht werden. Die magnetische Dipoldichte ist $\vec{M} = m_0 \cdot \delta^3\{\vec{r}\} \cdot \exp\{-i\omega t\}\,\vec{e}_{\mathrm{z}}$*, die durch einen kreisförmigen Stromfaden der Stromdichte* $\vec{I}_0 \cdot \delta^2\{\varrho^2 - r_0^2\} \cdot \delta\{z\} \cdot \exp\{-i\omega t\} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}}$ *(in zylindrischer Schreibweise) hervorgerufen wird, wie wir bereits aus Abschnitt 5.2 wissen. Die Fläche dieser sogenannten* **Rahmenantenne** *beträgt* πr_0^2*, die Anordnung ist in Abbildung 12.5 skizziert.*

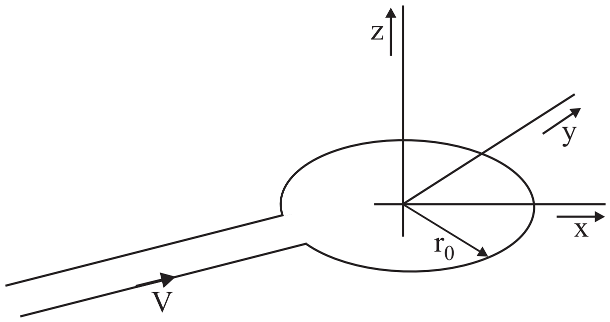


Abbildung 12.5: Rahmenantenne im Ursprung des Koordinatensystems.

Die Amplitude des Dipolmoments resultiert nach (4.39) aus $m_0 = I_0 \cdot \pi \cdot r_o^2$*, so dass*

$$\vec{M} = m_0 \exp\{i\omega t\} \cdot \delta\{\vec{r}\} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}} = I_0 \cdot \pi \cdot r_0^2 \exp\{i\omega t\} \cdot \delta^3\{\vec{r}\} \cdot \vec{e}_{\mathrm{z}} \tag{12.70}$$

den Ausgangspunkt zur Berechnung des magnetischen Hertzschen Vektors darstellt. Völlig analog zum elektrischen Hertzschen Vektor folgt sofort

$$\vec{\pi}_{\mathsf{m}} = \frac{m_0}{4\pi r} \cdot \exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\} \cdot \vec{e}_{\mathsf{z}} = I_0 \cdot \frac{r_0^2}{4r} \exp\left\{i\left(\omega t - kr\right)\right\} \cdot \vec{e}_{\mathsf{z}} \tag{12.71}$$

und daraus die Abstrahlung der Rahmenantenne. Auch hier wurden keine Näherungen zur Berechnung von $\vec{\pi}_{\mathsf{m}}$ gemacht, so dass das Ergebnis im gesamten freien Raum außerhalb der Antenne gültig ist.

12.4 Multipole

Bereits in Abschnitt 5.2 sind wir der Multipolentwicklung begegnet, und im Abschnitt 11.2 wurde darauf hingewiesen, dass genauere Betrachtungen zu Dipolen zeigen, dass die dort erzielten Ergebnisse sogar exakt sind. Hier wollen wir die Multipolentwicklung systematisch entwickeln. Dafür ist es erforderlich, die aus Abschnitt 4.6 bekannten Kugelflächenfunktionen zu Vektor- Kugelflächenfunktionen zu erweitern und den aus der Quantenmechanik bekannten Drehimpulsoperator $\vec{\mathrm{L}}$ einzuführen. Wir betrachten im folgenden nur harmonisch zeitabhängige Größen. Zunächst wird eine allgemeine Lösung der Wellengleichung in Kugelkoordinaten, die sogenannte allgemeine sphärische Lösung der Wellengleichung erarbeitet.

12.4.1 Allgemeine sphärische Lösung der homogenen Wellengleichung

Die homogene Wellengleichung für harmonisch zeitabhängige Größen lautet $\Delta\psi + k^2\psi = 0$. Hier muss der Laplaceoperator in Kugelkoordinaten geschrieben werden. Mit dem aus Abschnitt 4.6 bekannten Produktansatz und den dort bereits eingeführten Kugelflächenfunktionen erhalten wir

$$\psi = \sum_{\ell,m} \psi_{\ell,m} = \sum R_\ell\left\{r\right\} \cdot \mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta, \varphi\right\} \tag{12.72}$$

mit der Bedingung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] R = 0 \quad . \tag{12.73}$$

Diese Differentialgleichung hat fast die aus Abschnitt 4.6 bekannte Form der Besselschen Differentialgleichung. Mit der Substitution $R = r^{-\frac{1}{2}} \cdot \mu\left\{r\right\}$ kann (12.73) dann auch auf die **Besselsche Differentialgleichung**

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2 - \left(\frac{\ell+\frac{1}{2}}{r}\right)^2\right] \mu = 0 \tag{12.74}$$

überführt werden. Die Lösungen sind Besselfunktionen der Ordnung $\ell + \frac{1}{2}$ mit Argument $x = k \cdot r$. Zur besseren Übersicht werden zweckmäßigerweise die sogenannten **sphärischen Besselfunktionen** ganzzahliger Ordnung ℓ eingeführt. Sie lauten

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_\ell\left\{x\right\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{J}_{\ell+\frac{1}{2}}\left\{x\right\} = (-x)^\ell\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell \frac{\sin\left\{x\right\}}{x} \\
\mathrm{n}_\ell\left\{x\right\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\,\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}\left\{x\right\} = -\,(-x)^\ell\left(\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^\ell \frac{\cos\left\{x\right\}}{x} \\
\mathrm{h}^{(1)}_\ell\left\{x\right\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot \mathrm{H}^{(1)}_{\ell+\frac{1}{2}}\left\{x\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(\mathrm{J}_{\ell+1}\left\{x\right\} + i\,\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}\left\{x\right\}\right) \\
\mathrm{h}^{(2)}_\ell\left\{x\right\} &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\cdot \mathrm{H}^{(2)}_{\ell+\frac{1}{2}}\left\{x\right\} = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}\left(\mathrm{J}_{\ell+1}\left\{x\right\} - i\,\mathrm{N}_{\ell+\frac{1}{2}}\left\{x\right\}\right)
\end{aligned} \tag{12.75}$$

mit der Rekursion

$$\begin{aligned}
\frac{2\ell+1}{x}\,\mathrm{Z}_\ell\left\{x\right\} &= \mathrm{Z}_{\ell-1}\left\{x\right\} + \mathrm{Z}_{\ell+1}\left\{x\right\} \\
\frac{\partial}{\partial x}\,\mathrm{Z}_\ell\left\{x\right\} &= \frac{1}{2\ell+1}\left(\ell\cdot \mathrm{Z}_{\ell+1}\left\{x\right\} - (\ell+1)\,\mathrm{Z}_{\ell+1}\left\{x\right\}\right) \quad ,
\end{aligned} \tag{12.76}$$

wobei Z_ℓ für j_ℓ, n_ℓ, $\mathrm{h}^{(1)}_\ell$ oder $\mathrm{h}^{(2)}_\ell$ stehen kann. Die sphärischen Besselfunktionen nullter und erster Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_0\left\{x\right\} &= \frac{\sin\left\{x\right\}}{x} & \mathrm{j}_1\left\{x\right\} &= \frac{\sin\left\{x\right\}}{x^2} - \frac{\cos\left\{x\right\}}{x} \\
\mathrm{n}_0\left\{x\right\} &= \frac{\cos\left\{x\right\}}{x} & \mathrm{n}_1\left\{x\right\} &= -\frac{\cos\left\{x\right\}}{x^2} - \frac{\sin\left\{x\right\}}{x} \\
\mathrm{h}_0^{(1)}\left\{x\right\} &= \frac{1}{ix}\exp\left\{ix\right\} & \mathrm{h}_1^{(1)}\left\{x\right\} &= -\frac{x+2}{x^2}\exp\left\{ix\right\} \quad .
\end{aligned} \tag{12.77}$$

Die sphärischen Hankelfunktionen zweiter Art werden nicht weiter betrachtet, da sie im Fall verlustbehafteter Medien zu Feldern führen, die mit wachsendem Abstand zur Quelle ansteigen, was unphysikalisch ist. Zur Betrachtung von Nah- und Fernfeldern ist es erforderlich, Näherungen für $x \ll 1, \ell$ und $x \gg \ell$ zu betrachten. Sie lauten

$x \ll 1, \ell$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_\ell\left\{x\right\} &\simeq \frac{x^\ell}{(2\ell+1)!!}\left(1 - \frac{x^2}{2(2\ell+3)} + \ldots\right) \\
\mathrm{n}_\ell\left\{x\right\} &\simeq -\frac{(2\ell-1)!!}{x^{\ell+1}}\left(1 - \frac{x^2}{2(1-2\ell)} + \ldots\right)
\end{aligned} \tag{12.78}$$

$x \gg \ell$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{j}_\ell\left\{x\right\} &\simeq \frac{1}{x}\sin\left\{x - \ell\frac{\pi}{2}\right\} \\
\mathrm{n}_\ell\left\{x\right\} &\simeq \frac{1}{x}\cos\left\{x - \ell\frac{\pi}{2}\right\} \\
\mathrm{h}_\ell^{(1)}\left\{x\right\} &\simeq \frac{(-i)^{\ell+1}}{x}\exp\left\{ix\right\}
\end{aligned} \tag{12.79}$$

Die allgemeine sphärische Lösung der homogenen Wellengleichung lautet mit den sphärischen Besselfunktionen

$$\Psi\left\{\vec{r}\right\} = \sum_{\ell,m}\left(A_{\ell,m}^{(1)}\mathrm{h}_\ell^{(1)}\left\{kr\right\} + A_{\ell,m}^{(2)}\mathrm{h}_\ell^{(2)}\left\{kr\right\}\right)\cdot \mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\Theta,\varphi\right\} \quad , \tag{12.80}$$

wobei wie bereits oben bemerkt der Koeffizient $A_{\ell,m}^{(2)}$ häufig zu Null gesetzt werden darf. Will man die Felder von Quellen berechnen, bedient man sich der Greenschen Funktion.

Für die weiteren Betrachtungen ist es hilfreich, gleich die Greensche Funktion des freien Raums nach der allgemeinen Lösung der homogenen Wellengleichung zu entwickeln. Die Entwicklung soll also gemäß

$$G\{\vec{r},\vec{r}'\} = \frac{\exp\{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|\}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|} = \sum_{\ell,m} g_\ell\{r,r'\} \cdot \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}\,\mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \quad (12.81)$$

erfolgen. Substitution in der Helmholtzgleichung

$$\left(\Delta + k^2\right) G\{\vec{r},\vec{r}'\} = -\delta^3\{\vec{r}-\vec{r}'\} \quad (12.82)$$

führt auf

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + k^2 + \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\right] g_\ell = -\frac{4\pi}{r^2}\delta\{|\vec{r}-\vec{r}'|\} \quad (12.83)$$

mit der im Ursprung endlichen Lösung

$$g_\ell\{r,r'\} = -ik\,\mathrm{j}_\ell\{kr_<\} \cdot \mathrm{h}^{(1)}_\ell\{kr_>\} \quad , \quad (12.84)$$

die im unendlichen eine auslaufende Welle darstellt. Zur besseren Übersicht wurde

$$\begin{aligned} r_< &= \mathsf{Min}\{|\vec{r}|,|\vec{r}'|\} \\ r_> &= \mathsf{Max}\{|\vec{r}|,|\vec{r}'|\} \end{aligned} \quad (12.85)$$

definiert, so dass die Entwicklung der Greenschen Funktion mit

$$G\{\vec{r},\vec{r}'\} = -ik\sum_{\ell=0}^{\infty}\sum_{m=-\ell}^{\ell} \mathrm{j}_\ell\{kr_<\} \cdot \mathrm{h}^{(1)}_\ell\{kr_>\}\,\mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \cdot \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\{\theta',\varphi'\} \quad (12.86)$$

resultiert. Als letztes führen wir noch den **Drehimpulsoperator** $\vec{\mathrm{L}}$ ein, um uns die Möglichkeit zu eröffnen, eine übersichtliche Herleitung der Multipolentwicklung darzustellen.

Wendet man den Laplaceoperator in Kugelkoordinaten auf die Kugelflächenfunktionen an, resultiert nach Kürzen die vom Radius unabhängige Differentialgleichung

$$-\left[\frac{1}{\sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\{\theta\}}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]\mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}=\ell(\ell+1)\cdot\mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \tag{12.87}$$

die übersichtlicher mit dem Differentialoperator L^2

$$\mathrm{L}^2\ \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}=-\ell(\ell+1)\,\mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \tag{12.88}$$

geschrieben werden kann. Dabei ist

$$\mathrm{L}^2=\vec{\mathrm{L}}\circ\vec{\mathrm{L}}=\mathrm{L}_{\mathsf{x}}^2+\mathrm{L}_{\mathsf{y}}^2+\mathrm{L}_{\mathsf{z}}^2 \tag{12.89}$$

mit dem durch das Drehimpulsquantum $\frac{h}{2\pi}$ geteilten Drehimpulsoperator

$$\boxed{\vec{\mathrm{L}}=-i\left(\vec{r}\times\vec{\nabla}\right)\qquad.} \tag{12.90}$$

In Kugelkoordinaten bietet sich die Zusammenfassung der kartesischen Operatorkomponenten $\mathrm{L}=(\mathrm{L}_{\mathsf{x}},\mathrm{L}_{\mathsf{y}},\mathrm{L}_{\mathsf{z}})^T$

$$\begin{aligned}\mathrm{L}_{\mathsf{x}}&=i\exp\{i\varphi\}\cot\{\theta\}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\\ \mathrm{L}_{\mathsf{y}}&=-i\exp\{i\varphi\}\frac{\partial}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{12.91}$$

zum Aufsteigeoperator,

$$\mathrm{L}_{+} = \mathrm{L}_{\mathsf{x}} + i\,\mathrm{L}_{\mathsf{y}} = \exp\{i\varphi\}\left(\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\{\theta\}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)$$

und Absteigeoperator

$$\mathrm{L}_{-} = \mathrm{L}_{\mathsf{x}} - i\,\mathrm{L}_{\mathsf{y}} = \exp\{i\varphi\}\left(-\frac{\partial}{\partial\theta} + i\cot\{\theta\}\cdot\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) \tag{12.92}$$

an. Die z- Komponente wird auch Polaroperator

$$\mathrm{L}_{\mathsf{z}} = -i\frac{\partial}{\partial\varphi}$$

genannt. Wendet man diese Operatoren einzeln auf die Kugelflächenfunktionen an, resultiert mit den Rekursionsformeln für $\mathrm{Y}_{\ell,m}$

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_{+}\cdot\mathrm{Y}_{\ell,m} &= \sqrt{(\ell-m)(\ell+m+1)}\,\mathrm{Y}_{\ell,m+1} \\ \mathrm{L}_{-}\cdot\mathrm{Y}_{\ell,m} &= \sqrt{(\ell+m)(\ell-m+1)}\,\mathrm{Y}_{\ell,m-1} \\ \mathrm{L}_{z}\cdot\mathrm{Y}_{\ell,m} &= m\,\mathrm{Y}_{\ell,m} \qquad . \end{aligned} \tag{12.93}$$

Der Drehimpulsoperator hat die im Folgenden nützlich anwendbaren Eigenschaften.

$$\begin{aligned} \mathrm{L}^2\,\vec{\mathrm{L}} &= \vec{\mathrm{L}}\,\mathrm{L}^2 \\ \vec{\mathrm{L}}\times\vec{\mathrm{L}} &\neq i\,\mathrm{L} \\ \vec{\mathrm{L}}\Delta_{\prime} &= \Delta_{\prime}\vec{\mathrm{L}} \end{aligned} \tag{12.94}$$

Wobei die letzte Gleichung komponentenweise zu verstehen ist, und

$$\Delta_{\prime} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}r - \frac{1}{r^2}\,\mathrm{L}^2 \tag{12.95}$$

verwendet wurde. Aus der Definition (12.90) folgen zuletzt noch die wichtigen Eigenschaften

$$\vec{r} \circ \vec{\mathrm{L}} = 0 \tag{12.96}$$

und

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{L}} = \frac{-i}{r} \left(\frac{1}{\sin\{\theta\}} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin\{\theta\} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2\{\theta\}} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \vec{e_\mathrm{r}} \\ -i \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \right) \vec{e_\theta} - \frac{i}{\sin\{\theta\}} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} \right) \vec{e_\varphi} \quad .\end{aligned} \tag{12.97}$$

12.4.2 Multipolentwicklung

Für die harmonisch zeitabhängigen Felder gelten homogene Helmholtzgleichungen, genauer gesagt gilt die Helmholtzgleichung für jede einzelne Komponente. Die Multipollösungen dieser drei Gleichungen müssen aber gleichzeitig noch $\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0$ bzw. $\vec{\nabla} \circ \vec{E} = 0$ erfüllen, was das Auffinden geeigneter Lösungen weiter erschwert. Im Jahr 1954 wurde von C.J. Bowkamp und H.B.G. Casimir ein Verfahren vorgeschlagen, das diese Schwierigkeit umgeht, ohne auf Potenziale zurückgreifen zu müssen. Sie betrachten die skalare Größe $\vec{r} \circ \vec{C}$, wobei $\vec{C}$ durch $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ zu ersetzen ist, und stellen fest, dass

$$\Delta \left(\vec{r} \circ \vec{C} \right) = \vec{r} \circ \Delta \vec{C} + 2 \vec{\nabla} \circ \vec{C} = \vec{r} \circ \Delta \vec{C} \tag{12.98}$$

wegen $\vec{\nabla} \circ \vec{C} = 0$ gilt. Die Lösung der Helmholtzgleichungen

$$\begin{aligned}\left(\Delta + k^2\right) \left(\vec{r} \circ \vec{E} \right) &= 0 \\ \left(\Delta + k^2\right) \left(\vec{r} \circ \vec{B} \right) &= 0\end{aligned} \tag{12.99}$$

ist von der oben angegebenen Form (12.80) für $\psi = \vec{r} \circ \vec{C}$, also

$$\begin{aligned}\vec{r} \circ \vec{B} &= \sum_{\ell,m} a''_{\ell,m} \vec{r} \circ \vec{B}_{\ell,m} \\ \vec{r} \circ \vec{E} &= \sum_{\ell,m} b''_{\ell,m} \vec{r} \circ \vec{E}_{\ell,m} \quad .\end{aligned} \tag{12.100}$$

Jeder Summand ist dabei der Beitrag eines Multipols der Ordnung (ℓ, m). Man unterscheidet nach magnetischen und elektrischen Multipolen und definiert ein

magnetisches Multipolfeld der Ordnung (ℓ, m)

$$\begin{aligned}\vec{r} \circ \vec{B}_{\ell,m} &= \frac{-\ell(\ell+1)}{kc} g_{\ell,m}\{kr\}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \\ \vec{r} \circ \vec{E}_{\ell,m} &= 0 \\ g_{\ell,m}\{kr\} &= A^{(1)}_{\ell,m} \cdot \mathrm{h}^{(1)}_{\ell}\{kr\} + A^{(2)}_{\ell,m} \cdot \mathrm{h}^{(2)}_{\ell}\{kr\}\end{aligned} \tag{12.101}$$

sowie ein

elektrisches Multipolfeld der Ordnung (ℓ, m)

$$\begin{aligned}\vec{r} \circ \vec{E}_{\ell,m} &= \frac{-\ell(\ell+1)c}{k} f_{\ell,m}\{kr\}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \\ \vec{r} \circ \vec{B}_{\ell,m} &= 0 \\ f_{\ell,m}\{kr\} &= A^{(1)}_{\ell,m} \cdot \mathrm{h}^{(1)}_{\ell}\{kr\} + A^{(2)}_{\ell,m} \cdot \mathrm{h}^{(2)}_{\ell}\{kr\}\end{aligned} \tag{12.102}$$

wobei jeweils $\vec{E} = \frac{c}{ik}\vec{\nabla} \times \vec{B}$ und $\vec{B} = \frac{i}{kc}\vec{\nabla} \times \vec{E}$ gelten. Daraus folgt sofort nach einsetzen für das magnetische Multipolfeld

$$\vec{r} \circ \vec{B} = \frac{i}{kc}\vec{r} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{E}\right) = \frac{i}{kc}\left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) \circ \vec{E} = \frac{-1}{kc}\vec{\mathrm{L}} \circ \vec{E} \quad . \tag{12.103}$$

Damit haben wir wieder zwei Bedingungen, die das elektrische Feld eines magnetischen Multipols erfüllen muss. Der Vergleich von (12.103) mit (12.101) führt auf

$$\vec{\mathrm{L}} \circ \vec{E}_{\ell,m} = \ell(\ell+1) g_{\ell,m}\{kr\}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\} \quad . \tag{12.104}$$

Verwendet man hier die Identität

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{L}} \circ \vec{C} &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{L}_+ C_- + \mathrm{L}_- C_+\right) + \mathrm{L}_\mathsf{z} C_\mathsf{z} \\ C_\pm &= C_\mathsf{x} \pm i C_\mathsf{y} \end{aligned} \tag{12.105}$$

und beachtet (12.91), resultiert, dass die Azimutale Ordnung m unter Anwendung des Aufsteige- und Absteigeoperators konstant bleiben muss. Dies lässt sich leicht erfüllen, wenn für die Felder das

magnetische Multipolfeld der Ordnung (ℓ, m)

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\ell,m} &= g_{\ell,m}\{kr\} \cdot \left(\vec{\mathrm{L}}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}\right) \\ \vec{B}_{\ell,m} &= -i\frac{1}{kc}\vec{\nabla} \times \vec{E_{\ell,m}} \end{aligned} \tag{12.106}$$

gewählt werden. Anwenden von (12.105) führt sofort auf (12.104) und (12.103), womit auch der zunächst überraschende Faktor in (12.101) erklärt ist. Analog folgt für das

elektrische Multipolfeld der Ordnung (ℓ, m)

$$\begin{aligned} \vec{B}_{\ell,m} &= f_{\ell,m}\{kr\} \cdot \left(\vec{\mathrm{L}}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}\right) \\ \vec{E}_{\ell,m} &= i\frac{c}{k}\vec{\nabla} \times \vec{B}_{\ell,m} \quad . \end{aligned} \tag{12.107}$$

Bezüglich der Ausbreitung in radialer Richtung sind die magnetischen Multipolfelder transversal elektrisch und die elektrischen Multipolfelder transversal magnetisch, was sofort aus (12.101) und (12.102) folgt. Man nennt daher auch die magnetischen Multipolfelder **TE Multipolfelder** und entsprechend die elektrischen Analoga **TM Multipolfelder**. Offensichtlich sind die erzeugenden Funktionen der Multipolfelder $\vec{\mathrm{L}}\, \mathrm{Y}_{\ell,m}\{\theta,\varphi\}$. Man definiert die normierte **Vektor- Kugelfunktion**

$$\vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\vec{\mathrm{L}}\,\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\} \quad , \tag{12.108}$$

die sich durch die Orthogonalitäts- Eigenschaften

$$\iint \vec{\mathrm{X}}_{\ell',m'} \circ \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m}\,\mathrm{d}\Omega = \delta_{\ell,\ell'}\delta_{mm'}$$

$$\iint \vec{\mathrm{X}}^{*}_{\ell',m'} \circ \left(\vec{r} \times \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m}\right)\,\mathrm{d}^2\Omega = 0 \tag{12.109}$$

mit dem **Raumwinkel**- Element $\mathrm{d}^2\Omega = \sin\{\theta\}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ auszeichnen. Verwendet man diese Orthonormalbasis zur Darstellung der Felder in (12.106) und (12.107), folgt jeweils für das magnetische Multipolfeld

$$\vec{E}_{\ell,m} = \sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot g_{\ell,m} \cdot \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} \tag{12.110}$$

und für das elektrische Multipolfeld

$$\vec{B}_{\ell,m} = \sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot f_{\ell,m} \cdot \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} \tag{12.111}$$

wobei die zugehörigen Felder $\vec{B}_{\ell,m}$ und $\vec{E}_{\ell,m}$ jeweils durch Anwendung des Rotationsoperators gemäß (12.106) und (12.107) gewonnen wird. Besteht das Gesamtfeld aus einem magnetischen und elektrischen Multipolfeld, ergeben sich die Felder aus linearer Superposition der Einzelfelder. Mit (12.110), (12.111), (12.106) und (12.107) resultiert das gemischte Gesamtfeld

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{B} &= \sum_{\ell,m} b'_{\ell,m} f_{\ell,m} \cdot \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} + \frac{i}{kc} a'_{\ell,m} \cdot \vec{\nabla} \times \left(g_{\ell,m} \cdot \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m}\right) \\ \vec{E} &= \sum_{\ell,m} a'_{\ell,m} g_{\ell,m} \cdot \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} - i\frac{c}{k} b'_{\ell,m} \cdot \vec{\nabla} \times \left(f_{\ell,m} \cdot \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m}\right) \quad .\end{aligned}} \tag{12.112}$$

Die Koeffizienten resultieren wegen (12.96) sofort aus

$$\boxed{\begin{aligned}a'_{\ell,m} \cdot g_{\ell,m} &= -kc \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \iint \vec{r} \circ \vec{B}\ \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\ \mathrm{d}^2\Omega \\ b'_{\ell,m} \cdot f_{\ell,m} &= \frac{k}{c} \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \iint \vec{r} \circ \vec{E}\ \mathrm{Y}^*_{\ell,m}\ \mathrm{d}^2\Omega \quad ,\end{aligned}} \tag{12.113}$$

wobei

$$\vec{r} \circ \vec{\nabla} \times g_{\ell,m} \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} = g_{\ell,m} \vec{r} \circ \vec{\nabla} \times \vec{\mathrm{X}}_{\ell,m} = i g_{\ell,m} \sqrt{\ell(\ell+1)} \cdot \mathrm{Y}_{\ell,m} \tag{12.114}$$

berücksichtigt wurde, und die zweite Umformung aus (12.97) resultiert. Bevor wir das Nah- und Fernfeldverhalten untersuchen, interessieren wir uns für die Quellen, die die elektrodynamischen Multipolfelder hervorrufen.

12.4.3 Quellen der Multipolfelder

Zur Erkundung des Beitrags spezieller Quellverteilungen zu den Multipolfeldern lassen wir harmonisch zeitabhängige Raumladungen ϱ_q, Stromdichten $\vec{j}_\mathsf{q}$ und Magnetisierungen $\vec{M}_\mathsf{q}$ zu. Bei allgemeiner Zeitabhängigkeit führt eine Fourieranalyse wieder auf die hier betrachteten harmonischen Quellen. Die Maxwellschen Gleichungen lauten ähnlich wie in (7.13) bis (7.16)

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E} &= -i\omega\vec{B} = 0 \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} - i\frac{k}{c}\vec{E} &= \mu\mu_0 \left(\vec{j}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla} \times \vec{M}_{\mathsf{q}}\right) \\
\vec{\nabla} \circ \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho_{\mathsf{q}} \\
\vec{\nabla} \circ \vec{B} &= 0 \quad ,
\end{aligned} \tag{12.115}$$

wobei für die Quellen die Kontinuitätsgleichung $i\omega\varrho_{\mathsf{q}} = \vec{\nabla} \circ \vec{j}_{\mathsf{q}}$ gilt. Da die Behandlung divergenzfreier Felder einfacher ist, wird die Feldvariable

$$\vec{E}\prime = \vec{E} + \frac{1}{i\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{j}_{\mathsf{q}} \tag{12.116}$$

eingeführt, wodurch sich (12.115) zu

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times \vec{E}\prime + i\omega\vec{B} &= \frac{1}{i\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{\nabla} \times \vec{j}_{\mathsf{q}} \\
\vec{\nabla} \times \vec{B} - i\frac{k}{c}\vec{E}\prime &= \mu\mu_0\vec{\nabla} \times \vec{M}_{\mathsf{q}} \\
\vec{\nabla} \circ \vec{E}\prime &= 0 \\
\vec{\nabla} \circ \vec{B} &= 0
\end{aligned} \tag{12.117}$$

ergeben und aus den ersten beiden Gleichungen jeweils nach anwenden der Rotation und Einsetzen der anderen Gleichung die Wellengleichungen

$$\begin{aligned}
\left(\Delta + k^2\right)\vec{E}\prime &= \frac{1}{-i\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{\nabla} \times \left(k^2\vec{M}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla} \times \vec{j}_{\mathsf{q}}\right) \\
\left(\Delta + k^2\right)\vec{B} &= -\mu\mu_0\vec{\nabla} \times \left(\vec{j}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla} \times \vec{M}_{\mathsf{q}}\right)
\end{aligned} \tag{12.118}$$

resultieren. Auch hier werden wieder nur die skalaren Größen $\vec{r} \circ \vec{B}$ und $\vec{r} \circ \vec{E}\prime$ betrachtet. Wir beachten

$$\vec{r} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{C}\right) = \left(\vec{r} \times \vec{\nabla}\right) \circ \vec{C} = i\vec{\mathrm{L}} \circ \vec{C} \tag{12.119}$$

und erhalten aus (12.118)

$$\begin{aligned}\left(\Delta + k^2\right)\left(\vec{r}\circ\vec{E}'\right) &= \frac{-1}{\omega\varepsilon\varepsilon_0}\vec{\mathrm{L}}\circ\left(k^2\vec{M}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla}\times\vec{j}_{\mathsf{q}}\right)\\ \left(\Delta + k^2\right)\left(\vec{r}\circ\vec{B}\right) &= -i\mu\mu_0\vec{\mathrm{L}}\circ\left(\vec{j}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla}\times\vec{M}_{\mathsf{q}}\right) \quad ,\end{aligned} \tag{12.120}$$

deren Lösungen im freien Raum mit der Greenschen Funktion

$$\begin{aligned}\vec{r}\circ\vec{E}' &= \frac{1}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0}\iiint \vec{\mathrm{L}}'\circ\left(k^2\vec{M}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla}\times\vec{j}_{\mathsf{q}}\right)\frac{\exp\left\{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'\\ \vec{r}\circ\vec{B} &= i\frac{\mu\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{\mathrm{L}}'\circ\left(\vec{j}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla}\times\vec{M}_{\mathsf{q}}\right)\frac{\exp\left\{-ik|\vec{r}-\vec{r}'|\right\}}{|\vec{r}-\vec{r}'|}\,\mathrm{d}^3r'\end{aligned} \tag{12.121}$$

lauten. Macht man jetzt auf der linken Seite den Summenansatz (12.100) für $\vec{r}\circ\vec{E}'$ bzw. $\vec{r}\circ\vec{B}$ und ersetzt auf der rechten Seite die Greensche Funktion durch ihre Entwicklung nach Kugelflächenfunktionen (12.86), ergibt sich ein zunächst recht unübersichtlicher Ausdruck. Zur weiteren Behandlung wollen wir annehmen, dass das Feld außerhalb der Quellverteilung gesucht ist, so dass in (12.86) $r_< = r'$ und $r_> = r$ wird. Außerdem fordern wir, dass die Felder für große Werte von r verschwinden sollen, was physikalisch sinnvoll ist und in (12.81) auf $A^{(2)}_{\ell,m} = 0$ führt. Einsetzen von (12.110) auf der linken Seite sowie (12.86) auf der rechten Seite führt mit $a'_{\ell,m}\cdot A^{(1)}_{\ell,m} = a_{\ell,m}$ und $b_{\ell,m} = b'_{\ell,m}\cdot A^{(1)}_{\ell,m}$ auf

$$\begin{aligned}\vec{r}\circ\vec{B} &= \sum_{\ell}\sum_{m}\frac{-1}{kc}a_{\ell,m}\,\mathrm{h}^{(1)}_{\ell}\left\{kr\right\}\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\}\sqrt{\ell(\ell+1)}\\ &= \frac{i\mu\mu_0}{4\pi}\iiint \vec{\mathrm{L}}'\circ\left(\vec{j}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla}\times\vec{M}_{\mathsf{q}}\right)\\ &\quad\cdot\sum_{\ell}\sum_{m} i4\pi k\,\mathrm{j}_{\ell}\left\{kr'\right\}\mathrm{h}^{(1)}_{\ell}\left\{kr\right\}\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\}\cdot\mathrm{Y}^{*}_{\ell,m}\left\{\theta',\varphi'\right\}\,\mathrm{d}^3r'\\ \vec{r}\circ\vec{E}' &= \sum_{\ell,m}\frac{c}{k}b_{\ell,m}\,\mathrm{h}^{(1)}_{\ell}\left\{kr\right\}\mathrm{Y}_{\ell,m}\left\{\theta,\varphi\right\}\sqrt{\ell(\ell+1)}\\ &= \frac{-1}{4\pi\omega\varepsilon\varepsilon_0}\iiint \vec{\mathrm{L}}'\circ\left(k^2\vec{M}_{\mathsf{q}} + \vec{\nabla}\times\vec{j}_{\mathsf{q}}\right)\cdot\end{aligned} \tag{12.122}$$

$$\cdot \sum_{\ell} \sum_{m} i4\pi k \, \mathrm{j}_\ell \left\{kr'\right\} \mathrm{h}_\ell^{(1)} \left\{kr\right\} \mathrm{Y}_{\ell,m} \left\{\theta, \varphi\right\} \cdot \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \left\{\theta', \varphi'\right\} \, \mathrm{d}^3 r'$$

woraus mit Orthogonalentwicklung und $\frac{k}{c} = \omega\varepsilon\varepsilon_0\mu\mu_0$ sofort

$$\begin{aligned} a_{\ell,m} &= c\frac{k\mu\mu_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \iiint \vec{\mathrm{L}}' \circ \left(\vec{j}_\mathsf{q} + \vec{\nabla} \times \vec{M}_\mathsf{q}\right) \mathrm{j}_\ell \left\{kr'\right\} \mathrm{Y}_{\ell,m} \left\{\theta', \varphi'\right\} \, \mathrm{d}^3 r' \\ b_{\ell,m} &= -i\frac{k\mu\mu_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \iiint \vec{\mathrm{L}}' \circ \left(k^2 \vec{M}_\mathsf{q} + \vec{\nabla} \times \vec{j}_\mathsf{q}\right) \mathrm{j}_\ell \left\{kr'\right\} \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \left\{\theta', \varphi'\right\} \, \mathrm{d}^3 r' \end{aligned} \tag{12.123}$$

folgt. Diese Ausdrücke sind exakt für Punkte außerhalb der Quellverteilung. Etwas störend wirkt hier der Drehimpulsoperator $\vec{\mathrm{L}}'$, den man aber mit den einfach nachzurechnenden Identitäten

$$\begin{aligned} \vec{\mathrm{L}} \circ \vec{C} &= i\vec{\nabla} \circ \left(\vec{r} \times \vec{C}\right) \\ \vec{\mathrm{L}} \circ \left(\vec{\nabla} \times \vec{C}\right) &= i\Delta \left(\vec{r} \circ \vec{C}\right) - \frac{i}{r}\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \Delta \vec{C}\right) \end{aligned} \tag{12.124}$$

substituieren kann, wenn jeweils $\vec{j}_\mathsf{q}$ oder $\vec{M}_\mathsf{q}$ für $\vec{C}$ eingesetzt wird. Mit etwas intensiver Rechnung führt teilweise partielle Integration auf das exakte Ergebnis

$$\boxed{\begin{aligned} a_{\ell,m} &= i\frac{kc\mu\mu_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \\ &\cdot \iiint \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \cdot \left[\mathrm{j}_\ell \, \vec{\nabla}' \circ \left(\vec{r}' \times \vec{j}_\mathsf{q}\right) + \left(\vec{\nabla}' \circ \vec{M}_\mathsf{q}\right) \frac{\partial}{\partial r'} r' \, \mathrm{j}_\ell - k^2 \left(\vec{r}' \circ \vec{M}_\mathsf{q}\right) \mathrm{j}_\ell\right] \mathrm{d}^3 r' \\ b_{\ell,m} &= \frac{k\mu\mu_0}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \qquad\qquad\qquad\qquad (12.125) \\ &\cdot \iiint \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \cdot \left[k^2 \vec{\nabla} \circ \left(\vec{r}' \times \vec{M}_\mathsf{q}\right) \mathrm{j}_\ell - k^2 \left(\vec{r}' \circ \vec{j}_\mathsf{q}\right) \mathrm{j}_\ell - \frac{i\omega}{r'} \varrho \cdot \frac{\partial}{\partial r'} \left(r' \, \mathrm{j}_\ell\right)\right] \mathrm{d}^3 r' \end{aligned}}$$

wobei $\vec{\nabla} \circ \vec{j}_\mathsf{q} = i\omega\varrho$ ersetzt wurde.

Diese Darstellung der Multipolkoeffizienten wird übersichtlich, wenn die Ausdehnung der Quellen klein gegen die Wellenlänge, also $kr' \ll 1$ ist. Näherung der sphärischen Besselfunktion für kleine Argumente ergibt bei Berücksichtigung der jeweils kleinsten Potenz

$$\begin{aligned} a_{\ell,m} &= -ic\frac{k^{\ell+1}\mu\mu_0}{(2\ell+1)!!}\sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}} \cdot \left(M_{\ell,m} + M'_{\ell,m}\right) \\ b_{\ell,m} &= \frac{k^{\ell+1}\mu\mu_0}{(2\ell+1)!!}\sqrt{\frac{\ell+1}{\ell}} \cdot \left(Q_{\ell,m} + Q'_{\ell,m}\right) \end{aligned} \tag{12.126}$$

mit den Multipolmomenten

$$\begin{aligned} Q_{\ell,m} &= \iiint r'^\ell \, \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \, \varrho \, \mathrm{d}^3 r' \\ Q'_{\ell,m} &= \frac{-ik}{\ell+1} \iiint r'^\ell \, \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \, \vec{\nabla}' \circ \left(\vec{r}' \times \vec{M}_\mathsf{q}\right) \, \mathrm{d}^3 r' \\ M_{\ell,m} &= -\frac{1}{\ell+1} \iiint r'^\ell \, \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \, \vec{\nabla}' \circ \left(\vec{r}' \times \vec{j}_\mathsf{q}\right) \, \mathrm{d}^3 r' \\ M'_{\ell,m} &= -\iiint r'^\ell \, \mathrm{Y}^*_{\ell,m} \, \vec{\nabla}' \circ \vec{M}_\mathsf{q} \, \mathrm{d}^3 r' \quad . \end{aligned} \tag{12.127}$$

Das elektrische Multipolmoment $Q_{\ell,m}$ hat dabei die gleiche Form wie in der Elektrostatik, was zu erwarten war.

Kapitel 13

Störungen

Störungen in ansonsten homogenen Gebieten führen zur Veränderung der Felder und zu unerwünschter Abstrahlung. Solche Störungen können zum Beispiel Dichteschwankungen oder Einschlüsse im Material sein, aber auch Abweichungen von Grenzflächen von der idealen Form, z.B. Wellenleiterberandungen, welche zur Streuung elektromagnetischer Wellen führen. Will man den Einfluss auf die Eigenschaften eines Bauelementes, z.B. die Resonanzfrequenz eines Resonators oder den Ausbreitungskoeffizienten β eines Wellenleiters erfassen, bedient man sich sogenannter stationärer Ausdrücke. Im wesentlichen gewichtet man bei diesem Verfahren die Abweichung mit den Feldern der ungestörten Anordnung und gewinnt daraus ein Maß für den Einfluss auf die gesuchte Größe. Will man dagegen etwas über die Größe der verlorengegangenen Leistung wissen, muss man die abgestrahlte Leistung berechnen. Für kleine Störungen nimmt man dafür die sogenannte Methode der effektiven Quellen, die wir im folgenden Kapitel herleiten werden.

13.1 Störungstheorie für Streuung

Wir erinnern uns an die Maxwellschen Gleichungen in polarisierbarer Materie bei Abwesenheit von Quellen (7.13) - (7.16). Ersetzt man in (7.14) die elektrische Feldstärke durch die dielektrische Verschiebung $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ (7.11), resultiert nach Multiplikation mit ε_0 und

Anwendung des Rotationsoperators

$$\vec{\nabla} \times \left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{D} - \vec{P}\right)\right] = -\Delta\vec{D} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}\right) = -\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{\nabla} \times \vec{B}\right) \quad . \tag{13.1}$$

Wir ersetzen weiter $\vec{B} = \mu_0\vec{H} + \mu_0\vec{M}$ (7.12) und erhalten mit (7.13)

$$\begin{aligned} -\Delta\vec{D} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}\right) &= -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\left[\vec{\nabla} \times \left(\vec{H} + \vec{M}\right)\right] \\ &= -\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} - \frac{1}{c_0^2} \circ \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla} \times \vec{M} \quad . \end{aligned} \tag{13.2}$$

Umsortieren führt auf eine inhomogene Wellengleichung für die dielektrische Verschiebung,

$$\Delta\vec{D} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} = \frac{1}{c_0^2}\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{M} - \vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{P}\right) \quad . \tag{13.3}$$

Mit dem gleichen Vorgehen findet man eine Wellengleichung für die magnetische Induktion

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D} = \frac{1}{c_0^2}\left(\vec{\nabla} \times \frac{\partial}{\partial t}\vec{P}\right) - \mu_0\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{M}\right) \quad . \tag{13.4}$$

Bis hierhin sind alle Gleichungen exakt und es wurden keine einschränkenden Annahmen gemacht. Ist der Term auf der rechten Seite bekannt, kann das gestörte Feld sofort berechnet werden. Im Allgemeinen trifft dies leider nicht zu. Die oben stehende Gleichung ist aber Ausgangspunkt vieler Näherungsverfahren. Für die weitere Lösung machen wir einen Summenansatz für die gestörten Felder mit

$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_\mathrm{s} \quad ; \quad \vec{P} = \vec{P}_0 + \vec{P}_\mathrm{s} \quad ; \quad \vec{D} = \vec{D}_0 + \vec{D}_\mathrm{s} \\ \vec{D}_0 = \varepsilon_0\vec{E}_0 + \vec{P}_0 \quad ; \quad \vec{D}_\mathrm{s} = \varepsilon_0\vec{E}_\mathrm{s} + \vec{P}_\mathrm{s} \\ \vec{H} = \vec{H}_0 + \vec{H}_\mathrm{s} \quad ; \quad \vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_\mathrm{s} \quad ; \quad \vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_\mathrm{s} \\ \vec{B}_0 = \mu_0\left(\vec{H}_0 + \vec{M}_0\right) \quad ; \quad \vec{B}_\mathrm{s} = \mu_0\left(\vec{H}_\mathrm{s} + \vec{M}_\mathrm{s}\right) \quad . \end{aligned} \tag{13.5}$$

Für die gestörten (Index „s”) und die ungestörten Felder (Index „0”) gelten die gleichen Wellengleichungen wie oben. Handelt es sich im ungestörten Fall zusätzlich um lineare homogene Medien, gilt also $\vec{D}_0 = \varepsilon\varepsilon_0\vec{E}_0$ und $\vec{B}_0 = \mu\mu_0\vec{H}_0$, ergibt sich die bekannte homogene Wellengleichung für die dielektrische Verschiebung

$$\begin{aligned} \Delta\vec{D}_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{D}_0 &= 0 \\ \Delta\vec{B}_0 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{B}_0 &= 0 \quad . \end{aligned} \tag{13.6}$$

Wir wollen uns zunächst in sofern einschränken, dass wir annehmen, dass die Polarisationen die gleiche Zeitabhängigkeit wie die Felder aufweisen. Da die Maxwellgleichungen linear sind, genügt es repräsentativ nur eine Spektralkomponente der Fourierzerlegung zu betrachten. Als Zeitabhängigkeit verwenden wir im folgenden $\exp\{i\omega t\}$. Damit reduziert sich die Wellengleichung auf

$$\begin{aligned} \Delta\vec{D}_\mathsf{s} + k_0^2\vec{D}_\mathsf{s} &= -\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{P}_\mathsf{s}\right) + i\frac{k_o}{c_0}\vec{\nabla}\times\vec{M}_\mathsf{s} \\ \Delta\vec{B}_\mathsf{s} + k_0^2\vec{B}_\mathsf{s} &= -\mu_0\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{M}_\mathsf{s}\right) + ik_0\cdot z_0\vec{\nabla}\times\vec{P}_\mathsf{s} \quad . \end{aligned} \tag{13.7}$$

Die formale Lösung der Wellengleichung (13.7) für das Störfeld $\vec{D}_\mathsf{s}$ lautet

$$\vec{D}_\mathsf{s} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{-i\,(k_0|\vec{r}-\vec{r}'|)\}}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|}\left[+\vec{\nabla}'\times\left(\vec{\nabla}'\times\vec{P}_\mathsf{s}\right) - i\frac{k_0}{c_0}\vec{\nabla}'\times\vec{M}_\mathsf{s}\right]\,\mathrm{d}^3r' \quad . \tag{13.8}$$

In der hier interessierenden Fernzone reduziert sich die Lösung auf

$$\vec{D}_\mathsf{s} = \vec{k}_\mathsf{s}\cdot\frac{\exp\{-ik_0r\}}{r} \tag{13.9}$$

mit der Streuamplitude

$$
\begin{aligned}
\vec{k}_{\mathsf{s}} &= \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[+\vec{\nabla}'\times\left(\vec{\nabla}'\times\vec{P}_{\mathsf{s}}\right)-i\frac{k_0}{c_0}\vec{\nabla}'\times\vec{M}_{\mathsf{s}}\right]\cdot\exp\left\{-ik_0\left(\vec{r}'\circ\vec{e}_{\mathsf{r}}\right)\right\}\,\mathrm{d}^3r' \\
&= \frac{k_0^2}{4\pi}\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\vec{e}_{\mathsf{r}}\times\left(\vec{P}_{\mathsf{s}}\times\vec{e}_{\mathsf{r}}\right)+i\frac{k_0}{c_0}\left(\vec{e}_{\mathsf{r}}\times\vec{M}_{\mathsf{s}}\right)\right]\cdot\exp\left\{-ik_0\vec{r}'\circ\vec{e}_{\mathsf{r}}\right\}\,\mathrm{d}^3r' \qquad (13.10)
\end{aligned}
$$

die in der letzten Darstellung nach partieller Integration resultiert. Beim Schritt von (13.8) nach (13.9) bzw. (13.10) wurde vorausgesetzt, dass sich die Quellverteilungen in der Nähe des Ursprungs des Koordinatensystems befinden. An dieser Stelle soll der häufig verwendete **Streuquerschnitt** eingeführt werden. Er gibt an, wie groß die Streuamplitude des gestörten Feldes im Vergleich zum ungestörten Feld ist. Man gibt dazu die Polarisationsrichtung $\vec{e}_{\mathsf{p}}$ des gestörten Feldes vor und bezieht sich auf den Raumwinkel $\mathrm{d}\Omega$, so dass der Streuquerschnitt

$$
\frac{\mathrm{d}o}{\mathrm{d}\Omega}=\frac{|\vec{e}_{\mathsf{p}}\circ\vec{k}_{\mathsf{s}}|^2}{|\vec{D}_0|^2} \qquad (13.11)
$$

resultiert. Die Fläche $\mathrm{d}o$ gibt an, durch welchen Ausschnitt der Kugeloberfläche $\mathrm{d}\Omega$ das ungestörte Feld strahlen müsste, um die gleiche Leistung in der gewählten Polarisationsrichtung zu erzeugen, wie das gestreute Feld. Anschaulich kann man sich das durch ein Loch der Fläche $\mathrm{d}o$ im Strahlkegel mit dem Querschnitt $\mathrm{d}\Omega$ vorstellen. Genau wie für $\vec{D}_{\mathsf{s}}$ lässt sich auch für $\vec{B}_{\mathsf{s}}$ eine formale Lösung der Wellengleichung (13.7) ähnlich zu (13.9) und (13.10) mit

$$
\begin{aligned}
\vec{B}_{\mathsf{s}} &= L_{\mathsf{s}}\cdot\frac{\exp\left\{-ik_0r\right\}}{r} \qquad (13.12)\\
L_{\mathsf{s}} &= \frac{1}{4\pi}\cdot\iiint\limits_{-\infty}^{\infty}\left[\mu_0\vec{e}_{\mathsf{r}}\times\left(\vec{M}_{\mathsf{s}}\times\vec{e}_{\mathsf{r}}\right)+ik_0Z_0\left(\vec{e}_{\mathsf{r}}\times\vec{P}_{\mathsf{s}}\right)\right]\exp\left\{-ik_0\vec{r}'\circ\vec{e}_{\mathsf{r}}\right\}\,\mathrm{d}^3r'
\end{aligned}
$$

angeben. Die formale Lösung (13.10) bzw. (13.13) der Wellengleichung (13.7) für das gestörte Feld $\vec{D}_{\mathsf{s}}$ ist natürlich nicht direkt lösbar. Hat man aber eine gute Abschätzung für die meist unbekannten Streupolarisationen, so führt (13.10) auf eine erste Näherung für $\vec{D}_{\mathsf{s}}$ und über die Maxwellgleichung (7.13) auch für $\vec{H}_\mathsf{s}$ und (13.13) auf $\vec{B}_\mathsf{s}$ und mit (7.14) auf $\vec{E}_\mathsf{s}$. Mit diesen Resultaten korrigiert man die Störpolarisationen $\vec{P}_\mathsf{s} = \vec{D}_\mathsf{s} - \varepsilon_0 \vec{E}_\mathsf{s}$ und $\vec{M}_\mathsf{s} = \frac{1}{\mu_0}\vec{B}_\mathsf{s} - \vec{H}_\mathsf{s}$ und geht damit wieder in die formale Lösung (13.10) um eine Näherung höherer Ordnung zu erhalten. Die Konvergenz der so entstehenden Reihen ist im Rahmen quantenmechanischer Überlegungen von Max Born eingehend untersucht worden.

13.2 Methoden der effektiven Quellen, Rayleigh Streuung

Die Störpolarisationen $\vec{M}_\mathsf{s}$ und $\vec{P}_\mathsf{s}$ wirken wie Quellen der Störfelder in (13.10) und (13.13). Beschränkt man sich auf eine Näherung erster Ordnung, in der Quantenmechanik die sogenannte Bornsche Näherung, erhält man einen bereits im Jahr 1881 von Lord Rayleigh angegebenen Formalismus. Wir nehmen an, dass die Störung durch eine kleine Abweichung der Materialkonstanten ε uns μ hervorgerufen wird. Es gelte in guter Näherung $\vec{D}_\mathsf{s} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon + \Delta\varepsilon\right) \vec{E}$ und $\vec{B} = \mu_0 \left(\mu + \Delta\mu\right) \vec{H}$ mit $\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \ll 1$ und $\frac{\Delta\mu}{\mu} \ll 1$. Die Polarisationsbeiträge sind $\vec{P} = \vec{D} - \varepsilon_0\vec{E} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon - 1\right) \vec{E} + \varepsilon_0 \Delta\varepsilon \vec{E} = \vec{P}_0 + \vec{P}_\mathsf{s}$ und $\vec{M} = \vec{M}_0 + \vec{M}_\mathsf{s} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{H} = \left(\mu - 1\right) \vec{H} + \Delta\mu\vec{H}$, so dass für die Störpolarisationen

$$
\begin{aligned}
\vec{M}_\mathsf{s} &= \frac{\Delta\mu}{\mu} \cdot \frac{\vec{B}}{\mu_0} \simeq \frac{\Delta\mu}{\mu} \cdot \frac{\vec{B}_0}{\mu_0} \\
\vec{P}_\mathsf{s} &= \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \vec{D} \simeq \frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon} \cdot \vec{D}_0
\end{aligned}
\tag{13.13}
$$

angenommen werden kann. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von **effektiven Quellen** der in (13.13) angegebenen Stärke. Handelt es sich bei den ungestörten Feldern um Repräsentanten einer ebenen Welle mit Polarisation in $\vec{e}_\mathsf{d}$-Richtung und Ausbreitung gemäß $\exp\left\{-i\vec{k} \circ \vec{r}\right\}$ in $\vec{e}_\mathsf{k}$-Richtung, so hängen $\vec{D}_0 = D_0 \cdot \vec{e}_\mathsf{d} \cdot \exp\left\{i\left(\omega t - k\vec{e}_\mathsf{r} \circ \vec{r}\right)\right\}$ über $\vec{B}_0 = Z \cdot \left(\vec{e}_\mathsf{k} \times \vec{D}_0\right)$ zusammen. Das gestreute Feld hat dann in der Fernzone die Stärke

$$\vec{D}_{\mathsf{s}} = \frac{k_0^2 D_0}{4\pi r} \exp\left\{i\left(\omega t - k_0 r\right)\right\} \cdot \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-ik_0\left(\vec{e}_{\mathsf{k}} - \vec{e}_{\mathsf{r}}\right) \circ \vec{r}'\right\} \cdot$$
$$\cdot \left[\frac{\Delta\varepsilon}{\varepsilon}\vec{e}_{\mathsf{r}} \times \left(\vec{e}_{\mathsf{d}} \times \vec{e}_{\mathsf{r}}\right) + i\frac{\Delta\mu k_0}{\mu\mu_0}\vec{e}_{\mathsf{r}} \times \left(\vec{e}_{\mathsf{k}} \times \vec{e}_{\mathsf{d}}\right)\right] d^3r' \quad . \tag{13.14}$$

Ist die Wellenlänge der erzeugenden Welle groß gegen die räumliche Ausdehnung der Störung, kann der exp-Term im Integral durch eins approximiert werden. Der Streuausdruck entspricht dann hinsichtlich der Frequenz- und Winkelabhängigkeit der in Kapitel 11.2 angegebenen Dipolnäherung. Die effektiven Quellen verhalten sich also wie magnetische Dipole, die die einfallende ebene Welle streuen. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von der **Rayleighstreuung** . Insbesondere der charakteristische Abfall der Streuintensität mit wachsender Wellenlänge, der mit λ^{-4} vonstatten geht, wie in 11.2 gezeigt wurde, ist ein wesentliches Merkmal der Rayleighstreuung.

Anhang A

Häufig verwendete Begriffe

Linear

Als linear bezeichnet man den Zusammenhang zwischen zwei Feldgrößen dann, wenn die Größen direkt zueinander proportional sind. Der Proportionalitätsfaktor kann für vektorielle Größen ein Tensor sein. Ist zum Beispiel $[\varepsilon]$ ein Tensor, dann sind im allgemeinen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ nicht mehr parallel zueinander.

Isotrop

In isotropen Medien sind die Feldgrößen $\vec{D}$ und $\vec{E}$ bzw. $\vec{B}$ und $\vec{H}$ zueinander parallel, d.h. $\vec{D} \times \vec{E} = 0$ bzw. $\vec{B} \times \vec{H} = 0$. Dies bedeutet, dass $[\varepsilon]$ und $[\mu]$ nur noch Elemente auf der Hauptdiagonalen enthalten, die alle gleich sind, so dass ε und μ zu Skalaren werden.

Homogen

In homogenen Medien hängen die Materialparameter μ, ε und σ nicht vom Ort ab, d.h. $\vec{\nabla}\mu = 0$, $\vec{\nabla}\varepsilon = 0$ und $\vec{\nabla}\sigma = 0$.

Monochromatisch

Monochromatische Funktionen sind harmonisch zeitabhängig, wobei nur eine Frequenz zugelassen wird. Mit Hilfe der Fouriertransformation lässt sich jede beliebige zeitabhängige

Funktion in eine lineare Superposition von monochromatischen Funktionen entwickeln.

Anhang B

In der Vorlesung häufig benutzte Rechenregeln

B.1 Differentialoperationen

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} f) = 0 \tag{B.1}$$

(B.2)

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0 \tag{B.3}$$

$$\vec{\nabla} \cdot (f\vec{A}) = f\, \vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} f \tag{B.4}$$

(B.5)

$$\vec{\nabla} \times (f\vec{A}) = f\, \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{\nabla} f) \times \vec{A} \tag{B.6}$$

$$\vec{\nabla}(\vec{A}\cdot\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} + (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + \vec{A}\times(\vec{\nabla}\times\vec{B}) + \vec{B}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) \tag{B.7}$$

(B.8)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{A}\times\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} \tag{B.9}$$

(B.10)

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{A} - \vec{A}\cdot\vec{\nabla}\times\vec{B} \tag{B.11}$$

(B.12)

$$\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \Delta\vec{A} \tag{B.13}$$

Die Normal- und Tangentialkomponente eines Feldes $\vec{F}$ an einer Fläche errechnen sich mit dem Normalenvektor auf die Fläche $\vec{n}$ zu

$$\vec{F}_{\text{norm}} = (\vec{n}\circ\vec{F})\vec{n} \tag{B.14}$$

$$\vec{F}_{\text{tan}} = (\vec{n}\times\vec{F})\times\vec{n} \tag{B.15}$$

Wenn für zwei Vektoren gilt $\vec{a}\circ\vec{b} = 0$ (sie stehen senkrecht aufeinander), ergibt sich der nützliche Zusammenhang

$$(\vec{a}\times\vec{b})\times\vec{a} = (\vec{a}\circ\vec{a})\vec{b} \tag{B.16}$$

Sei $\vec{a} = \vec{b}\times\vec{c}$ mit $\vec{b}\circ\vec{c} = 0$. Dann gilt

$$\vec{c} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{\vec{b}\circ\vec{b}} \quad \vec{b} = \frac{\vec{c}\times\vec{a}}{\vec{c}\circ\vec{c}}$$

B.2 Stokesscher Integralsatz

$$\iint\limits_S (\vec{\nabla}\times\vec{T})\circ \mathrm{d}^2\vec{r} = \oint\limits_{C_\mathrm{S}} \vec{T}\circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad . \tag{B.17}$$

B.3 Gaußscher Integralsatz

$$\iiint\limits_{V} \vec{\nabla} \circ \vec{C}\,\{\vec{r}\}\ \mathrm{d}^3 r = \oiint\limits_{S_V} \vec{C}\,\{\vec{r}\} \circ \mathrm{d}^2\vec{r} \tag{B.18}$$

B.4 Gaußscher Integralsatz in zwei Dimensionen

Für ein ebenes Problem (hier in der $x-y$- Ebene) mit stetig differenzierbarer Vektorfunktion $\vec{W} = W_1\{x,y\}\vec{e}_{\mathrm{x}} + W_2\{x,y\}\vec{e}_{\mathrm{y}}$ reduzieren sich beide obigen Integralsätze auf die Gaußsche Integralformel

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial}{\partial x}W_2 - \frac{\partial}{\partial y}W_1\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{C_S} \vec{W} \circ \mathrm{d}\vec{\ell} \quad .$$

Diese Darstellung ist für unsere Zwecke unhandlich und wird durch die Substitution $W_1 = -V_2$, $W_2 = V_1$ in die Form

$$\iint\limits_{S} \left(\frac{\partial}{\partial x}V_1 + \frac{\partial}{\partial y}V_2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{C_S} \vec{W} \circ \mathrm{d}\vec{\ell}$$

überführt. Der Ausdruck $\frac{\partial}{\partial x}V_1 + \frac{\partial}{\partial y}V_2$ kann mit dem **transversalen Nablaoperator** $\vec{\nabla}_{\mathrm{T}} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{e}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{e}_{\mathrm{y}}$ vereinfacht geschrieben werden. Die Integration erfolgt über ein Flächenelement $\mathrm{d}^2\vec{S} = \mathrm{d}^2 S\vec{e}_{\mathrm{z}} = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\vec{e}_{\mathrm{z}}$. Im Linienintegral kann wegen der speziellen Wahl von $\vec{V}$ die Normale auf den Rand der Fläche $\vec{n}_{\mathrm{C}} = -\vec{e}_{\mathrm{x}} + \vec{e}_{\mathrm{y}}$ verwendet werden. Somit resultiert die alternative Schreibweise

$$\iint\limits_{S} \left(\vec{\nabla}_{\mathrm{T}} \circ \vec{V}\right) \mathrm{d}^2 r = \oint_{C_S} \vec{V} \circ \vec{n}\,\mathrm{d}\ell \quad , \tag{B.19}$$

die den Namen **Divergenzsatz** trägt.

Anhang C

Spezielle Koordinatensysteme

C.1 Generelles

Die Angabe eines Punktes im Raum erfolgt üblicherweise über ein Zahlentripel $(A_\mathrm{x}, A_\mathrm{y}, A_\mathrm{z})$. Gemeint ist damit ein Vektor $\vec{r}$, der vom Ursprung des Koordinatensystems zu dem Punkt zeigt, hier also $\vec{r} = A_\mathrm{x}\vec{e}_\mathrm{x} + A_\mathrm{y}\vec{e}_\mathrm{y} + A_\mathrm{z}\vec{e}_\mathrm{z}$. Dabei bezeichnen $\vec{e}_\mathrm{x}$, $\vec{e}_\mathrm{y}$ und $\vec{e}_\mathrm{z}$ die Basisvektoren in $x-$, $y-$ und $z-$Richtung und A_x, A_y und A_z die Komponenten des Vektors. Zeigt der Vektor auf Punkte einer Kurve oder Fläche, kann jede Komponente von den Parametern x, y und z abhängen. Häufig ist es sinnvoll, auf ein anderes System von Basisvektoren , also ein anderes Koordinatensystem gleichem Ursprungs, überzugehen, weil dann z.B. eine Kurve oder Fläche einfacher darstellbar ist.

Gleichzeitig mit dem Übergang auf das neue Koordinatensystem (n, t, ℓ) kann man auch die Parametrisierung einer Kurve ändern. Üblicherweise wählt man die Achsen des neuen Koordinatensystems als Parameter. Der Vektor $\vec{r}_\mathrm{c}$ an Punkte einer Kurve c kann somit entweder im kartesischen System oder im neuen System dargestellt werden. Mischformen der Darstellung können unter Umständen die Rechnung erheblich vereinfachen. Beispielhaft kann $\vec{r}_\mathrm{c}$ also wie folgt dargestellt werden:

$$\vec{r}_{\mathrm{c}} = \begin{cases} A_{\mathrm{x}}\{x,y,z\}\vec{e}_{\mathrm{x}} + A_{\mathrm{y}}\{x,y,z\}\vec{e}_{\mathrm{y}} + A_{\mathrm{z}}\{x,y,z\}\vec{e}_{\mathrm{z}} & \text{Darstellung a)} \\ A_{\mathrm{x}}\{n,t,\ell\}\vec{e}_{\mathrm{x}} + A_{\mathrm{y}}\{n,t,\ell\}\vec{e}_{\mathrm{y}} + A_{\mathrm{z}}\{n,t,\ell\}\vec{e}_{\mathrm{z}} & \text{Darstellung b)} \\ A_{\mathrm{t}}\{x,y,z\}\vec{e}_{\mathrm{t}} + A_{\mathrm{n}}\{x,y,z\}\vec{e}_{\mathrm{n}} + A_{\ell}\{x,y,z\}\vec{e}_{\ell} & \text{Darstellung c)} \\ A_{\mathrm{t}}\{t,n,\ell\}\vec{e}_{\mathrm{t}} + A_{\mathrm{n}}\{t,n,\ell\}\vec{e}_{\mathrm{n}} + A_{\mathrm{z}}\{t,n,\ell\}\vec{e}_{\ell} & \text{Darstellung d)} \end{cases}$$

Hier wurden die möglichen Darstellungsformen aufgelistet. In den Fällen a) und d) handelt es sich um reine Darstellungen mit Parametern und Basisvektoren aus den jeweiligen Koordinatensystemen, bei b) und c) wurden jeweils die Parameter und die Basisvektoren aus einem der beiden Koordinatensysteme verwendet.

Für das neue Koordinatensystem werden meistens die Normal- und Tangentialvektoren an einem ausgewählten Punkt der Kurve bzw. Fläche mit den Parametern (x_0, y_0, z_0) bzw. (t_0, n_0, ℓ_0) gewählt. Die Richtungen der Basisvektoren ändern sich mit der Wahl des Punktes, woraus der Name begleitendes Dreibein entstanden ist.

Kurve

Allgemein können die Normal- und Tangentialvektoren $\vec{n}$, $\vec{t}$ und $\vec{\ell}$ an eine Kurve c, deren Punkte durch den Ortsvektor $\vec{r}_{\mathrm{c}}\{s\}$ mit dem Kurvenparameter s gegeben sind, wie folgt berechnet werden:

$$\begin{array}{lll} \vec{t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\vec{r}_{\mathrm{c}}\Big|_{s_0}; & \vec{e}_{\mathrm{t}} = \frac{\vec{t}}{|\vec{t}|} & \text{(Tangentenvektor)} \\ \vec{n} = \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}s^2}\vec{r}_{\mathrm{c}}\Big|_{s_0}; & \vec{e}_{\mathrm{n}} = \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} & \text{(Hauptnormalenvektor)} \\ & \vec{e}_{\ell} = \vec{e}_{\mathrm{t}} \times \vec{e}_{\mathrm{n}} & \text{(Binormalenvektor)} \end{array}$$

Fläche

Wird als Referenz statt der Kurve eine Fläche A verwendet, hängt der Vektor $\vec{r}_A$, der auf Punkte der Fläche zeigt, von zwei unabhängigen Flächenparametern s_1 und s_2 ab. In diesem Fall resultiert das begleitende Dreibein aus den beiden Tangentialvektoren

$$\vec{t}_1 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_1}\vec{r}_A\Big|_{s_{10},s_{20}}$$

und

$$\vec{t}_2 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s_2}\vec{r}_A\Big|_{s_{10},s_{20}} \quad ,$$

die nicht unbedingt zueinander orthogonal sind $(\vec{t}_1 \circ \vec{t}_2 \geq 0)$. Wählt man

$$\vec{e}_\mathrm{t} = \frac{\vec{t}_1}{|\vec{t}_1|}$$

als ersten Basisvektor, folgt der zweite Basisvektor durch Orthogonalisieren

$$\vec{\ell} = \vec{t}_2 - (\vec{e}_\mathrm{t} \circ \vec{t}_2)\, \vec{t}_\mathrm{t} = \vec{t}_2 - \frac{\vec{t}_1 \circ \vec{t}_2}{|\vec{t}_1|^2}\, \vec{t}_1$$

und Normieren

$$\vec{e}_\ell = \frac{\vec{\ell}}{|\vec{\ell}|} \quad .$$

Der Normalenvektor auf die Fläche wird wie üblich über das Kreuzprodukt

$$\vec{e}_\mathrm{n} = \vec{e}_\mathrm{t} \times \vec{e}_\ell$$

gebildet. Legt manchen Ursprung des Koordinatensystems in die Fläche, werden Punkte auf der Fläche durch $\vec{r} = s_1\vec{e}_\mathrm{t} + s_2 \cdot \vec{e}_\ell$ beschrieben.

Zur Umrechnung der Basisvektoren, z.B. $\vec{e}_\mathrm{x} = a_\mathrm{n} n\{s_{10}, s_{20}\}\vec{e}_\mathrm{n} + a_\mathrm{t}\{s_{10}, s_{20}\}\vec{e}_\mathrm{t} + a_\ell\{s_{10}, s_{20}\}\vec{e}_\ell$ kann die Matrixform $(\vec{e}_\mathrm{x}, \vec{e}_\mathrm{y}, \vec{e}_\mathrm{z}) = M\{s_{10}, s_{20}\}(\vec{e}_\mathrm{t}, \vec{e}_\mathrm{n}, \vec{e}_\ell)^T$ verwendet werden. Im Fall von ebenen und räumlichen Polarkoordinaten sind die Umrechnungen der Basisvektoren in den folgenden Abschnitten dargestellt.

C.2 Ebene Polarkoordinaten (Zylinderkoordinaten)

In Bild C.1 ist die verwendete Geometrie mit den Achsenbezeichnungen für die Zylinderkoordinaten dargestellt.

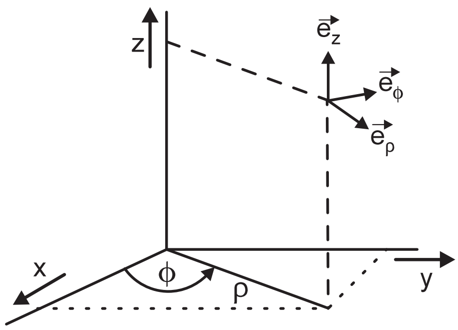
Abbildung C.1: Zylinderkoordinaten

Definitionsbereiche

Radialkomponente $\vec{e_\varrho}$: $\quad 0 \leq \rho < \infty$

Azimutalkomponente $\vec{e_\phi}$: $\quad 0 \leq \phi \leq 2\pi$

Longitudinalkomponente $\vec{e_z}$: $\quad -\infty < z < \infty$



Die Parameter eines Punktes in Zylinderkoordinaten sind mit denen in kartesischer Darstellung durch die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
x &= \rho \cos\{\phi\} \\
y &= \rho \sin\{\phi\} \\
z &= z \\
\rho &= \sqrt{x^2 + y^2} \\
\cos\{\phi\} &= \frac{x}{\rho} \\
\sin\{\phi\} &= \frac{y}{\rho}
\end{aligned}
$$

verknüpft. Koordinatenflächen sind die Flächen

$\rho =$ konst: das sind gerade, koaxiale Kreiszylinder vom Radius ρ mit der $z-$Achse als Zylinderachse,

$\phi =$ konst: das sind die von der $z-$Achse begrenzten Halbebenen,

$z =$ konst: das sind Ebenen senkrecht zur $z-$Achse.

Das vektorielle Linienelement lautet

$$\mathrm{d}\vec{\ell} = \begin{cases} \mathrm{d}\rho\, \vec{e_\rho} & \text{für } \phi, z = \text{konst.} \\ \rho\, \mathrm{d}\phi\, \vec{e_\phi} & \text{für } \rho, z = \text{konst.} \\ \mathrm{d}z\, \vec{e}_{\mathrm{z}}. & \text{für } \rho, \phi = \text{konst.} \end{cases}$$

Die Flächenelemente auf den Koordinatenflächen sind

$$\mathrm{d}^2\vec{r} = \begin{cases} \rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z\, \vec{e_\rho} & \text{auf den Flächen } \rho = \text{konst.} \\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}z\, \vec{e_\phi} & \text{auf den Flächen } \phi = \text{konst.} \\ \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\, \vec{e}_{\mathrm{z}} & \text{auf den Flächen } z = \text{konst.} \end{cases}$$

Das Volumenelement lautet

$$\mathrm{d}^3 r = \rho\ \mathrm{d}\rho\ \mathrm{d}\phi\ \mathrm{d}z.$$

Die Einheitsvektoren werden mit dem Parameter ϕ_0 wie folgt ineinander umgerechnet:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_{\mathrm{z}} \end{pmatrix}_{(P)} = \begin{pmatrix} \cos\{\phi_0\} & \sin\{\phi_0\} & 0 \\ -\sin\{\phi_0\} & \cos\{\phi_0\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\mathrm{x}} \\ \vec{e}_{\mathrm{y}} \\ \vec{e}_{\mathrm{z}} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{\mathrm{x}} \\ \vec{e}_{\mathrm{y}} \\ \vec{e}_{\mathrm{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\{\phi_0\} & -\sin\{\phi_0\} & 0 \\ \sin\{\phi_0\} & \cos\{\phi_0\} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_\rho \\ \vec{e}_\phi \\ \vec{e}_{\mathrm{z}} \end{pmatrix}_{(P)}.$$

Häufig ist die Vektordifferenz von $\vec{r} = r_1\vec{e}_\rho + r_2\vec{e}_\phi + r_3\vec{e}_{\mathrm{z}}$ und $\vec{r'} = r'_1\vec{e'}_\rho + r'_2\vec{e'}_\phi + r'_3\vec{e'}_{\mathrm{z}}$ mit den Umrechnungsparametern ϕ_0 und ϕ'_0 zu berechnen. Es resultiert

$$\begin{aligned} \vec{r} - \vec{r'} = {} & [r_1 - r'_1 \cos\{\phi_0 - \phi'_0\} - r'_2 \sin\{\phi_0 - \phi'_0\}]\, \vec{e}_\rho \\ & + [r_2 - r'_2 \cos\{\phi_0 - \phi'_0\} + r'_1 \sin\{\phi_0 - \phi'_0\}]\, \vec{e}_\phi \\ & + [r_3 - r'_3]\, \vec{e}_{\mathrm{z}} \end{aligned}$$

Der Betrag wird mit

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}-\vec{r'}|^2 &= r_1^2 + {r'}_1^2 - 2r_1r_1'\cos\{\phi_0-\phi_0'\} \\
&+ r_2^2 + {r'}_2^2 - 2r_2r_2'\cos\{\phi_0-\phi_0'\} \\
&- 2(r_1r_2' - r_1'r_2)\sin\{\phi_0-\phi_0'\} \\
&+ r_3^2 + {r'}_3^2 - 2r_3r_3'
\end{aligned}
$$

berechnet. Solange nur Ortsvektoren benutzt werden, die vom Ursprung ausgehen, verschwinden die Größen r_2 und r_2' und die Differenz und dessen Betrag vereinfachen sich mit $r_1 = \rho, r_1' = \rho'; r_3 = z, r_3' = z'$ zu

$$
\begin{aligned}
\vec{r}-\vec{r'} &= [\rho - \rho'\cos\{\phi_0-\phi_0'\}]\,\vec{e}_\rho \\
&+ \rho'\sin\{\phi_0-\phi_0'\}\vec{e}_\phi \\
&+ (z-z')\vec{e}_\mathrm{z}
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
\begin{aligned}
|\vec{r}-\vec{r'}|^2 &= \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho'\cos\{\phi_0-\phi_0'\} \\
&+ (z-z')^2
\end{aligned}
$$

Das Kreuzprodukt der Einheitsvektoren an einem Punkt lautet

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_\rho \times \vec{e}_\phi &= \vec{e}_\mathrm{z} \\
\vec{e}_\phi \times \vec{e}_\mathrm{z} &= \vec{e}_\rho \\
\vec{e}_\mathrm{z} \times \vec{e}_\rho &= \vec{e}_\phi \quad .
\end{aligned}
$$

Weiterhin resultieren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace mit

$$
\vec{\nabla} = \vec{e_\rho}\frac{\partial}{\partial\rho} + \vec{e_\phi}\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi} + \vec{e}_\mathrm{z}\frac{\partial}{\partial z}
$$

	$\frac{\partial}{\partial\rho}$	$\frac{\partial}{\partial\phi}$	$\frac{\partial}{\partial z}$
$\vec{e}_\rho$	0	$\vec{e}_\phi$	0
$\vec{e}_\phi$	0	$-\vec{e}_\rho$	0
$\vec{e}_z$	0	0	0

Tabelle C.1: Partielle Ableitungen der Einheitsvektoren

und Tabelle C.1 zu

$$\vec{\nabla} \cdot V = \text{grad} V = \frac{\partial V}{\partial\rho}\vec{e_\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\phi}\vec{e_\phi} + \frac{\partial V}{\partial z}\vec{e_\text{z}},$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = \text{div}\vec{B} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}B_\phi + \frac{\partial}{\partial z}B_\text{z}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} \cdot V = \Delta V = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}V\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}V + \frac{\partial^2}{\partial z^2}V$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} = \text{rot}\,\vec{B} = &\left[\quad\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\phi}B_\text{z} - \frac{\partial}{\partial z}B_\phi\right]\vec{e_\rho} + \left[\frac{\partial}{\partial z}B_\rho - \frac{\partial}{\partial\rho}B_\text{z}\right]\vec{e_\phi} \\ &+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho B_\phi) - \frac{\partial}{\partial\phi}B_\rho\right]\vec{e_\text{z}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{B} = &\left(\Delta B_\rho - \frac{1}{\rho^2}B_\rho - \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi}B_\phi\right)\vec{e_\rho} \\ &+\left(\Delta B_\phi - \frac{1}{\rho^2}B_\phi + \frac{2}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\phi}B_\rho\right)\vec{e_\phi} + \Delta B_\text{z}\vec{e}_\text{z}\end{aligned}$$

C.3 Räumliche Polarkoordinaten (Kugelkoordinaten)

In Bild C.2 ist die verwendete Geometrie mit den Achsenbezeichnungen für die Kugelkoordinaten dargestellt.

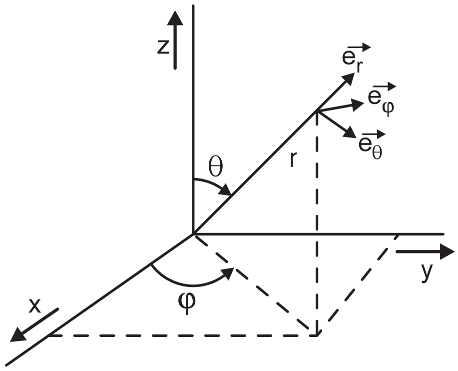
Abbildung C.2: Kugelkoordinaten

Definitionsbereiche

Radialkomponente $\vec{e}_{\mathrm{r}}$: $\quad 0 \leq r < \infty$

Azimutalkomponente $\vec{e_\varphi}$: $\quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$

Polarkomponente, Elevation$\vec{e_\theta}$: $\quad 0 \leq \theta \leq \pi,$



Die Parameter eines Punktes in Kugelkoordinaten sind mit denen in kartesischer Darstellung durch die Beziehungen

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\{\theta\}\cos\{\varphi\} \\
y &= r\sin\{\theta\}\sin\{\varphi\} \\
z &= r\cos\{\theta\} \\
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\
\cos\{\varphi\} &= \frac{x}{+\sqrt{x^2+y^2}} \\
\sin\{\varphi\} &= \frac{y}{+\sqrt{x^2+y^2}} \\
\cos\{\theta\} &= \frac{z}{r} \\
\sin\{\theta\} &= +\sqrt{\frac{x^2+y^2}{r^2}} \\
\sin\{\theta\}\cos\{\varphi\} &= \frac{x}{r} \\
\sin\{\theta\}\sin\{\varphi\} &= \frac{y}{r}
\end{aligned}
$$

verknüpft. Koordinatenflächen sind die Flächen

$r =$ konst, das sind konzentrische Kugelflächen von Radius r mit dem Mittelpunkt im Koordinatenursprung,

$\varphi =$ konst, das sind die von der $z-$Achse begrenzten Halbebenen.

$\theta =$ konst, das sind gerade Kreiskegel vom Öffnungswinkel θ mit der $z-$Achse als Achse und der Spitze im Koordinatenursprung,

Das vektorielle Linienelement lautet

$$d\vec{\ell} = \begin{cases} dr\ \vec{e}_{\rm r} & \text{für } \theta, \varphi = \text{konst.} \\ r\sin\{\theta\}\ d\varphi\ \vec{e_\varphi} & \text{für } r, \theta = \text{konst.} \\ r\ d\theta\ \vec{e_\theta}. & \text{für } r, \varphi = \text{konst.} \end{cases}$$

Die Flächenelemente auf den Koordinatenflächen sind

$$d^2\vec{r} = \begin{cases} r^2\sin\{\theta\}\ d\theta\ d\varphi\ \vec{e}_{\rm r} & \text{auf den Flächen } r = \text{konst.} \\ r\ dr\ d\theta\ \vec{e_\varphi} & \text{auf den Flächen } \varphi = \text{konst.} \\ r\sin\{\theta\}\ dr\ d\varphi\ \vec{e_\theta} & \text{auf den Flächen } \theta = \text{konst.} \end{cases}$$

Das Volumenelement lautet

$$d^3r = dV = r^2\sin\{\theta\}\ dr\ d\varphi\ d\theta.$$

Die Einheitsvektoren werden mit den Parametern θ_0 und φ_0 ineinander umgerechnet:

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{\rm r} \\ \vec{e_\theta} \\ \vec{e_\varphi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\{\theta_0\}\cos\{\varphi_0\} & \sin\{\theta_0\}\sin\{\varphi_0\} & \cos\{\theta_0\} \\ \cos\{\theta_0\}\cos\{\varphi_0\} & \cos\{\theta_0\}\sin\{\varphi_0\} & -\sin\{\theta_0\} \\ -\sin\{\varphi_0\} & \cos\{\varphi_0\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\rm x} \\ \vec{e}_{\rm y} \\ \vec{e}_{\rm z} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_{\rm x} \\ \vec{e}_{\rm y} \\ \vec{e}_{\rm z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\{\theta_0\}\cos\{\varphi_0\} & \cos\{\theta_0\}\cos\{\varphi_0\} & -\sin\{\varphi_0\} \\ \sin\{\theta_0\}\sin\{\varphi_0\} & \cos\{\theta_0\}\sin\{\varphi_0\} & \cos\{\varphi_0\} \\ \cos\{\theta_0\} & -\sin\{\theta_0\} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_{\rm r} \\ \vec{e_\theta} \\ \vec{e_\varphi} \end{pmatrix}.$$

Die Vektordifferenz von $\vec{r} = r_1\vec{e}_{\rm r} + r_2\vec{e}_\Theta + r_3\vec{e}_\varphi$ und $\vec{r'} = r'_1\vec{e'}_{\rm r} + r'_2\vec{e'}_\theta + r'_3\vec{e'}_\varphi$ mit den Umrechnungsparametern φ_0 und φ'_0 bzw. θ_0 und θ'_0 resultiert aus

$$\vec{r} - \vec{r'} = [r_1$$

$$
\begin{aligned}
&- r'_1 \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \sin\{\theta_0\} \sin\{\theta'_0\} + \cos\{\theta_0\} \cos\{\theta'_0\}\right) \\
&- r'_2 \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \sin\{\theta_0\} \cos\{\theta'_0\} - \cos\{\theta_0\} \sin\{\theta'_0\}\right) \\
&- r'_3 \sin\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \sin\{\theta_0\}] \, \vec{e}_{\mathrm{r}} \\
&+ [r_2 \\
&- r'_1 \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \cos\{\theta_0\} \sin\{\theta'_0\} - \sin\{\theta_0\} \cos\{\theta'_0\}\right) \\
&- r'_2 \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \cos\{\theta_0\} \cos\{\theta'_0\} + \sin\{\theta_0\} \sin\{\theta'_0\}\right) \\
&- r'_3 \sin\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \cos\{\theta_0\}] \, \vec{e}_\theta \\
&+ [r_3 \\
&+ r'_1 \sin\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \sin\{\theta'_0\} \\
&+ r'_2 \sin\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \cos\{\theta'_0\} \\
&- r'_3 \cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\}] \, \vec{e}_\varphi \quad .
\end{aligned}
$$

Der Betrag lautet

$$
\begin{aligned}
|\vec{r} - \vec{r'}|^2 = \quad & r_1^2 + {r'}_1^2 - 2 r_1 \, {r'}_1 \left[\cos\{\theta_0 - \theta'_0\} + \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} - 1\right) \sin\{\theta_0\} \sin\{\theta'_0\}\right] \\
& + r_2^2 + {r'}_2^2 - 2 r_2 \, {r'}_2 \left[\cos\{\theta_0 - \theta'_0\} + \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} - 1\right) \cos\{\theta_0\} \cos\{\theta'_0\}\right] \\
& + r_3^2 + {r'}_3^2 - 2 r_3 \, {r'}_3 \cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \\
& + 2 r_1 \, r_2 \cos\{\theta_0\} \sin\{\theta_0\} \sin\{\varphi_0\} \left(\sin\{\varphi_0\} - \cos\{\varphi_0\}\right) \\
& + 2 r'_1 \, r'_2 \cos\{\theta'_0\} \sin\{\theta'_0\} \sin\{\varphi'_0\} \left(\sin\{\varphi'_0\} - \cos\{\varphi'_0\}\right) \\
& - 2 r'_1 \, r_2 \left[\left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} + 1\right) \cos\{\theta_0\} \sin\{\theta'_0\} + \sin\{\theta_0 - \theta'_0\}\right] \\
& - 2 r_1 \, r'_2 \left[\left(\cos\{\varphi_0 - \varphi'_0\} + 1\right) \sin\{\theta_0\} \cos\{\theta'_0\} - \sin\{\theta_0 - \theta'_0\}\right] \\
& + 2 r_1 \, r_3 \sin\{\theta_0\} \cos\{\varphi_0\} \left(\sin\{\varphi_0\} - \cos\{\varphi_0\}\right) \\
& + 2 r'_1 \, r'_3 \sin\{\theta'_0\} \cos\{\varphi'_0\} \left(\sin\{\varphi'_0\} - \cos\{\varphi'_0\}\right) \\
& - 2 r_1 \, r'_3 \sin\{\theta_0\} \sin\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \\
& + 2 r'_1 \, r_3 \sin\{\theta'_0\} \sin\{\varphi_0 - \varphi'_0\} \\
& + 2 r_2 \, r_3 \cos\{\theta_0\} \cos\{\varphi_0\} \left(\cos\{\varphi_0\} - \sin\{\varphi_0\}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ 2r_2'\, r_3' \cos\{\theta_0'\} \cos\{\varphi_0'\} \left(\cos\{\varphi_0'\} - \sin\{\varphi_0'\}\right) \\
&- 2r_2\, r_3' \cos\{\theta_0\} \sin\{\varphi_0 - \varphi_0'\} \\
&+ 2r_2'\, r_3 \cos\{\theta_0'\} \sin\{\varphi_0 - \varphi_0'\} \quad .
\end{aligned}
$$

Solange nur Ortsvektoren benutzt werden, die vom Ursprung ausgehen, verschwinden die Größen r_2, r_3, r_2', r_3' und die Differenz und dessen Betrag vereinfachen sich zu

$$
\begin{aligned}
\vec{r} - \vec{r'} = [r_1 \\
&- r_1' \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi_0'\} \sin\{\theta_0\} \sin\{\theta_0'\} + \cos\{\theta_0\} \cos\{\theta_0'\}\right)] \,\vec{e}_{\mathrm{r}} \\
&- r_1' \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi_0'\} \cos\{\theta_0\} \sin\{\theta_0'\} - \sin\{\theta_0\} \cos\{\theta_0'\}\right) \vec{e}_\theta \\
&+ r_1' \sin\{\varphi_0 - \varphi_0'\} \sin\{\theta_0'\} \vec{e}_\varphi \quad .
\end{aligned}
$$

bzw.

$$
|\vec{r} - \vec{r'}|^2 = r_1^2 + r'^2_1 - 2r_1\, r'_1 \left[\cos\{\theta_0 - \theta_0'\} + \left(\cos\{\varphi_0 - \varphi_0'\} - 1\right) \sin\{\theta_0\} \sin\{\theta_0'\}\right] \quad .
$$

Das Kreuzprodukt der Einheitsvektoren an einem Punkt lautet

$$
\begin{aligned}
\vec{e}_{\mathrm{r}} \times \vec{e}_\theta &= \vec{e}_\varphi \\
\vec{e}_\varphi \times \vec{e}_{\mathrm{r}} &= \vec{e}_\theta \\
\vec{e}_\theta \times e_\varphi &= \vec{e}_{\mathrm{r}} \quad .
\end{aligned}
$$

Weiterhin resultieren Gradient, Divergenz, Rotation und Laplace mit

$$
\vec{\nabla} = \vec{e}_{\mathrm{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e_\varphi} \frac{1}{r \sin\{\theta\}} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e_\theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}
$$

und Tabelle C.2

$$
\vec{\nabla} V = \mathrm{grad} V = \frac{\partial V}{\partial r} \vec{e}_{\mathrm{r}} + \frac{1}{r \sin\{\theta\}} \frac{\partial V}{\partial \varphi} \vec{e_\varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \vec{e_\theta}
$$

	$\dfrac{\partial}{\partial r}$	$\dfrac{\partial}{\partial \varphi}$	$\dfrac{\partial}{\partial \theta}$
$\vec{e}_r$	0	$\sin\{\theta\}\vec{e}_\varphi$	$\vec{e}_\theta$
$\vec{e}_\varphi$	0	$-\sin\{\theta\}\vec{e}_r - \cos\{\theta\}ev\theta$	0
$\vec{e}_\theta$	0	$\cos\{\theta\}\vec{e}_\varphi$	$-\vec{e}_r$

Tabelle C.2: Partielle Ableitungen der Einheitsvektoren in Kugelkoordinaten

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = \mathrm{div}\vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}} \left[\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\{\theta\} B_\mathrm{r}) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(r B_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(r \sin\{\theta\} B_\theta)\right]$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \circ \vec{\nabla} \cdot V = \Delta V = & \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} V\right) + \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\{\theta\}\frac{\partial}{\partial \theta} V\right) \\ & + \frac{1}{r^2 \sin^2\{\theta\}}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} V\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mathrm{rot}\vec{B} = & \frac{1}{r^2 \sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(r \sin\{\theta\} B_\varphi\right) - \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(r B_\theta\right)\right] \vec{e}_\mathrm{r} \\ & + \frac{1}{r \sin\{\theta\}}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi} B_r - \frac{\partial}{\partial r}\left(r \sin\{\theta\} B_\varphi\right)\right] \vec{e_\theta} \\ & + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r B_\theta\right) - \frac{\partial}{\partial \theta} B_\mathrm{r}\right] \vec{e_\varphi}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta \vec{B} = & \left[\Delta B_\mathrm{r} - \frac{2}{r^2} B_\mathrm{r} - \frac{2}{r^2 \sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \theta}(\sin\{\theta\} B_\theta) - \frac{2}{r^2 \sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi\right] \vec{e}_\mathrm{r} \\ & + \left[\Delta B_\varphi + \frac{2}{r^2 \sin\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi} B_\mathrm{r} + \frac{2\cos\{\theta\}}{r^2 \sin^2\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi} B_\theta - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} B_\varphi\right] \vec{e_\varphi} \\ & + \left[\Delta B_\theta + \frac{2}{r^2}\frac{\partial}{\partial \theta} B_\mathrm{r} - \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} B_\theta - \frac{2\cos\{\theta\}}{r^2 \sin^2\{\theta\}}\frac{\partial}{\partial \varphi} B_\varphi\right] \vec{e_\theta} \quad .\end{aligned}$$

Anhang D

Symmetrien

D.1 Symmetrieangaben

Eine Symmetrieangabe besteht aus der Symmetrieoperation und ihrem Bezug.

Symmetrieoperationen

- diskret: Spiegelung, Rotation und Translation um feste Werte
- infinitesimal (kontinuierlich): Rotation und Translation

Symmetriebezug: Punkt, Gerade (Achse), Ebene (Fläche)

- Spiegelung an einem Punkt (=Inversion)
- Rotation um eine Achse
- Translation entlang einer Achse

D.2 Vereinfachungen bei kontinuierlichen Symmetrieoperationen

Vorteilhaft nutzbar für Berechnungen von Feldern sind kontinuierliche Symmetrieoperationen.

kontinuierliche Rotationssymmetrie um die $z-$Achse:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = 0$$

Begründung :

$$\begin{aligned} N\{\phi + \Delta\phi\} &= N\{\phi\} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} N &= \lim_{\Delta\phi \to 0} \frac{N\{\phi + \Delta\phi\} - N\{\phi\}}{\Delta\phi} = 0 \end{aligned}$$

kontinuierliche Translationssymmetrie entlang der $z-$Achse:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = 0$$

Begründung:

$$\begin{aligned} N\{z + \Delta z\} &= N\{z\} \\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} N &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{N\{z + \Delta z\} - N\{z\}}{\Delta z} = 0 \end{aligned}$$

D.3 Spezielle Symmetrien

Geradensymmetrie (unendliche Ausdehnung in einer Richtung)

in kartesischen Koordinaten: (unendlich in $z-$Richtung) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = 0$

Kreissymmetrie

in Zylinderkoordinaten: (kreisförmige Anordnung um die $z-$Achse) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = 0$

Ebenensymmetrie (bzgl. $x - y-$Ebene)

Ebenensymmetrie = 2-dimensionale Geradensymmetrie

in kartesischen Koordinaten: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} = 0 \quad , \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y} = 0$

Zylindersymmetrie (Axialsymmetrie)

Zylindersymmetrie = Geraden- + Kreissymmetrie

in Zylinderkoordinaten: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = 0 \quad , \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} = 0$

Kugelsymmetrie

Kugelsymmetrie = 2-dimensionale Kreissymmetrie

in Kugelkoordinaten: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\phi} = 0 \quad , \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\Theta} = 0$

Anhang E

Abkürzende Schreibweisen für die Ladungsdichte

Mit den Abkürzungen für die Diracfunktion

$\delta\{\vec{r}-\vec{r}_0\}$ $\quad\hat{=}$ Fläche mit Flächennormale $\vec{r}_0$,

z.B. $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{e}_\mathrm{x}$ $\quad\Rightarrow$ Ebene durch $x = x_0$

$\delta^2\{\vec{r}-\vec{r}_0\}$ $\quad\hat{=}$ Linie entlang $\vec{r}_0$,

z.B. $\vec{r}_0 = (r_0, \phi_0, 0)_\mathrm{z}^T$ $\quad\Rightarrow$ Gerade parallel zu $z-$Achse mit

Abstand r_0 und Elevation ϕ_0 (genau: Linie entlang $\vec{r}_0$)

$\delta^3\{\vec{r}-\vec{r}_0\}$ $\quad\hat{=}$ Punkt bei $\vec{r} = \vec{r}_0$

wird die Ladungsdichte ϱ in speziellen Fällen durch folgende Größen ersetzt:

Ladung	**Formel**	**Stärke**	**Einheit**
Volumenladung	ϱ	ϱ	$[\varrho] = \mathrm{Asm}^{-3}$
Flächenladung	$\varrho_\mathrm{S} \cdot \delta\{\vec{r}-\vec{r}_0\}$	ϱ_S	$[\varrho_\mathrm{S}] = \mathrm{Asm}^{-2}$
Linienladung	$\varrho_\mathrm{L} \cdot \delta^2\{\vec{r}-\vec{r}_0\}$	ϱ_L	$[\varrho_\mathrm{L}] = \mathrm{Asm}^{-1}$
Punktladung	$\varrho_\mathrm{D} \cdot \delta^3\{\vec{r}-\vec{r}_0\}$	$\varrho_\mathrm{D} = Q$	$[\varrho_\mathrm{D}] = \mathrm{As}$

Anhang F

Lösungsansätze für Differentialgleichungen

Gegeben ist der Variablenvektor $\vec{r} = (x, y, z)^T$, der die Variablen x, y und z zusammenfasst, und eine Größe V, die von dem Variablenvektor gemäß $V = V\{\vec{r}\} = V\{x, y, z\}$ abhängt.

F.1 Differentialgleichungen mit Ableitungen nach nur einer Variablen

F.1.1 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} V\{x\} = f\{x\}$

Ansatz: direktes Integrieren

$$V\{x\} = \int f\{x'\}\,\mathrm{d}x' + C = \int\limits_{x_0}^{x} f\{x'\}\,\mathrm{d}x' + V\{x_0\} \tag{F.1}$$

wobei $C = V\{x_0\}$ sein kann. Dabei ist x_0 zunächst beliebig, die optimale Wahl ist eine Stelle, bei der eine Randbedingung für den Wert von V vorgegeben ist. Lässt sich keine Lösung finden, kann sie mit den Ansätzen aus dem nächsten Punkt gesucht werden.

F.1.2 $\sum_i k_i \cdot \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x^i} V\{x\} = f\{x\}$

Ansätze:

1. häufig erfolgreich: Exponentialansatz:

$$V\{x\} = V_1 \cdot \exp\{\lambda x\} = V_0 \cdot \exp\{\lambda(x - x_0)\} \tag{F.2}$$

2. sonst Reihenansatz:

$$V\{x\} = \sum_j V_j (x - x_0)^j \tag{F.3}$$

3. oder Reihenansatz spezieller Funktionen (Eigenfunktionen der Geometrie):

$$V\{x\} = \sum_k V_k \cdot f_k\{x\} \tag{F.4}$$

F.1.3 Lösung der Besselschen Differentialgleichung

Ein wichtiger Spezialfall einer Differentialgleichung mit Ableitungen nach nur einer Variablen ist die sog. Besselsche Differentialgleichung, die insbesondere bei der Lösung der Laplacegleichung in Zylinderkoordinaten in Abschnitt 5.1.4 bereits aufgetreten ist. Wir hatten dort durch Variablentransformation die Gleichung (5.101) erhalten:

$$\frac{d^2}{dx^2} R_x\{x\} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} R_x\{x\} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R_x\{x\} = 0 \quad . \tag{F.5}$$

Zur Lösung macht man einen Reihenansatz

$$R_x\,\{x\} = x^\alpha \sum_{j=0}^{\infty} a_j\, x^j \tag{F.6}$$

und erhält

$$\alpha = \pm m \tag{F.7}$$

und die Rekursionsformel

$$a_{2j} = \frac{1}{4j(j+\alpha)} a_{2j-2} \tag{F.8}$$

für die geraden Koeffizienten. Alle ungeraden Koeffizienten sind Null. Durch Iteration findet man unter Benutzung der Gamma-Funktion nach (5.103)

$$\Gamma\left\{p\right\} = \int\limits_0^\infty e^{-t} \cdot t^{p-1}\,\mathrm{d}t \tag{F.9}$$

$$a_{2j} = \frac{(-1)^j\,\Gamma\left\{\alpha+1\right\}}{2^{2j}\,j!\,\Gamma\left\{j+\alpha+1\right\}} a_0 \quad . \tag{F.10}$$

Üblicherweise wählt man $a_0 = \left[2^\alpha \Gamma\left\{\alpha+1\right\}\right]^{-1}$ und erhält mit $\alpha = m$ die bekannte Lösung aus (5.102)

$$R_x\left\{x\right\} = \mathrm{J}_m\left\{x\right\} = \left(\frac{x}{2}\right)^m \sum_{j=0}^\infty \frac{(-1)^j}{j!\,\Gamma\left\{j+m+1\right\}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2j} \quad . \tag{F.11}$$

Aus der Reihenentwicklung entnimmt man, dass sich $\mathrm{J}_m\left\{x\right\}$ für kleine Argumente verhält wie x^m,

$$\mathrm{J}_m\left\{x\right\} \approx \left(\frac{x}{2}\right)^m \frac{1}{m!} \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \quad \text{und} \quad m = 0, 1, 2, \ldots \tag{F.12}$$

Dagegen divergiert

$$\mathrm{N}_m\left\{x\right\} = \lim_{\alpha \to m} \frac{\mathrm{J}_\alpha\left\{x\right\}\cos\left\{\alpha\pi\right\} - \mathrm{J}_{-\alpha}\left\{x\right\}}{\sin\left\{\alpha\pi\right\}} \quad . \tag{F.13}$$

für kleine Argumente,

$$\mathrm{N}_m\left\{x\right\} \approx -\frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{2}{x}\right)^m \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \quad \text{und} \quad m = 1, 2, \ldots \tag{F.14}$$

$$\mathrm{N}_0(x) \approx \frac{2}{\pi}\left[\ln\frac{x}{2} + E\right] \quad \text{für} \quad |x| \ll 1 \quad , \tag{F.15}$$

wobei $E = 0.57721566$ die Eulersche Konstante bezeichnet.

Für große Argumente $x \to \infty$ verhalten sich die Funktion $\mathrm{J}_m\{x\}$ und $\mathrm{N}_m\{x\}$ wie gedämpfte phasenverschobene Cosinus- bzw. Sinusfunktionen

$$\mathrm{J}_m\{x\} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left\{x - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right\} \quad \text{für} \quad x \to \infty \quad , \tag{F.16}$$

$$\mathrm{N}_m\{x\} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left\{x - \frac{\pi}{4} - \frac{m\pi}{2}\right\} \quad \text{für} \quad x \to \infty \quad , \tag{F.17}$$

Der Übergang von der Kleinargument- zur Großargumentnäherung erfolgt bei $x \approx m$.

F.1.3.1 Fourier-Bessel Reihen

Die Besselfunktionen $\mathrm{J}_m\{x\}$ haben, wie man an der asymptotischen Entwicklung für große x erkennt, eine große Ähnlichkeit mit Winkelfunktionen. Insbesondere besitzen sie unendlich viele Nullstellen $\mathcal{J}_{m,n}$, die

$$\mathrm{J}_m\{\mathcal{J}_{m,n}\} = 0 \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

erfüllen.

Die ersten Nullstellen für $n > 0$ sind:

$$\left.\begin{array}{lcl} m = 0 & : & \mathcal{J}_{0,n} = 2.405\,,\ 5.520\,,\ 8.654 \\ m = 1 & : & \mathcal{J}_{1,n} = 3.832\,,\ 7.016\,,\ 10.173 \\ m = 2 & : & \mathcal{J}_{2,n} = 5.136\,,\ 8.417\,,\ 11.620 \end{array}\right\} \tag{F.18}$$

Für höhere Nullstellen gilt nach (F.15) die asymptotische Formel

$$\mathcal{J}_{m,n} \approx n\pi + \frac{m\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \quad . \tag{F.19}$$

In Analogie zur Fourier-Reihenentwicklung einer Funktion, zum Beispiel in (5.26), fragen wir nach einer Reihenentwicklung einer beliebigen Funktion $f\{\rho\}$ auf dem Intervall $0 \le \rho \le a$ in der Form

$$f\{\rho\} = \sum_{n=1}^{\infty} C'_{m,n} \sqrt{\rho}\, \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\} \quad , \tag{F.20}$$

wobei $C'_{m,n}$ konstante Koeffizienten sind. Die Darstellung (F.20) bezeichnet man als **Fourier-Bessel Reihe** . Im Argument der Besselfunktion treten die Nullstellen $\mathcal{J}_{m,n}$ der Besselfunktion $\mathrm{J}_m\left\{x\right\}$ auf. Der Index m erinnert an die Ordnung der Besselfunktion. Die Entwicklung (F.20) ist natürlich nur sinnvoll, wenn die Funktionen $\sqrt{\rho}\,\mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n}\cdot\rho/a\right\}$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$ ein Orthogonalsystem bilden, was zudem vollständig ist. Vollständigkeit bedeutet, dass man jede auf dem Intervall $0 \leq \rho \leq a$ quadratintegrable Funktion in der Form (F.20) darstellen kann.

Zunächst erfüllen die Funktionen $\mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n}\rho/a\right\}$ die Besselsche Differentialgleichung (vergleiche (5.101))

$$\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\}\right)+\left(\frac{\mathcal{J}^2_{m,n}}{a^2}-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\}=0 \quad . \tag{F.21}$$

Zum Nachweis der Orthogonalität multiplizieren wir mit $\rho\,\mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n'}\rho/a\right\}$ mit $n' \neq n$, integrieren von 0 bis a und erhalten

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^a \mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n'}\rho}{a}\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\left(\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\}\right)\,\mathrm{d}\rho\\&+\int\limits_0^a\left(\frac{\mathcal{J}^2_{m,n}}{a^2}-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\rho\,\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n'}\rho}{a}\right\}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\}\,\mathrm{d}\rho=0 \quad .\end{aligned} \tag{F.22}$$

An den Integrationsgrenzen $\rho = 0$ und $\rho = a$ gilt $\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n'}\rho}{a}\right\}\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\} = 0$, so dass das erste Integral in (F.22) durch partielle Integration einfach umgeformt werden kann. Es folgt

$$\begin{aligned}&-\int\rho\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n'}\rho}{a}\right\}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\rho}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n}\rho}{a}\right\}\,\mathrm{d}\rho\\&+\int\limits_0^a\left(\frac{\mathcal{J}^2_{m,n}}{a^2}-\frac{m^2}{\rho^2}\right)\rho\,\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{m,n'}\rho}{a}\right\}\mathrm{J}_m\left\{\frac{\mathcal{J}_{mn}\rho}{a}\right\}\,\mathrm{d}\rho=0 \quad .\end{aligned} \tag{F.23}$$

Schreibt man denselben Ausdruck noch einmal, nachdem man n gegen n' ausgetauscht hat, und bildet die Differenz, dann ergibt sich

$$(\mathcal{J}_{m,n}^2 - \mathcal{J}_{m,n'}^2) \int\limits_0^a \rho \, \mathrm{J}_m \left\{ \frac{\mathcal{J}_{m,n'} \rho}{a} \right\} \mathrm{J}_m \left\{ \frac{\mathcal{J}_{m,n} \rho}{a} \right\} \, \mathrm{d}\rho = 0 \quad . \tag{F.24}$$

Für verschiedene Nullstellen $\mathcal{J}_{m,n}$ und $\mathcal{J}_{m,n'}$ der Besselfunktion $\mathrm{J}_m \{\mathcal{J}\}$ sind also die Funktionen $\sqrt{\rho} \, \mathrm{J}_m \{\mathcal{J}_{m,n'} \rho/a\}$ und $\sqrt{\rho} \, \mathrm{J}_m \{\mathcal{J}_{m,n} \rho/a\}$ auf dem Intervall $0 \leq \rho \leq a$ orthogonal. Für die Normierung erhält man $(n = n')$ mit Aufwand nach gehöriger Rechnung

$$\int\limits_0^a \rho \, \mathrm{J}_m^2 \left\{ \frac{\mathcal{J}_{m,n} \rho}{a} \right\} \, \mathrm{d}\rho = \frac{a^2}{2} \, \mathrm{J}_{m+1}^2 \{\mathcal{J}_{m,n}\} \quad . \tag{F.25}$$

Die Gleichungen (F.24) und (F.25) kann man zu

$$\frac{2}{a^2 \, \mathrm{J}_{m+1}^2 \{\mathcal{J}_{m,n}\}} \int\limits_0^a \rho \, \mathrm{J}_m \left\{ \frac{\mathcal{J}_{m,n'} \rho}{a} \right\} \mathrm{J}_m \left\{ \frac{\mathcal{J}_{m,n} \rho}{a} \right\} \, \mathrm{d}\rho = \delta_{n,n'} \quad . \tag{F.26}$$

zusammenfassen. Damit bilden die Funktionen

$$g_{m,n} \{\rho\} = \frac{\sqrt{2} \sqrt{\rho} \, \mathrm{J}_m \left\{ \mathcal{J}_{m,n} \frac{\rho}{a} \right\}}{\sqrt{a^2} \sqrt{\mathrm{J}_{m+1}^2 \{\mathcal{J}_{m,n}\}}} \quad , \ \mathrm{n} = 1, 2, 3, \ldots \tag{F.27}$$

für jedes feste m ein Orthonormalsystem auf dem Intervall $0 \leq \rho \leq a$.

Zum Nachweis der Vollständigkeit, die erforderlich ist damit sich jede Funktion als Reihe mit diesen orthonormalen Funktionen darstellen lässt, modifizieren wir die Reihenentwicklung (F.20) durch Umnormierung und Benutzung der orthonormalen Funktionen $g_{m,n}$

$$f\{\rho\} = \sum_{n=1}^{\infty} C''_{m,n} g_{m,n} \{\rho\} = \sum_{n=1}^{\infty} C''_{m,n} \frac{\sqrt{2} \sqrt{\rho} \, \mathrm{J}_m \left\{ \mathcal{J}_{m,n} \frac{\rho}{a} \right\}}{\sqrt{a^2} \sqrt{\mathrm{J}_{m+1}^2 \{\mathcal{J}_{m,n}\}}} \quad . \tag{F.28}$$

Zur Berechnung der Koeffizienten $C''_{m,n}$ dient

$$\int\limits_0^a f\{\rho\} \, g_{m,n'} \{\rho\} \, \mathrm{d}\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_0^a C''_{m,n} g_{m,n} \{\rho\} \, g_{m,n'} \{\rho\} \, \mathrm{d}\rho = \delta_{n,n'} C''_{m,n} \quad , \tag{F.29}$$

also

$$C''_{m,n} = \int_0^a f\{\rho\}\, g_{m,n}\{\rho\}\ \mathrm{d}\rho \quad . \tag{F.30}$$

Die δ-Funktion $\delta\{\rho-\rho'\}$ hat die Entwicklungskoeffizienten

$$C''_{m,n}\{\rho'\} = \int_0^a \delta\{\rho-\rho'\}\, g_{m,n}\{\rho\}\ \mathrm{d}\rho = g_{m,n}\{\rho'\} \tag{F.31}$$

und besitzt demnach nach (F.28) die Darstellung

$$\delta\{\rho-\rho'\} = \sum_{n=1}^{\infty} g_{m,n}\{\rho'\}\, g_{m,n}\{\rho\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{\rho\rho'}\ \mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n}\frac{\rho'}{a}\right\}\ \mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n}\frac{\rho}{a}\right\}}{a^2\ \mathrm{J}^2_{m+1}\{\mathcal{J}_{m,n}\}} \tag{F.32}$$

auf dem Intervall $0 \leq \rho \leq a$. Man kann mit dem Orthonormalsystem (F.27) also die δ-Funktion darstellen. Das bedeutet aber, dass wegen

$$f\{\rho\} = \int_0^a \delta\{\rho-\rho'\}\, f\{\rho'\}\ \mathrm{d}\rho' = \sum_{i=1}^{\infty}\left[\int_0^a g_{m,n}\{\rho'\}\, f\{\rho'\}\ \mathrm{d}\rho'\right] g_{m,n}\{\rho\} \tag{F.33}$$

jede beliebige Funktion $f\{\rho\}$ in der Entwicklung nach $g_{m,n}\{\rho\}$ dargestellt werden kann. Folglich ist das System $g_{m,n}\{\rho\}$ vollständig. Man bezeichnet (F.32) als **Vollständigkeitsrelation** .

Das Handhaben des Orthonormalsystems $g_{m,n}$ bereitet üblicherweise einige Schwierigkeiten. Man kann alternativ auch die Entwicklung

$$f\{\rho\} = \sum_{n=1}^{\infty} C_{m,n}\, \mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n}\frac{\rho}{a}\right\} \tag{F.34}$$

verwenden. Die Koeffizienten werden dann mit (5.123) aus

$$C_{m,n} = \frac{2}{a^2\ \mathrm{J}^2_{m+1}\{\mathcal{J}_{m,n}\}} \int_0^a \rho f\{\rho\}\ \mathrm{J}_m\left\{\mathcal{J}_{m,n}\frac{\rho}{a}\right\}\ \mathrm{d}\rho \quad . \tag{F.35}$$

bestimmt.

F.1.4 Lösung der Legendreschen Differentialgleichung

In Abschnitt 5.1.5 waren wir bei der Lösung der Laplacegleichung in Polarkoordinaten auf die Legendresche Differentialgleichung nach (5.157)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Theta_x\{x\}\right)+\left(\ell(\ell+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right)\Theta_x\{x\}=0 \tag{F.36}$$

gestoßen. Betrachten wir zunächst nur den Spezialfall $m^2=0$, d. h. wir untersuchen Probleme mit azimutaler Symmetrie. Die Legendresche Differentialgleichung lautet dann

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left((1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{P}\right)+\ell(\ell+1)\;\mathrm{P}=0 \quad . \tag{F.37}$$

Für ein physikalisch realistisches Potenzial in einem Gebiet mit $\Delta V=0$ sollten die Lösungsfunktionen im Intervall $0\leq\theta\leq\pi$, d. h. $-1\leq x\leq 1$, stetig sein und endlich bleiben. Als Lösungsansatz dient die Reihe

$$\mathrm{P}\{x\}=x^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_j\,x^j \quad . \tag{F.38}$$

Einsetzen in (F.37) liefert

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_jx^{\alpha+j-2}(\alpha+j)(\alpha+j-1)-\,a_j\,x^{\alpha+j}\big((\alpha+j)(\alpha+j+1)-\ell(\ell+1)\big)=0 \quad . \tag{F.39}$$

In dieser Entwicklung muss der Koeffizient jeder Potenz von x für sich verschwinden. Das erfordert

$$a_{j+2}=\frac{(\alpha+j)(\alpha+j+1)-\ell(\ell+1)}{(\alpha+j+1)(\alpha+j+2)}\,a_j \quad , \tag{F.40}$$

welches die ungeraden bzw. geraden Koeffizienten von (F.38) in Beziehung setzt. Nimmt man nur gerade Koeffizienten in (F.38) mit,

$$\mathrm{P}\{x\}=x^\alpha\sum_{j=0}^{\infty}a_{2j}\,x^{2j}\,,(\alpha=0 \text{ oder } \alpha=1) \tag{F.41}$$

so ist dies mit (F.38) bereits eine Lösung von (F.37), wenn man noch die aus (F.39) für $j = 0$ und $a_0 \neq 0$ folgende Bedingung $\alpha(\alpha - 1) = 0$, d. h. $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ verlangt.

Eine entsprechende Lösung gibt es auch für ungerade Koeffizienten $(a_1 \neq 0)$

$$\mathrm{P}\{x\} = x^{\alpha} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2j+1}\, x^{2j+1}\, , (\alpha = 0 \text{ oder } \alpha = -1) \quad . \tag{F.42}$$

Diese Lösung mit $\alpha = -1$ ist äquivalent zur Lösung (F.41) mit $\alpha = 0$, und die mit $\alpha = 0$ ist äquivalent zu derjenigen in (F.41) mit $\alpha = 1$. Es genügt also nur eine der beiden Lösungen zu betrachten.

Wir verwenden die Lösungen aus (F.41) weiter, welche mit $\alpha = 0$ bzw. $\alpha = 1$ zwei linear unabhängige Lösungen von (F.37) sind und somit die Lösungsgesamtheit ergeben. Die Reihen konvergieren für $-1 < x < 1$, aber sie divergieren im allgemeinen für $x = \pm 1$, wenn die Reihen nicht abbrechen. Die Reihe (F.41) mit $\alpha = 0$ bricht für geradzahlige ℓ ab, die mit $\alpha = 1$ für ungeradzahlige ℓ, wobei noch $\ell \geq 0$ gilt. Es gibt also nur für ganzzahlige ℓ Lösungen, die für $x = \pm 1$, d. h. $\theta = 0$ oder $\theta = \pi$, also auf den Polarachsen einer Kugel nicht divergieren. Diese abbrechenden Reihen sind die in (5.158) bereits eingeführten **Legendre Polynome**

$$\tilde{P}_{\ell}\{x\} = \frac{1}{2^{\ell}\,\ell\,!}\,\frac{\mathrm{d}^{\ell}}{\mathrm{d}x^{\ell}}(x^2 - 1)^{\ell} \quad , \tag{F.43}$$

die konventionell so normiert sind, dass $\tilde{P}_{\ell}\{x = 1\} = 1$ gilt. Legendre Polynome niedriger Ordnung sind

$$\left.\begin{aligned}
\tilde{P}_0\{x\} &= 1 \quad ,\\
\tilde{P}_1\{x\} &= x \quad ,\\
\tilde{P}_2\{x\} &= \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1) \quad ,\\
\tilde{P}_3\{x\} &= \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x) \quad ,\\
\tilde{P}_4\{x\} &= \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3) \quad .
\end{aligned}\right\} \tag{F.44}$$

Die Legendre Polynome bilden ein vollständiges Orthogonalsystem von Funktionen auf dem Intervall $-1 \leq x \leq 1$.

Zum Nachweis der Orthogonalität geht man von der Differentialgleichung (F.37) aus und hat

$$\int_{-1}^{1} \tilde{P}_{\ell'} \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \left((1-x^2) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tilde{P}_\ell \right) + \ell(\ell+1) \tilde{P}_\ell \right] \, \mathrm{d}x = 0 \quad . \tag{F.45}$$

Partielle Integration des ersten Terms liefert wegen $\tilde{P}_{\ell'}(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tilde{P}_\ell = 0$ für $x = \pm 1$

$$\int_{-1}^{1} \left[(x^2-1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \tilde{P}_{\ell'} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \mathrm{P} + \ell(\ell+1) \tilde{P}_{\ell'} \tilde{P}_\ell \right] \, \mathrm{d}x = 0 \quad . \tag{F.46}$$

Schreibt man dieselbe Beziehung hin, nachdem man ℓ und ℓ' ausgetauscht hat, und bildet die Differenz der Ausdrücke, dann folgt

$$\big(\ell(\ell+1) - \ell'(\ell'+1) \big) \int_{-1}^{1} \tilde{P}_{\ell'} \tilde{P}_\ell \, \mathrm{d}x = 0 \quad . \tag{F.47}$$

Für $\ell \neq \ell'$ folgt die Orthogonalität. Für $\ell = \ell'$ liefert die direkte Auswertung mit ℓ-facher partieller Integration

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \mathrm{P}_\ell^2 \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{2^{2\ell}(\ell\,!)^2} \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell \frac{\mathrm{d}^\ell}{\mathrm{d}x^\ell}(x^2-1)^\ell \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^\ell}{2^{2\ell}(\ell\,!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell \frac{\mathrm{d}^{2\ell}}{\mathrm{d}x^{2\ell}}(x^2-1)^\ell \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell\,!)^2} \int_{-1}^{1} (x^2-1)^\ell \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{(-1)^\ell(2\ell)!}{2^{2\ell}(\ell\,!)^2} \frac{(-1)^\ell 2^{2\ell+1}(\ell!)^2}{(2\ell+1)!} = \frac{2}{2\ell+1} \quad .
\end{aligned} \tag{F.48}$$

Also ist

$$\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}\tilde{P}_{\ell}\left\{x\right\}\tilde{P}_{\ell'}\left\{x\right\}\ \mathrm{d}x=\delta_{\ell,\ell'} \tag{F.49}$$

die Orthogonalitätsrelation der Legendre Polynome.

Die Legendre Polynome sind sicher vollständig, denn in jedem endlichen Intervall lässt sich jede stetige Funktion sogar gleichmäßig durch Polynome approximieren. Auf dem Intervall $-1\leq x\leq 1$ lässt sich jede quadratintegrable Funktion $f\left\{x\right\}$ als eine Legendre Polynom Reihe darstellen

$$f\left\{x\right\}=\sum_{\ell=0}^{\infty}c_{\ell}\tilde{P}_{\ell}\left\{x\right\} \tag{F.50}$$

mit Koeffizienten

$$c_{\ell}=\frac{2\ell+1}{2}\int_{-1}^{1}f\left\{x\right\}\tilde{P}_{\ell}\left\{x\right\}\ \mathrm{d}x\quad . \tag{F.51}$$

Aus dem bislang gesagten geht hervor, dass die allgemeine Lösung der Laplacegleichung (F.37) mit azimutaler Symmetrie $(m=0)$ durch

$$V\left\{\vec{r}\right\}=V\left\{r,\theta\right\}=\sum_{\ell=0}^{\infty}\left(B_{1,\ell}\left(\frac{r}{r_0}\right)^{\ell}+B_{2,\ell}\left(\frac{r_0}{r}\right)^{\ell+1}\right)\tilde{P}_{\ell}(\cos\left\{\theta\right\}) \tag{F.52}$$

gegeben ist.

Die Lösung der allgemeinen Legendreschen Differentialgleichung (F.36) mit $m\neq 0$, aber m ganzzahlig, kann man mit ähnlichen Methoden finden, wie oben für $m=0$ beschrieben. Man findet jedoch nur Polynomlösungen von (F.36), die für ganzzahlige $\ell\geq 0$ bei $x=\pm 1$ nicht divergieren, wenn

$$\begin{aligned} & m\in\left\{-\ell;-(\ell-1);\ldots;0;\ldots;(\ell-1);\ell\right\} \\ \text{also}\quad & |m|\leq\ell \end{aligned} \tag{F.53}$$

gilt. Für ein vorgegebenes ℓ gibt es also nur $(2\ell+1)$ mögliche Werte von m. Hierbei erinnern wir uns, dass nach (5.155) ℓ gerade die radiale Form des Potenzials charakterisiert.

Die Lösungsfunktionen von (F.36) heißen **zugeordnete Legendre Polynome** und lauten für positive m

$$P_{\ell,m}\{x\} = (-1)^m (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}x^m} \tilde{P}_\ell\{x\} \quad . \tag{F.54}$$

Die zugeordneten Legendre Polynome heißen auch **Legendre Funktionen** und werden häufig in der Form P_ℓ^m geschrieben. Wegen der Verwechslungsgefahr mit der Potenzierung wurde hier die Schreibweise $\mathrm{P}_{\ell,m}$ mit zwei Indizes unten gewählt.

Da in der Differentialgleichung (F.36) nur m^2 vorkommt, sind $\mathrm{P}_{\ell,m}\{x\}$ und $\mathrm{P}_{\ell,-m}\{x\}$ proportional

$$\mathrm{P}_{\ell,-m}\{x\} = (-1)^m \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \mathrm{P}_{\ell,m}\{x\} \quad . \tag{F.55}$$

Für positive und negative m gilt die Formel

$$\mathrm{P}_{\ell,m}\{x\} = \frac{(-1)^m}{2^\ell \ell\,!} (1-x^2)^{m/2} \frac{\mathrm{d}^{\ell+m}}{\mathrm{d}x^{\ell+m}} (x^2-1)^\ell \quad . \tag{F.56}$$

Für festes m bilden die Funktionen $\mathrm{P}_{\ell,m}\{x\}$, $\ell = 0, 1, 2, \ldots$ auf dem Intervall $-1 \le x \le 1$ ein vollständiges Orthogonalsystem mit der Normierung

$$\boxed{\frac{\ell+1}{2} \frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!} \int_{-1}^{1} \mathrm{P}_{\ell,m}\{x\}\, \mathrm{P}_{\ell',m}\{x\}\, \mathrm{d}x = \delta_{\ell,\ell'} \quad .} \tag{F.57}$$

Zugeordnete Legendre Funktionen niederer Ordnung sind

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{0,0} &= 1 \\
\mathrm{P}_{1,-1} &= \tfrac{1}{2}\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\mathrm{P}_{1,0} &= x \\
\mathrm{P}_{1,1} &= -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
\mathrm{P}_{2,-2} &= \tfrac{1}{8}\left(1-x^2\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{2,-1} &= \tfrac{1}{2}x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{P}_{2,0} &= \tfrac{1}{2}\,(3x^2-1) \\ \mathrm{P}_{2,1} &= -3x\,(1-x^2)^{\frac{1}{2}} \\ \mathrm{P}_{2,2} &= 3\,(1-x^2) \end{aligned} \tag{F.58}$$

F.2 Differentialgleichungen mit Ableitungen nach mehreren Variablen

$$\vec{\nabla}\vec{E} = f\{\vec{r}\} \quad , \Delta V = g\{\vec{r}\}$$

F.2.1 Separation mit Summenansatz für $\vec{\nabla}\vec{E} = f\{\vec{r}\}$

rechte Seite in Summe aufspalten

$$f\{\vec{r}\} = k_1 \cdot f_1\{\vec{r}\} + k_2 \cdot f_2\{\vec{r}\} + k_3 \cdot f_3\{\vec{r}\}$$

Eine Bedingung für die k_i ergibt sich durch Einsetzen in die Differentialgleichung, zwei weitere aus den Randbedingungen.
Zuordnen der Summanden zu denen der linken Seite:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r_i}\vec{E} \cdot \vec{e}_{\mathrm{r}_i} = k_i \cdot f_i\{\vec{r}\}$$

weiter mit direktem Integrieren nach F.1.1,

z.B. für $r_i = x \quad , \quad \vec{e}_{\mathrm{r}_i} = \vec{e}_{\mathrm{x}}$

$$\vec{E} \cdot \vec{e}_{\mathrm{x}} = \int f_1\{\vec{r}\}dx + C_1\{y,z\}$$

oder mit den Ansätzen nach F.1.2 .

F.2.2 Separation mit Produktansatz für $\Delta V = g$

Funktion der *linken* Seite als Produkt schreiben:

$$\begin{aligned} V &= V_1\{x\} \cdot V_2\{y\} \cdot V_3\{z\} \\ \Rightarrow \Delta V &= V_2 \cdot V_3 \cdot \Delta_\mathrm{x} V_1 + V_1 \cdot V_3 \cdot \Delta_\mathrm{y} V_2 + V_1 \cdot V_2 \cdot \Delta_\mathrm{z} V_3 = g \end{aligned}$$

weiter mit Summenansatz nach F.2.1: Funktion der *rechten* Seite als Summe schreiben und Summanden der linken und rechten Seite einander zuordnen

$$\begin{aligned} & g = k_1 \cdot g_1 + k_2 \cdot g_2 + k_3 \cdot g_3 \\ & V_2 \cdot V_3 \cdot \Delta_\mathrm{x} V_1 = k_1 \cdot g_1, \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_\mathrm{x} V_1 &= \frac{1}{V_2 V_3} \cdot k_1 \cdot g \\ \Delta_\mathrm{y} V_2 &= \frac{1}{V_1 V_3} \cdot k_2 \cdot g \\ \Delta_\mathrm{z} V_3 &= \frac{1}{V_1 V_2} \cdot k_3 \cdot g \end{aligned}$$

weiter wie unter Punkt F.1 beschrieben.

Anhang G

Polarisation von Materie

Der Einfluß von Materie auf das elektrische Feld wird bei linearen Medien durch die Dielektrizitätszahl ε in $\vec{D}$ erfasst. Allgemein gilt aber zunächst

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \cdot \vec{E} + \vec{P} \tag{G.1}$$

wobei angenommen werden kann, dass $\vec{P}$ von $\vec{E}$ abhängt. Diese Abhängigkeit lässt sich durch eine Taylorreihe darstellen. Mit $\vec{P} = P_\mathrm{x} \cdot \vec{e}_\mathrm{x} + P_\mathrm{y} \cdot \vec{e}_\mathrm{y} + P_\mathrm{z} \cdot \vec{e}_\mathrm{z}$ und $E = E_\mathrm{x} \cdot \vec{e}_\mathrm{x} + E_\mathrm{y} \cdot \vec{e}_\mathrm{y} + E_\mathrm{z} \cdot \vec{e}_\mathrm{z}$ resultiert zum Beispiel

$$\begin{aligned}
P_\mathrm{x} \;=\; & P_\mathrm{x}\big|_{\vec{E}=0} \\
& + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_\mathrm{x}} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{x} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_\mathrm{y}} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{y} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}E_\mathrm{z}} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{z} \\
& + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E_\mathrm{x}^2} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{x}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E_\mathrm{y}^2} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{y}^2 + \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E_\mathrm{z}^2} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{z}^2 \\
& + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E_\mathrm{x}\,\mathrm{d}E_\mathrm{y}} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{x}E_\mathrm{y} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E_\mathrm{x}\,\mathrm{d}E_\mathrm{z}} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{x}E_\mathrm{z} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}E_\mathrm{y}\,\mathrm{d}E_\mathrm{z}} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{y}E_\mathrm{z} \\
& + \frac{1}{6}\,\frac{\mathrm{d}^3}{\mathrm{d}E_\mathrm{x}^3} P_\mathrm{x}\bigg|_{\vec{E}=0} E_\mathrm{x}^3 + \ldots
\end{aligned} \tag{G.2}$$

Genauso lassen sich P_y und P_z darstellen. Üblicherweise können Ableitungen der Ordnung zwei und höher vernachlässigt werden. Wenn auch die permanente Polarisation $\vec{P}_0 = \vec{P}\big|_{\vec{E}=0}$ wegfällt, spricht man von einem linearen Medium. Dann ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \cdot [\chi_e] \cdot \vec{E} \tag{G.3}$$

mit

$$\varepsilon_0[\chi_e] = \left.\begin{pmatrix} \frac{d}{dE_x} P_x & \frac{d}{dE_y} P_x & \frac{d}{dE_z} P_x \\ \frac{d}{dE_x} P_y & \frac{d}{dE_y} P_y & \frac{d}{dE_z} P_y \\ \frac{d}{dE_x} P_z & \frac{d}{dE_y} P_z & \frac{d}{dE_z} P_z \end{pmatrix}\right|_{\vec{E}=0} . \tag{G.4}$$

In isotropen linearen Medien existieren nur die Elemente auf der Hauptdiagonalen von $[\chi_e]$, es gilt also

$$E_0[\chi_e] = \left.\begin{pmatrix} \frac{d}{dE_x} P_x & 0 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dE_y} P_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{d}{dE_z} P_z \end{pmatrix}\right|_{\vec{E}=0} . \tag{G.5}$$

Sind die Medien zusätzlich noch homogen, werden alle Elemente auf der Hauptdiagonalen gleich groß $\varepsilon_0\chi_e = \frac{d}{dE_x} P_x |_{\vec{E}=0} = \frac{d}{dE_y} P_y |_{\vec{E}=0} = \frac{d}{dE_z} P_z |_{\vec{E}=0}$
und es gilt

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi_e) \cdot \vec{E} = \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} \; . \tag{G.6}$$

Manchmal existiert in einem ansonsten homogenen, linearen, isotropen Medium noch eine permanente Polarisation $\vec{P}_0$. Dann ergibt sich eine Überlagerung aus der feldabhängigen und der permanenten Polarisation

$$\vec{P} = \vec{P}_0 \; + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} \tag{G.7}$$

und es ergibt sich

$$\vec{D} = \vec{P}_0 + \varepsilon_0\varepsilon \cdot \vec{E} \; . \tag{G.8}$$

Anhang H

Diskussion der Potenziale

H.1 Potenziale in inhomogenen Medien

Im polarisierbarer und magnetisierbarer Materie mit linearer Leitfähigkeit σ gelten die Maxwellgleichungen

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \sigma \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{D} \quad , \tag{H.1}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad , \tag{H.2}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{D} = \varrho \quad , \tag{H.3}$$

$$\vec{\nabla} \circ \vec{B} = 0 \quad . \tag{H.4}$$

Aus (H.4) folgt wie bisher

$$\vec{B}\{\vec{r}, t\} = \vec{\nabla} \times \vec{A}\{\vec{r}, t\} \quad . \tag{H.5}$$

Nach einsetzen in (H.2) resultiert

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \Phi_{\text{el}} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \tag{H.6}$$

In polarisierbaren Medien müssen die Polarisationen $\vec{P}$ und $\vec{M}$ berücksichtigt werden. Beide können je in einen eingeprägten Anteil $\vec{P}_0$, $\vec{M}_0$, den linearen Anteil $\vec{P}_{\text{lin}} = \varepsilon_0(\varepsilon-1)\vec{E}$, $\vec{M}_{\text{lin}} = (\mu-1)\vec{H}$ und einen nichtlinearen Anteil $\vec{P}_{\text{nl}}\{\vec{E}\}$, $\vec{M}_{\text{nl}}\{\vec{H}\}$ mit nichtlinearer Abhängigkeit vom Feld zerlegt werden. Es resultiert also für

$$\vec{D} = \vec{P}_0 + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}_{\text{nl}}\{\vec{E}\} \tag{H.7}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{M}_0 + \mu\mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M}_{\text{nl}}\{\vec{H}\} \quad . \tag{H.8}$$

Umformen von (H.1) ergibt mit (H.8) unter Berücksichtigung, dass μ ortsabhängig sein kann

$$\vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\mu}\vec{M}_0 - \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B} - \frac{1}{\mu}\vec{M}_{\text{nl}}\{\vec{H}\} \right) = \vec{j} + \sigma\vec{E} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \quad . \tag{H.9}$$

Entsprechend ergibt sich nach umformen von (H.3) mit (H.7) unter Berücksichtigung, dass ε ortsabhängig sein kann

$$\vec{\nabla} \circ (\vec{P}_0 + \varepsilon_0 \cdot \varepsilon \cdot \vec{E} + \vec{P}_{\text{nl}}\{\vec{E}\}) = \rho \quad . \tag{H.10}$$

Diese Gleichungen lassen sich nicht voneinander entkoppeln. Es gibt in der Literatur verschiedenen Näherungen, mit denen Teilaspekte in nichtlinearen Medien beschrieben werden. Hier sollen im weiteren keine nichtlinearen Medien mehr betrachtet werden. Dann lassen sich aber auch sofort wegen der Linearität der Gleichungen zwei Lösungen voneinander separieren: Eine Lösung, die auf den eingeprägten Polarisationen $\vec{P}_0$ und $\vec{M}_0$ basiert, und eine andere Lösung, die Lösung der verbleibenden Maxwellgleichungen ist. In inhomogenen linearen ($\vec{P}_{\text{nl}}\{\vec{E}\} = 0, \vec{M}_{\text{nl}}\{\vec{H}\} = 0$) Medien ohne eingeprägte Polarisation ($\vec{P}_0 = 0, \vec{M}_0 = 0$) lauten somit die Maxwellgleichungen (H.1) und (H.3)

$$
\begin{aligned}
\vec{\nabla} \times (\frac{1}{\mu\mu_0}\vec{B}) &= \\
\vec{\nabla}\left(\frac{1}{\mu\mu_0}\right) \times \vec{B} + \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{\nabla} \times \vec{B} &= \\
\frac{1}{\mu\mu_0}\left(-\frac{\vec{\nabla}\mu}{\mu} \times \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{B}\right) &= \\
\frac{1}{\mu\mu_0}\left(-(\vec{\nabla}\ln\{\mu\}) \times \vec{B} + \vec{\nabla} \times \vec{B}\right) &= \vec{j} + \sigma\vec{E} + \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E} \\
\vec{\nabla} \circ (\varepsilon_0\varepsilon\vec{E}) &= \\
\vec{\nabla}(\varepsilon_0\varepsilon) \circ \vec{E} + \varepsilon_0\varepsilon\vec{\nabla} \circ \vec{E} &= \\
\varepsilon_0\varepsilon(\frac{\vec{\nabla}\varepsilon}{\varepsilon} \circ \vec{E} + \vec{\nabla} \circ \vec{E}) &= \\
\varepsilon_0\varepsilon\left((\vec{\nabla}\ln\{\varepsilon\}) \circ \vec{E} + \vec{\nabla} \circ \vec{E}\right) &= \rho \quad .
\end{aligned}
$$

Dabei wurde zur Vereinfachung $\frac{\vec{\nabla}a}{a} = \vec{\nabla}\ln\{a\}$ benutzt. Umstellen ergibt

$$
\boxed{
\begin{aligned}
-\vec{\nabla} \times \vec{B} + \mu\mu_0\left(\sigma\vec{E} + \varepsilon_0\varepsilon\frac{\partial}{\partial t}\vec{E}\right) + (\vec{\nabla}\ln\{\mu\}) \times \vec{B} &= -\mu\mu_0\vec{j} \quad , & \text{(H.11)} \\
\vec{\nabla} \circ \vec{E} + (\vec{\nabla}\ln\{\varepsilon\}) \circ \vec{E} &= \frac{1}{\varepsilon_0\varepsilon}\rho \quad . & \text{(H.12)}
\end{aligned}
}
$$

Einsetzen von (H.5) und (H.6) in (H.11) ergibt mit (H.7) und der Kettenregel $a\vec{\nabla} \circ \vec{b} = \vec{\nabla} \circ (a\vec{b}) - (\vec{\nabla}a) \circ \vec{b}$

$$
\begin{aligned}
-\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{A} + (\vec{\nabla}\ln\{\mu\}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\Phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) + \\
&\quad \mu\mu_0\sigma(\vec{\nabla}\Phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) - \mu\mu_0\vec{j} \\
\Delta\vec{A} - \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \circ \vec{A}) + (\vec{\nabla}\ln\{\mu\}) \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) &= \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\vec{A} + \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} + \\
&\quad \vec{\nabla}(\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\text{el}}) - \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\text{el}}\vec{\nabla}(\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0) + \\
&\quad \vec{\nabla}(\mu\mu_0\sigma\Phi_{\text{el}}) - \Phi_{\text{el}}\vec{\nabla}(\mu\mu_0\sigma) - \mu\mu_0\vec{j}
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\Delta\vec{A} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\vec{A} - \\ \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\circ\vec{A} + \mu\mu_0\sigma\Phi_{\text{el}} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\text{el}}\right) + \\ (\vec{\nabla}\ln\{\mu\})\times(\vec{\nabla}\times\vec{A}) + \\ \Phi_{\text{el}}\vec{\nabla}(\mu\mu_0\sigma) + \frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\text{el}}\vec{\nabla}(\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0) = -\mu\mu_0\vec{j}\end{aligned} \tag{H.13}$$

Durch die modifizierte Lorenz Transformation wird die zweite Zeile zu Null. Es bleiben aber noch die anderen Kopplungen zwischen $\vec{A}$ und Φ_{el}. In unmagnetischen Medien bzw. in magnetisch homogenen Medien verschwindet noch die dritte Zeile, die vierte Zeile lässt sich damit aber nicht unterdrücken. Im allgemeinen ist es also in inhomogenen Medien nicht möglich ist, eine Entkopplung zwischen $\vec{A}$ und Φ_{el} zu erreichen. Der Vollständigkeit halber soll hier auch noch die zweite Potenzialgleichung angegeben werden, die aus (H.12) mit (H.6) folgt:

$$\vec{\nabla}\circ(\vec{\nabla}\Phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) + (\vec{\nabla}\ln\{\varepsilon\})\circ(\vec{\nabla}\Phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho$$

und nach umformen

$$\Delta\Phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla}\circ\vec{A}) + (\vec{\nabla}\ln\{\varepsilon\})\circ(\vec{\nabla}\Phi_{\text{el}} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{A}) = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho \tag{H.14}$$

H.2 Potenziale in homogenen Medien

Es lässt sich eine Vereinfachung erzielen, wenn die Medien homogen ($\vec{\nabla}\mu = 0, \vec{\nabla}\sigma = 0, \vec{\nabla}\varepsilon = 0$) sind.

In der **modifizierten Lorenz Eichung**

$$\vec{\nabla}\circ\vec{A} + \mu\mu_0\sigma\Phi_{\text{el}} + \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\text{el}} = 0 \tag{H.15}$$

resultieren die **gedämpften inhomogenen Wellengleichungen für homogene Medien**

$$\Delta\vec{A} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\vec{A} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial^2 t}\vec{A} = -\mu\mu_0\vec{j} \tag{H.16}$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{el}} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Phi_{\mathrm{el}} - \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{\mathrm{el}} = -\frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\varrho \quad . \tag{H.17}$$

H.3 Ebene Wellen als Lösungen der homogenen Wellengleichungen

Die Wellengleichungen (H.16) und (H.17) haben mathematisch dieselbe Form. Jede der Vektorkomponenten von $\vec{A}$ und das skalare Potenzial Φ_{el} kann allgemein durch die Größe Ψ ersetzt werden. Ohne Anregung ($\vec{j} = 0, \varrho = 0$) ergibt sich die homogenen Wellengleichung

$$\Delta\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} - \mu\mu_0\sigma\frac{\partial}{\partial t}\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi\left\{\vec{r}, t\right\} = 0 \quad . \tag{H.18}$$

Spezielle Lösungen der ungedämpften Wellengleichung sind harmonische ebene Wellen der Form

$$f_\pm = a_{\pm k}\cos\left\{\pm(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \tag{H.19}$$

oder

$$f_\pm = b_{\pm k}\sin\left\{\pm(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \quad , \tag{H.20}$$

wobei die Amplituden $a_{\pm k}, b_{\pm k}$ jeweils noch von k abhängen können. Man kann zwei Lösungen der Form (H.19) und (H.20) mit denselben $\vec{k}$- und ω-Werten auch zusammenfassen und schreiben.

$$f_{\pm}\left\{\vec{r},t\right\} = \mathrm{Re}\left\{C_{\pm k}\ \exp\left\{\pm i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\}\right\}$$
$$= a_{\pm k}\cos\left\{\pm i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} + b_{\pm k}\sin\left\{\pm i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \tag{H.21}$$

wobei $C_{\pm k} = a_{\pm k} - ib_{\pm k}$ die komplexe Amplitude der Welle bezeichnet. Man spricht hier auch von der **Spektralkomponente**, da ihr Wert die komplexe Amplitude der Welle bei der Frequenz ω bzw. dem **Ausbreitungskoeffizienten** k darstellt. Oft lässt man der Einfachheit halber die Realteilbildung weg und bezeichnet

$$f_{\pm}\left\{\vec{r},t\right\} = C_{\pm k}\ \exp\left\{\pm i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\} \tag{H.22}$$

als harmonische ebene Welle. Man meint aber hiermit immer den physikalisch relevanten Realteil als Lösung der Wellengleichung.

Mit (H.22) ist auch die Summe für alle möglichen $\vec{k}$, d. h. das Fourierintegral

$$f_{\pm}\left\{\vec{r},t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} C_{\pm}\left\{\vec{k},\omega\right\}\ \exp\left\{\pm i(\omega t \pm \vec{k}\circ\vec{r})\right\}\ \mathrm{d}^3k \tag{H.23}$$

eine Lösung für die homogene Wellengleichung (H.18). Diese Darstellung mit $\omega = kc$ ist besonders gut zur Berechnung der Spektralkomponenten aus einer vorhandenen Feldverteilung geeignet. Dabei kommt die aus Abschnitt 5.1 bekannte Orthogonalentwicklung in Form einer räumlichen Fouriertransformation zum Einsatz.

In (H.23) werden zunächst noch vier verschiedene Lösungen der Wellengleichung (H.18) betrachtet. Für eine feste Kreisfrequenz ω sind jeweils zwei der vier Lösungen mathematisch gleich, wie man leicht durch Variablensubstitution überprüfen kann. Das Potenzial wird z.B. durch die Fourierdarstellung

$$f_{-}\left\{\vec{r},t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} C_{-}\left\{\vec{k},\omega\right\}\ \exp\left\{i(\omega t - \vec{k}\circ\vec{r})\right\}\ \mathrm{d}^3k \tag{H.24}$$

oder

$$f_+\left\{\vec{r},t\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} C_+\left\{\vec{k},\omega\right\}\exp\left\{i(\omega t + \vec{k}\circ\vec{r})\right\}\ \mathrm{d}^3k \tag{H.25}$$

beschrieben. Substituiert man hier ω durch $\omega' = -\omega$ und formt das Integral um, resultiert aus (H.24)

$$f_-\left\{t,\vec{r}\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} C_-\left\{\vec{k},\omega\right\}\exp\left\{-i(\omega' t + \vec{k}\circ\vec{r})\right\}\ \mathrm{d}^3k' = f'_+ \tag{H.26}$$

und aus (H.25)

$$f_+\left\{t,\vec{r}\right\} = \iiint\limits_{-\infty}^{\infty} C_+\left\{\vec{k},\omega\right\}\exp\left\{-i(\omega' t - \vec{k}\circ\vec{r})\right\}\ \mathrm{d}^3k' = f'_- \quad . \tag{H.27}$$

Aus dem retardierten Potenzial ist also das avancierte Potenzial und umgekehrt geworden, allerdings jeweils mit einer Änderung des Vorzeichens vor dem i. Es genügt im Prinzip also, **für eine gegebene Kreisfrequenz** nur die Lösungen (H.24) und (H.25) zu addieren. Dies führt zu der allgemeinen Darstellung (7.120). Anstelle von (H.25) kann aber auch (H.26) zu (H.24) addiert werden. Dann ergeben sich die für Reflexion und Brechung nützlichen Darstellungen der vorwärts und rückwärts laufenden Wellen für jeden Wert von $\vec{k}$.

H.4 Skalares magnetische Potenzial und elektrisches Vektorpotenzial in verlustlosen quellfreien Medien

In völliger Analogie zum skalaren elektrischen Potenzial Φ_{el} wird **in verlustlosen Medien** ein **skalares magnetisches Potenzial** Φ_{magn} eingeführt, wenn keine freie Stromdichte $\vec{j}$ vorhanden ist. Dies wurde für die Magnetostatik bereits in Kapitel 4 mit dem Potenzial Φ_M gezeigt. Bei verschwindender Raumladung ϱ kann wegen $\vec{\nabla}\circ\vec{D} = 0$ ein **elektrisches Vektorpotenzial** $\vec{F}$ analog zu $\vec{A}$ eingeführt werden, wobei dann

$$\vec{D} = -\vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{H.28}$$

gelten muss. Allerdings gilt hier ähnlich wie beim Übergang von V nach Φ_{el}, dass für das skalare magnetische Potenzial

$$\vec{H} + \frac{\partial}{\partial t}\vec{F} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{magn}} \tag{H.29}$$

zu verwenden ist. Es wird also der Übergang von Φ_M zu Φ_{magn} gemacht. Dieser Übergang ist an die Bedingung geknüpft, dass es sich um verlustlose Medien handelt. Anderenfalls ist es nicht möglich, ein skalares magnetisches Potenzial in dieser Form einzuführen. Die formale Einführung dieser Potenziale erleichtert die Berechnung von elektrodynamischen Randwertproblemen in verlustlosen quellenfreien Raumgebieten erheblich. Werden alle vier Potenziale zugelassen, resultiert in linearen homogenen verlustlosen Medien

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{el}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{A} - \frac{1}{\varepsilon\varepsilon_0}\vec{\nabla} \times \vec{F} \tag{H.30}$$

$$\vec{H} = -\vec{\nabla}\Phi_{\mathrm{magn}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{F} + \frac{1}{\mu\mu_0}\vec{\nabla} \times \vec{A} \tag{H.31}$$

Im statischen Fall $\frac{\partial}{\partial t}A = 0$ bzw. $\frac{\partial}{\partial t}\Phi = 0$ erhält man aus (7.86) bzw. (7.87) die Poissongleichungen für das Vektorpotenzial bzw. das skalare Potenzial.

Wenn $\vec{F}$ und Φ_{magn} Lorenz geeicht sind, gelten für sie in homogenen Medien die homogenen Wellengleichungen

$$\Delta\vec{F} - \left(\frac{n}{c_0}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{F} = 0 \tag{H.32}$$

$$\Delta\Phi_{\mathrm{magn}} - \left(\frac{n}{c_0}\right)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi_{\mathrm{magn}} = 0 \quad . \tag{H.33}$$

Anhang I

Spezielle Funktionen: Distributionen

I.1 Die Dirac-Funktion

I.1.1 Definition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta\{x - x_0\} f\{x\} \,\mathrm{d}x = f\{x_0\}$$

I.1.2 Heuristische Eigenschaften

$$\delta\{x\} \begin{cases} = 0 & \text{für } x \neq 0 \\ \to \infty & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

I.1.3 Symmetrie

$$\delta\{x - x_0\} = \delta\{x_0 - x\}$$

I.1.4 Ableitung

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} \delta\{y\}|_{y=x-x_0} \cdot f\{x\} \,\mathrm{d}x = -\frac{\partial}{\partial y} f\{y\}|_{y=x_0}$$

I.1.5 Dehnung

$f\{x\}$ hat endlich viele einfache (isolierte) Nullstellen bei $x_1, ...x_N$ und $f'\{x_i\} \neq 0$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{x_i-\epsilon}^{x_i+\epsilon} g\{x\}\cdot\delta\left\{f\{x\}\right\}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{|f'\{x\}|}\cdot g\{x\}\cdot\delta\{x-x_i\}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{|f'\{x_i\}|}g\{x_i\}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g\{x\}\cdot\delta\left\{f\{x\}\right\}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{|f'\{x\}|}\cdot g\{x\}\cdot\delta\{x-x_i\}\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{N}\frac{1}{|f'\{x_i\}|}g\{x_i\}$$

I.1.6 Quadrat

$\delta\{x-x_1\}\cdot\delta\{x-x_2\}$ ist für $x_1 = x_2$ nicht definiert!

I.1.7 Abkürzende Schreibweise

$$\delta^3\{\vec{r}\} = \begin{cases} \delta\{x\}\delta\{y\}\delta\{z\} & \text{kartesische Koordinaten} \\ \frac{1}{\rho}\delta\{\rho\}\delta\{\Phi\}\delta\{z\} & \text{Zylinderkoordinaten} \\ \frac{1}{r^2\sin\theta}\delta\{r\}\delta\{\varphi\}\delta\{\theta\} & \text{Kugelkoordinaten} \end{cases}$$

I.1.8 Fouriertransformation

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\delta\{x\}\exp\{i2\pi\nu\,x\}\,\mathrm{d}x \ = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\{-i2\pi\nu\,x\}\,\mathrm{d}\nu = \delta\{x\}$$

I.1.9 Einheit

$$\left[\delta\{x\}\right] = \frac{1}{[x]}$$

I.1.10 Übergang auf andere Koordinatensysteme

Der Vektor $\vec{r} = x\vec{e}_\mathrm{x} + y\vec{e}_\mathrm{y} + z\vec{e}_\mathrm{z}$ sei im neuen Koordinatensystem durch $\vec{r} = u\vec{e}_\mathrm{u} + v\vec{e}_\mathrm{v} + w\vec{e}_\mathrm{w}$ gegeben.

I.1.10.1 Eindimensional

Ist Die ursprüngliche Dirac-Funktion nur eindimensional, folgt nach der oben angegebenen Regel der Dehnung o.B.d.A. mit $\vec{r}_0 = \vec{r}\{u_0, v, w\}$

$$\delta\{\vec{r} - \vec{r}_0\} = \frac{1}{\left|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\right|_{u_0}} \delta\{u - u_0\}$$

und die Integrationselemente $\mathrm{d}\vec{r}$ werden durch $\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\big|_{u_0}\ \mathrm{d}u$ substituiert.

I.1.10.2 Zwei- und Dreidimensional

Genau wie im Eindimensionalen Fall muss wieder die Dehnung herangezogen werden, und es folgt mit $\vec{r}_0 = \vec{r}\{u_0, v_0, w\}$

$$\delta^2\{\vec{r} - \vec{r}_0\} = \frac{1}{\left|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\right|_{u_0} \left|\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\right|_{v_0}} \delta\{u - u_0\}\delta\{v - v_0\}$$

bzw. mit $\vec{r}_0 = \vec{r}\{u_0, v_0, w_0\}$

$$\delta^3\{\vec{r} - \vec{r}_0\} = \frac{1}{\left|\frac{\partial}{\partial u}\vec{r}\right|_{u_0} \left|\frac{\partial}{\partial v}\vec{r}\right|_{v_0} \left|\frac{\partial}{\partial w}\vec{r}\right|_{w_0}} \delta\{u - u_0\}\delta\{v - v_0\}\delta\{w - w_0\}$$

mit den Integrationselementen wie im eindimensionalen Fall.

I.2 Die Heaviside-Sprungfunktion

I.2.1 Definition

$$\Theta\{x - x_0\} = \int_{-\infty}^{x} \delta\{x' - x_0\}\,\mathrm{d}x'$$

I.2.2 Heuristische Eigenschaften

$$\Theta\{x\} = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \leq x \end{cases}$$

Die Dehnung des Argumentes mit dem konstanten Faktor a resultiert in

$$\Theta\{ax\} = \Theta\{\mathrm{sign}\{a\}x\}$$

I.3 Die Rechteck-Funktion

I.3.1 Definition

In der Regel wird die Rechteck-Funktion in der Mathematik als eigenständige Distribution bzw. Wahrscheinlichkeitsdichte mit Fläche 1 definiert. Hier soll sie zur einfachen Beschreibung von Bereichen verwendet werden und wird als Summe von zwei Heaviside-Sprungfunktionen definiert:

$$\mathrm{rect}\{x\} = \Theta\{x - 1/2\} - \Theta\{x + 1/2\}$$

I.3.2 Heuristische Eigenschaften

Die heuristischen Eigenschaften folgen direkt aus denen der Heaviside-Sprungfunktion:

$$\mathrm{rect}\{x\} = \begin{cases} 0 & & x < -1/2 \\ 1 & \text{für} & -1/2 \leq x < 1/2 \\ 0 & & 1/2 \leq x \end{cases} \quad .$$

Ausgeschrieben folgt für ein Rechteck der Breite a mit Zentrum bei x_0

$$\mathrm{rect}\{\frac{x-x_0}{a}\} = \begin{cases} 0 & \text{für } x - x_0 < -a/2 \\ 1 & \text{für } -a/2 \leq x - x_0 < a/2 \\ 0 & \text{für } a/2 \leq x - x_0 \end{cases} \quad .$$

Anhang J

Reflexion und Brechung bei verlustbehafteten Medien

In Kapitel 8.2 wurde die Reflexion und Brechung an einer ruhenden ebenen Grenzfläche zwischen zwei verlustlosen linearen isotropen Medien betrachtet. Zur besseren Übersicht war der Ansatz auf drei beteiligte ebene Wellen reduziert, wie es die Vorstellung eines reflektierten / gebrochenen Lichtstrahls vorgibt. Hier soll mit den gleichen Konzepten gezeigt werden, wie der allgemeine Ansatz in linearen isotropen Medien an der ruhenden Grenzfläche aussieht.

Startpunkt sind wieder ebene Wellen, die sich in den beiden beteiligten Medien ausbreiten. Die komplexe Darstellung der Felder wird beibehalten. Auf beiden Seiten der Grenzfläche sind entsprechend elektrische Felder der Form

$$\vec{E}_j = \vec{E}_{j\ell} \exp\left\{i\left(\omega t \pm \vec{k}_{j\ell} \circ \vec{r}\right)\right\}$$

anzusetzen. Dabei steht der Index j für Medium 1 oder 2, der Index ℓ für die beiden Teilwellen, die in Normalenrichtung bzw. entgegengesetzt laufen. Obige Schreibweise ist zunächst nur formal zu verstehen. Tatsächlich muss die Aufspaltung des Ausbreitungsvektors in Tangential- und Normalkomponente genau betrachtet werden

$$\vec{k}_j = k_{j\mathrm{n}}\vec{n} + k_{j\mathrm{p}}\vec{e}_\mathrm{p}$$

und obige Darstellung lautet vollständig ausgeschrieben

$$\vec{E}_j = \left(\vec{E}_{j1}\exp\{-ik_{j\mathrm{n}}\vec{n}\circ\vec{r}\} + \vec{E}_{j2}\exp\{ik_{j\mathrm{n}}\vec{n}\circ\vec{r}\}\right)\exp\{i\left(\omega t - k_{j\mathrm{p}}\vec{e}_\mathrm{p}\circ\vec{r}\right)\} \quad .$$

Die Ausbreitungsvektoren müssen der Dispersionsrelation in verlustbehafteten Medien

$$\|\vec{k}_{j\ell}\|^2 = \omega^2\mu\mu_0\epsilon\epsilon_0 - i\omega\mu\mu_0\sigma$$

genügen, sonst sind die obigen Felder keine Lösung der Wellengleichung. Die zugehörigen magnetischen Felder lassen sich für die Teilwellen mit

$$\vec{H}_{j\ell} = \frac{1}{\omega\mu\mu_0}\vec{k}_{j\ell}\times\vec{E}_{j\ell}$$

berechnen. Aus den Stetigkeitsbedingungen für die tangentialen Felder resultiert wie schon im verlustlosen Fall, dass die Tangentialkomponenten der Ausbreitungsvektoren in beiden Medien gleich sein müssen.

Eigentlich hätte ja ein vollständiger Ansatz mit positiven und negativen Kreisfrequenzen ω sowie entsprechen positiven und negativen tangentialen Ausbreitungskomponenten gewählt werden müssen. Eine Orthogonalentwicklung in der Zeit ordnet aber sofort nach den Vorzeichen der Kreisfrequenzen. Etwas schwieriger ist die Zuordnung nach den Tangentialkomponenten der komplexen Ausbreitungsvektoren. Hier hilft eine Betrachtung für entsprechend große positive oder negative Werte von $\vec{e}_\mathrm{p}\circ\vec{r}$. Damit kann jeweils eine der beiden mögliche Lösungen vernachlässigt werden und es resultiert die tangentiale Stetigkeit von $\vec{k}$. Das heißt, **für alle Felder j einer Lösung gibt es in der gesamten Schichtstruktur überall das gleiche $\vec{k}_{\mathsf{tan}} = (\vec{n}\times\vec{k})\times\vec{n} = k_{j\mathrm{p}}\vec{e}_\mathrm{p} = k_\mathrm{p}\vec{e}_\mathrm{p}$.**

Der nächste Schritt wäre die Anpassung der tangentialen und normalen Feldkomponenten an der Grenzfläche. Mit etwas Aufwand resultiert für TE-Wellen die Gleichung

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_1}{\omega\mu\mu_1} & -\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_1}{\omega\mu\mu_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_2}{\omega\mu\mu_2} & -\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_2}{\omega\mu\mu_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{21} \\ E_{22} \end{pmatrix} \quad ,$$

und für TM-Wellen folgt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1 - i\sigma_1} & -\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_1}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_1 - i\sigma_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{\vec{n}\circ\vec{k}_2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2 - i\sigma_2} & -\frac{\vec{n}\circ\vec{k}_2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_2 - i\sigma_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_{21} \\ H_{22} \end{pmatrix} \quad .$$

Diese Darstellung erscheint sehr unhandlich, ist aber für maschinelle Berechnungen sehr gut geeignet. Die beiden Matrixgleichungen können mit Hilfe einer Matrix-Inversion weiter umgeformt werden. Beide Gleichungen haben formal das Aussehen

$$[D_2] \begin{pmatrix} E_{21} \\ E_{22} \end{pmatrix} = [D_1] \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{pmatrix}$$

bzw.

$$[D_2] \begin{pmatrix} H_{21} \\ H_{22} \end{pmatrix} = [D_1] \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{pmatrix} \quad .$$

Durch Multiplikation mit $[D_2]^{-1}$ auf beiden Seiten lässt sich die Gesamtmatrix

$$[D_{21}] = [D_2]^{-1}[D_1] = \frac{1}{1-r} \begin{pmatrix} 1 & -r \\ -r & 1 \end{pmatrix}$$

gewinnen. Hier steht r jeweils für $r_{\mathsf{E,TE}}$ bzw. $r_{\mathsf{H,TM}}$ wie schon früher eingeführt und die Gleichungssysteme lauten

$$\begin{pmatrix} E_{21} \\ E_{22} \end{pmatrix} = [D_{\mathrm{TE21}}] \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} H_{21} \\ H_{22} \end{pmatrix} = [D_{\mathrm{TM21}}] \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{pmatrix} \quad .$$

Für die Berechnung von aufwändigen Schichtstrukturen werden gerade die inversen Gleichungen

$$\begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{12} \end{pmatrix} = [D_{\mathrm{TE12}}] \begin{pmatrix} E_{21} \\ E_{22} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} H_{11} \\ H_{12} \end{pmatrix} = [D_{\mathrm{TM12}}] \begin{pmatrix} H_{21} \\ H_{22} \end{pmatrix} \quad .$$

mit

$$[D_{12}] = \frac{1}{t} \begin{pmatrix} 1 & r \\ r & 1 \end{pmatrix}$$

verwendet.

Hier liegt nun ein Gleichungssystem von jeweils zwei Gleichungen mit drei Unbekannten vor. Eine der vier Amplituden kann als Erregung aufgefasst werden und ist somit bekannt anzusehen. Es fehlt also eine weitere Bedingung zur vollständigen Beschreibung des Problems. Im Allgemeinen kann die Randbedingung, dass unendlich weit von der Grenzfläche kein Feld mehr existieren soll, herangezogen werden. Dies ist speziell bei verlustbehafteten Medien sicher sinnvoll. Je nach Vorzeichen des Imaginärteils von $\vec{n} \circ \vec{k}_j$ wird dann die Amplitude der hin- oder rücklaufenden Welle verschwinden. Dabei kann unter Umständen auch der erstaunliche Fall auftreten, das nur eine zur Grenzfläche laufende Welle zugelassen wird! Hier wird dann Energie aus dem gespeicherten Feld in die verlustbehaftete Zone gepumpt.

Anhang K

Personenverzeichnis

Airy, Sir George Bidell (∗ 27.7.1801 Alnwick (Northumberland), † 4.1.1892 London):
Astronom und Physiker. Entdeckte den Astigmatismus des menschlichen Auges.

Ampère, Andrè Marie (∗ Lyon 22.1.1775, † 10.6.1836 Marseille):
Physiker und Mathematiker. Arbeiten über das Magnetfeld eines Stromes, die Krafteinwirkungen zwischen Strömen (Ampèresche Regel) und die elektrodynamische Theorie. Erklärung des Magnetismus über Molekularströme und Überlegungen zum Molekularbau.

Bessel, Friedrich Wilhelm (∗ 22.7.1784 Minden, † 17.3.1846 Königsberg (Pr.)):
Astronom. Grundlegende Arbeiten über astronomische und geodätische Fundamentalgrößen, zur astronomischen Refraktion, Potenzialtheorie und Theorie der planetarischen Störungen. 1838 Bestimmung der Fixstern-Parallaxe.

Biot, Jean Baptiste (∗ Paris 21.4.1774, † Paris 3.2.1862):
Physiker und Astronom. Arbeiten an der französischen Gradmessung (mit D.F.Arago), Beiträge zur Rotationspolarisation, Begründung der Saccharimetrie. 1820 gemeinsam mit F.Savart Biot-Savart Gesetz.

Born, Max ($*$ 11.12.1892 Breslau, † 5.1.1970 Göttingen):
Physiker. Arbeiten über Relativitätstheorie und Kristallphysik, Entwicklung der Matrizenmechanik mit seinem Schüler P.Jordan und W.Heisenberg, bedeutende Beiträge zur Wellentheorie. Nobelpreis für statistische Deutung der Quantenmechanik und Kristallgittertheorie.

Brewster ($*$, †):

Cauchy, Augustin Louis Baron ($*$ 21.8.1789 Paris, † 23.5.1857 Sceaux bei Paris):
Mathematiker. Begründer der Theorie der komplexen Veränderlichen.

Coulomb, Charles Augustin ($*$ Anglouième 14.6.1736, † Paris 23.8.1806):
1784 veröffentlichte Coulomb Untersuchungen zur Torsionselektrizität, die zur Konstruktion einer Drehwaage führten (Heute nach Cavendish benannt). Mit Hilfe dieser Waage waren erste brauchbare quantitative Messungen zur Elektro- und Magnetostatik möglich, woraus das Coulombsche Gesetz resultierte. Die Natur der Proportionalitätskonstante $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$ wurde erst Mitte des 19. Jahrhunderts geklärt.

Dirichlet, Peter Gustav (eigentlich Lejeune Dirichlet) ($*$ 13.2.1805 Düren, † 5.5.1859 Göttingen):
Mathematiker. Entwicklung der allgemeinen Theorie der algebraischen Zahlen.

Faraday, Michael ($*$ 22.9.1791 Newington Butts bei London, † 25.8.1867 Hampton Court Green bei London):
Physiker und Chemiker. Nach Buchbinderlehre Laboratoriumsgehilfe, dann Direktor des Laboratoriums der Royal Institution, später Mitglied aller bedeutenden Akademien der Wissenschaften. Entdeckung der Chlorverflüssigung, findet Buthylen und Benzol im Leuchtgas, Arbeiten über die Qualitätsverbesserung optischen Glases. Einführung der heute noch gebräuchlichen elektrochemischen Nomenklatur (Beraten durch W.Whewell) und Aufstellung

der elektrochemischen Grundgesetze. Nachweis der Rotation eines elektrischen Leiters um einen Magnetpol und umgekehrt, Entdeckung der Induktion. Beschreibung der Glimm- und Funkenentladung, des Dielektrikums und des Diamagnetismus mit Hilfe elektrischer und magnetischer Kraftlinien. Zusammenfassung des Kraftlinien im Begriff des elektromagnetischen Felds.

Fourier, Jean Baptiste Joseph Baron de (∗21.3.1768 Auxerre, † 16.5.1830 Paris):
Physiker und Mathematiker. U.A. Analytische Theorie der Wärmeleitung.

Fraunhofer, Josef von (∗ 6.3.1787 Straubing, † 7.6.1826 München):
Glastechniker und Physiker. Begann als Glasschleifer, wurde später Mitinhaber des Optischen Instituts. Gemeinsam mit P.Guinand verbesserte Fraunhofer die Herstellung optischen Glases für Linsen. Damit entdeckte er die dunklen Linien im Sonnenspektrum. Er stellte Beugungsgitter her, indem er Linien in Glas ritzte und vermaß damit die Wellenlänge der dunklen Linien.

Fresnel, Augustin Jean (∗ 10.5.1788 Broglie (Eure), † 14.7.1827 Ville d'Avray bei Paris):
Ingenieur und Physiker. Begründet die Wellentheorie des Lichtes. Arbeiten über Beugung, Interferenz, Polarisation, Doppelbrechung und Abberation des Lichtes.

Gauß, Carl Friedrich (∗ Braunschweig 30.4.1777, † Göttingen 23.2.1855):
Mathematiker und Astronom, Direktor der Göttinger Sternwarte, Professor, Mitglied der Göttinger Akademie der Wissenschaften. Begründer der modernen Zahlentheorie. Grundlegende Arbeiten über Differentialgeometrie und Geodäsie. Seine „Methode der kleinsten Quadrate" und Erkenntnisse über die „Hypergeometrische Reihe" förderten die Entwicklung der Theorie unendlicher Reihen und Methoden der numerischen Mathematik. Er verfasste Abhandlungen zur Physik, Potenzialtheorie, Theorie des Erdmagnetismus, Optik und zum physikalischen Maßsystem.

Helmholtz, Hermann Ludwig Ferdinand von (∗ 31.8.1821 Potsdamm, † 8.9.1894 Berlin-Charlottenburg):
Physiologe, Physiker, Professor der Physiologie und Physik. Entdeckung des Ursprungs der Nervenfasern, Messung der Erregungsgeschwindigkeit in Nerven, Begründer der musikalisch-akustischen Forschung. Klärung der Bedeutung des Energieprinzips, Hydrodynamik der Wirbelbewegung, Vorkämpfer für die Maxwellsche Theorie, Erklärung der Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung, Einführung des Begriffs der freien Energie und des Elementarquantums der Elektrizität, Studien über die Thermodynamik chemischer Vorgänge.

Huygens, Chritiaan (∗ 14.4.1629 Den Haag, † 8.7.1695 Den Haag):
Physiker und Mathematiker. Entdeckte den ersten Saturnmond, den Orionnebel und die Struktur der Saturnringe. Er erfand die Pendeluhr. Untersuchungen des Stoßes und der Zentralbewegung. Theorie des physikalischen Pendels, Abhandlungen über Zykloide, Sätze über Zentralbewegungen und Zentrifugalkraft. Erfindung der Federuhr mit Unruh. Abhandlung über das Licht, worin die erste Art von Wellentheorie (Stoßtheorie) aufgestellt wurde. Erklärung der Lichtausbreitung mit dem Huygensschen Prinzip und der Doppelbrechung.

Laplace, Pierre Simon Marquise de (∗ 28.3.1749 Beaumont-en-Auge (Calvados) † 5.3.1827 Paris):
Mathematiker und Astronom. Detaillierte Beschreibung der Bewegung von Himmelskörpern und des Wassers der Ozeane, Lehre von der Entwicklung des Sonnensystems, Theorie der Kapilarität, Untersuchung der Schallausbreitung in Gasen, Weiterentwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Begründung der Potenzialtheorie, Entwicklung der Laplacegleichung und der Laplacetransformation.

Legendre, Adrien Marie (∗ 18.9.1752 Paris, † 10.1.1833 Paris):
Mathematiker, Professor. Arbeiten über Zahlentheorie, Variationsrechnung, partielle Differentialgleichungen, elliptische Integrale, Geometrie und Himmelsmechanik.

Lorentz, Hendrik Anloon ($*$ 18.7.1853 Arnheim, † 4.2.1928 Haarlem):
Physiker, Professor. Stellte die Elektronentheorie auf und erklärt damit den Zeemann-Effekt (Spektrallinienaufspaltung im Magnetfeld, 1902, Nobelpreis mit P.Zeemann) und die optische Polarisationsdrehung im Magnetfeld. Erklärung des Michelson Versuches und Aufstellung der Lorentztransformation.

Lorenz, Ludvig Valentin ($*$ 18.1.1829 Helsingør, † 9.6.1891 Frederiksberg):
Physiker. Unabhängig von Maxwell gab er die Gleichungen für elektromagnetische Wellen und Licht an. Nach ihm ist die Lorenz-Mie-Theorie und die Lorenz-Eichung benannt.

Maxwell, James Clerk ($*$ 13.6.1891 Edinburgh, † 5.11.1879 Cambridge):
Physiker, Professor in Aberdeen, London und Cambridge. Erneuerung der Dreifarbentheorie des Sehens nach Th.Young, Förderung der kinetischen Gastheorie, Entwicklung des Modells der elektromagnetischen Natur von Lichtwellen. Entwicklung der Theorie des elektromagnetischen Feldes durch mathematische Beschreibung des Faradayschen Feldbegriffes.

Neumann, Johann Baron von ($*$ 28.12.1903 Budapest, † 8.2.1957 Washington(D.C)):
Mathematiker. Arbeiten auf vielen Gebieten der modernen Mathematik. Entwicklung der Spieltheorie. Zeigte die mathematische Äquivalenz der Schrödingerschen Wellenmechanik und der Heisenbergschen Matrizenmechanik.

Ohm, Georg Simon ($*$ 16.3.1789 Erlangen, † 6.7.1854 München):
Physiker, Mathematiklehrer, Professor. Experimentelle Herleitung des Ohmschen Gesetzes, phänomenologische Theorie der Stromleitung mit Angabe über Verzweigungsregeln. Beschäftigung mit akustischen Fragen und Lichtinterferenz.

Poisson, Simèon Denis ($*$ 21.6.1781 Pithiviers (Loiret), † 25.4.1840 Paris):
Mathematiker und Physiker, Professor. Wesentliche Beiträge zum Ausbau der Potenzialtheorie.

Rayleigh, John William **Strutt** ($*$ 12.11.1842 Langfort bei Maldon (Essex), † 30.6.1919 Terling Place (Chelmsfort)):
Physiker, Professor. Wichtige Beiträge auf vielen Gebieten der klassischen Physik, u.a. zur Schwingungs- und Wellenlehre und Akustik. Aufstellung eines Strahlungsgesetzes (Grenzfall des Plankschen Strahlungsgesetzes), Nobelpreis für Entdeckung des Argon.

Riemann, Georg Friedrich Bernhard ($*$ 17.9.1826 Breslenz bei Dannenberg/Elbe, † 20.7.1866 Selasca (Verbania)):
Mathematiker, Professor. Bedeutende Beiträge zu fast allen Gebieten der Mathematik. Neufassung der Funktionentheorie ausgehend vom Begriff der Differenzierbarkeit komplexer Funktionen. Arbeiten zu algebraischen Funktionen und partiellen Differentialgleichungen mit Anwendung in der Physik.

Savart, Felix ($*$ Mèzières 30.6.1791, † Paris 16.3.1841):
Arzt und Physiker. Bestimmung der Tonfrequenz mit einer Zahnradsirene und gemeinsam mit J.B.Biot Herleitung des Biot-Savart-Gesetzes.

Snellius, **Snel van Rojen**, Willebrord ($*$ 1580 Leiden, † 30.10.1626 Leiden):
Mathematiker und Physiker. Bestimmung der Bogenlänge mittels Triangulation, Brechungsgesetz (1620, unabhängig von Descartes).

Stokes, Sir George Gabriel ($*$ Skreen, Irland 13.8.1819, † Cambridge 1.2.1903):
Physiker und Mathematiker, Professor, Präsident der Royal Society. Arbeiten über Analysis und ihre Anwendungen in der Physik, Optik, Wellentheorie des Lichts, Fluoreszenz, Reflexion, Doppelbrechung und Hydrodynamik.

Anhang L

Formelzeichen

Zeichen	Einheit	Beschreibung
α	$\frac{1}{\mathrm{m}}$	Leistungsdämpfungsfaktor, Intensitätsabsorpionskoeffizient
β	$\frac{1}{\mathrm{m}}$	Ausbreitungskoeffizient, Phasenkonstante
ε	1	relative Dielektrizitätskonstante, relative Permittivität
ε_0	$\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{Vm}}$	Dielektrizitätszahl des Vakuums
$\overline{\varepsilon}, \varepsilon' \varepsilon''$	1	komplexe Dielektrizitätskonstante, Real- und Imaginärteil
η, $\overline{n}$, κ	1	komplexe Brechzahl, Real und Imäginärteil
κ	1	Extinktionskoeffizient
λ, λ_0	m	Wellenlänge, Vakuumwellenlänge
μ	1	relative Permeabilität
μ_0	$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{Am}}$	Permeabilität des Vakuums
$\mu_{\mathrm{p}}, \mu_{\mathrm{n}}$	$\frac{\mathrm{cm}^2}{\mathrm{Vs}}$	Beweglichkeit von Ladungsträgern
ϱ	m	Radius in Zylinderkoordinaten
ϱ,ϱ_{frei}	$\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}$	Dichte freier Ladungsträger
ϱ_{L}	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}}$	Linienladungsdichte
ϱ_{p}	$\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^3}$	Polarisationsraumladungsdichte
ϱ_{S}	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^2}$	Flächenladungsdichte
ϱ_{V}	$\frac{\mathrm{C}}{\mathrm{m}^3}$	Raumladungsdichte

Zeichen	Einheit	Beschreibung
σ	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{Vm}}$	el. Leitfähigkeit
θ_{gr}	1	Grenzwinkel der Totalreflexion
θ_{B}	1	Brewsterwinkel
χ_{e}	1	elektrische Suszeptibilität
χ_{m}	1	magnetische Suszeptibilität
$\vec{A}$	$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}}$	magnetisches Vektorpotenzial
$\vec{B}$	$\frac{\mathrm{Vs}}{\mathrm{m}^2}$	magnetische Induktion, magn. Kraftflußdichte
c	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Lichtgeschwindigkeit
c_{gr}	$\frac{1}{\mathrm{m}}$	Gruppengeschwindigkeit
c_{ph}	$\frac{1}{\mathrm{m}}$	Phasengeschwindigkeit
c_0	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Vakuumlichtgeschwindigkeit
$\vec{D}$	$\frac{\mathrm{As}}{\mathrm{m}^2}$	dielektrische Verschiebung
$\vec{E}$	$\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}$	elektrische Feldstärke
$\vec{F}$	N	Kraft (von Force)
G	1	Greensche Funktion
$\vec{H}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Magnetfeld, magnetische Feldstärke
I	A	Strom eines Stromfadens
J	A	Strom
j_{D}	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Diffusionsstromdichte
J_m	1	Besselfunktion m-ter Ordnung
$\vec{j}_{\mathrm{c}}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Konvektionsstromdichte
$\vec{j}_{\mathrm{D}}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Verschiebungsstromdichte
$\vec{j}_{\mathrm{L}}$	A	Stromdichte eines el. Linienstromes (Stromfaden)
$\vec{j}_{\mathrm{S}}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}$	Stromdichte eines el. Flächenstroms
$\vec{j}_{\mathrm{V}}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Stromdichte eines Volumenstroms
$\vec{j}$, $\vec{j}_{\mathrm{frei}}$	$\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}^2}$	Stromdichte durch freie Ladungsträger

Zeichen	Einheit	Beschreibung
k	$\frac{1}{\mathsf{m}}$	Wellenzahl, Ausbreitungskoeffizient
$\vec{k}$	$\frac{1}{\mathsf{m}}$	Ausbreitungsvektor, Wellenzahlvektor
L	$\frac{\mathsf{kg}\cdot\mathsf{m}^2}{\mathsf{s}}$	Drehimpuls
L_w	$\frac{1}{\mathsf{m}}$	Eikonal, Lichtweg
M	$\frac{\mathsf{A}}{\mathsf{m}^2}$	Magnetisierung
$\vec{m}$	$\mathsf{A}\cdot\mathsf{m}^2$	magnetisches Dipolmoment
n	1	Brechzahl
$\overline{n}$	1	verallgemeinerte Brechzahl
N_m	1	Neumann-Funktion m-ter Ordnung
$\vec{n}$	1	Normalenvektor, $\|\vec{n}\| = 1$
p, η	$\frac{1}{\mathsf{cm}^2}$	Ladungsträgerdichte
$\mathrm{P}_{\ell,m}$	1	zugeordnete Legendre Funktion
$\tilde{P}_\ell$	1	Legendre Polynom ℓ-ter Ordnung
$\vec{P}$	$\frac{\mathsf{As}}{\mathsf{m}^2}$	Dipolmomentdichte, elektrische Polarisation
$\vec{p}$	Asm	Dipolmoment
Q	$\mathsf{C} = \mathsf{As}$	Ladung
R	1	Leistungsreflexionsfaktor
r_{TE}	1	Amplitudenreflexionsfaktor für TE-Wellen
r_{TM}	1	Amplitudenreflexionsfaktor für TM-Wellen
r_{E}	1	Amplitudenreflexionsfaktor für das tangentiale E-Feld
r_{M}	1	Amplitudenreflexionsfaktor für das tangentiale H-Feld
$\vec{r}$	m	Vektor zum Aufpunkt
$\vec{r}'$	m	Vektor zum Quellpunkt
S	m^2	Oberfläche
$\vec{S}$	$\frac{\mathsf{W}}{\mathsf{m}^2}$	Poynting Vektor

Zeichen	Einheit	Beschreibung
T	1	Leistungstransmissionsfaktor
u		Amplitude im Ortsraum
U		Amplitude im Raumfrequenzraum
U	V	Potenzialdifferenz, Spannung
$u_\mathrm{x}, u_\mathrm{y}$	$\frac{1}{\mathrm{m}}$	Raumfrequenzen
V	V	Potenzial
$\vec{v}$	$\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$	Geschwindigkeit
W	J	Energie
$w, w_\mathrm{el}, w_\mathrm{mag}$	$\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{m}^3}$	Energiedichte, elektrisch, magnetisch
$\mathcal{J}_{m,n}$	1	Nullstellen der Besselfunktion m-ter Ordnung
$Y_{\ell,m}$	1	Kugelflächenfunktion
Z	Ω	Wellenwiderstand
Z_0	Ω	Vakuumwellenwiderstand
$\overline{Z}$	Ω	komplexer Wellenwiderstand

Index

Äquipotenzialfläche, 45

Airy-Profil, 320
Ampèresches Gesetz
  Differenzialform, 94, 105
  Integralform, 95, 105
  modifiziert, 210
Antennengewinn, 408
Antiferrimagnetismus, 121
Ausbreitungskoeffizient, 261
  transversal, 357
Ausbreitungsvektor
  komplex, 346
Azimutalkomponente, 404

Bessel
  Fourier-Bessel Reihe, 467
Besselfunktion
  erste Art, 154
  sphärisch, 419
  zweite Art, 154
Besselsche Differentialgleichung, 153, 464
Beugungsintegral, 315
  Fresnel-Näherung, 316
Biot-Savart Gesetz, 85, 87, 105
Brechungsgesetz, 307
  Snellius, 278
Brechzahl, 233, 238, 275
  komplex, 245, 346
  verallgemeinert, 346

Coulomb
  Feld, 20
  Gesetz, 14
  Eichung, 106, 229
  Integral, 230, 233
Coulombpotenzial, 45, 230

Diamagnetismus, 120
dielektrische Verschiebung, 61
Dielektrizitätskonstante, 14
  komplex, 345
Differenzialgleichung
  Besselsche, 153, 419, 464
  Cauchy-Riemannsche, 194
  Hermitesche, 332
  Laguerresche, 339
  Legendresche, 166
Diffusionsstrom, 70, 343
Dipolmoment, 55, 58

magnetisch, 111
Dipolmomentdichte
magnetisch, 116
Dirichlet Randbedingung, 76
Dispersion, 262
Dispersionsrelation, 237, 280, 307
komplex, 346
verlustbehaftete Medien, 244
Divergenzsatz, 443
Drehimpuls, 113
Drehimpulsoperator, 421
Duales Problem, 196
Durchflutungsgesetz, 94, 119, 121

Eichfunktion, 229
Eichinvarianz, 228
Eichtransformation, 229
Eichung
Coulomb, 229
Lorenz, 229, 231
Eigenwert
Orthogonalentwicklung, 135
Eikonal, 243
Einfallsebene, 278, 307
elektrische Polarisation, 56
elektrische Suszeptibilität, 62
Energiedichte
elektrisches Feld, 220
elektromagnetisch, 220
elektrostatisches Feld, 49, 69
magnetisches Feld, 220
Energieerhaltungssatz, 220, 221
Entelektrisierung, 176
Faktor, 177
Extinktionskoeffizient, 346

Faradaysches Gesetz, 207, 210
Differenzialform, 208
Felder
quasistatisch, 212
Feldlinien, 17, 197
Feldstärke
elektrisch, 15
Fernfeld
kurze dünne Antenne, 404
Fernfeldnäherung, 318
Fernkugel, 42
Fernzone, 396, 397
Ferrimagnetismus, 121
Ferromagnetismus, 121
Flächenstromdichte, 123
Fourier-Bessel Reihe, 467
Fraunhofernäherung, 318
Freiraumwellenlänge, 364
Fresnel-Näherung, 315

Gaußsche Integralformel, 443
Gaußscher Satz, 26, 217, 443
Gaußsches Gesetz, 61, 210

- Differenzialform, 31
- Integralform, 30

Generationsstromdichte, 36
Greensche Funktion, 188
- elektrostatisch
  - freier Raum, 188
  - Halbraum, 189
  - Kugel, 189
- zeitabhängig, 235

Greensches Theorem
- zweites, 190

Grenzwinkel
- Totalreflexion, 279, 302

Gruppengeschwindigkeit, 262
gyromagnetisches Verhältnis, 113

Helmholtzgleichung, 236, 310, 421
Hermitesche Differentialgleichung, 332
Hertzsche Vektoren, 413
Hertzscher Dipol, 416
Hohlrohrwellenlänge, 365
Huygensnäherung, 317
Huygenssches Prinzip, 317

Induktion, magnetisch, 85
Integralformel
- gaußsche , 443

Integralsatz
- gaußscher, 26, 443
  - zweidimensional, 443
- Stokesscher, 41, 95, 442

Intensität
- Absorptionskoeffizient, 348
- Reflexionsfaktor, 298, 308
- Transmissionsfaktor, 298, 308

komplex
- Laplaceoperator, 195
- Logarithmus, 202
- Nablaoperator, 195

Kontinuitätsgleichung, 211, 215, 395
- elektrische Ladungen, 36
- Energie, 221

Konvektionsstrom, 343
Kronecker-Symbol, 137
Kugelflächenfunktion, 168
Kugelflächenfunktionen, 418
Kugelfunktion
- Kugelflächenfunktion, 168
- Kugelflächenfunktionen, 418
- Vektor- Kugelfunktion, 427

Laguerresche Differentialgleichung, 339
Laguerresche Polynome, 339
Laplacegleichung, 75
- karthesisch, 131
- Polarkoordinaten, 164
- Zylinderkoordinaten, 151

Laplaceoperator
- komplex, 195

Legendre Funktion, 167, 474
Legendre Polynome, 166, 471
  zugeordnet, 166, 474
Legendresche Differentialgleichung, 166
Leistung
  abgestrahlte, 405
  mechanisch, 219
Lichtgeschwindigkeit, 232
  komplex, 245
  Vakuum, 233, 245
Logarithmus, komplex, 202
Lorentz
  Kraft, 97, 219
Lorenz
  Eichung, 229, 231
Lorenz Eichung
  modifiziert, 482

Magnetfeld, 119
Magnetisierung, 116
  Strom, 214
  Stromdichte, 118
Materialgleichungen, 216
Materialwellenlänge, 254
Maxwellgleichungen, 215
  Elektrostatik, 212
  integral, 217
  Magnetostatik, 212
Meißner-Ochsenfeld Effekt, 120
mikroskopisches ohmsches Gesetz, 50
monochromatisch, 236
Monopolmoment, 58
Multipol
  Entwicklung, 57
  Momente, 179
  TE- felder, 426
  TM- felder, 426
Multipolfeld
  elektrisch, 425
  magnetisch, 425

Nablaoperator, komplex, 195
Nahzone, 396, 397
Neumann Randbedingung, 76
Neumannfunktion, 154
Normalenvektor, 52

ohmsches Gesetz in Differentialform, 50
Operator
  Absteige, 423
  Aufsteige, 422
  Drehimpuls, 421
  Polar, 423
Originalproblem, 196
Orthogonalitätsrelation, 137, 140

Paramagnetismus, 120
Permittivität, 14
Phasengeschwindigkeit, 239, 261

Phasenkonstante, 348
Phasor, 253
Poissongleichung, 75, 107
Poissonintegral, 125
Polarisation, 59, 253
  elliptisch, 257, 258
  linear, 256
  p-Polarisation, 262
  Raumladungsdichte, 61, 213
  s-Polarisation, 261
  Strom, 116, 214
  zirkular, 256
Polarkomponente, 404
Potenzial, 42
  -gleichung, 75
  avanciert, 234
  Linienladung, 45
  Punktladung, 44
  retardiert, 233
  skalares elektrisches, 227
  skalares magnetisches, 124, 228, 485
Poyntingvektor, 220
  komplex, 268
Produktansatz, 376
  karthesisch, 131
  Polarkoordinaten, 164
  Zylinderkoordinaten, 152

Quellen
  effektive, 437

Rücktransformation, 201
Rahmenantenne, 417
Raumfrequenz, 310
  Spektrum, 310
Raumwinkel, 427
Rayleighstreuung, 438
Reflektionsgesetz, 278
Reflexionsgesetzes, 307
Rekombinationsstromdichte, 36
relative Dielektrizitätskonstante, 62
relative Permittivität, 62
Reziprozitätstheorem
  differentiell, 223
  integral, 224
  zeitharmonische Felder, 272
Richtungsfaktor, 398

Separation
  Ansatz, 132
  Bedingung, 132
  Konstante, 132
Separationsansatz, 362, 366
Skin Effekt, 354
Skin Eindringtiefe, 348, 353, 354
Snellius
  Brechungsgesetz, 278
Spektralkomponente, 240, 484
Spiegelladung, 180

Spiegelungsmethode, 180
ebene Flächen, 181
Kugelflächen, 183
Stabantenne, 401
Stetigkeitsbedingungen
Elektrodynamik, 218
Elektrostatik, 65, 66
Isolator/realer Leiter, 72
Leiteroberfläche, 54
Magnetostatik, 122, 123
Stokesscher Integralsatz, 41, 95, 217, 442
Strahlen
paraxiale, 315
Strahlung
Widerstand, 406
Zone, 397
Strahlungsbedingung, 309, 313
Streuquerschnitt, 436
Stromverdrängungseffekt, 354
Suszeptibilität
elektrisch, 62
magnetisch, 120

Telegraphengleichung, 344
Totalreflexion, 279

Vakuumlichtgeschwindigkeit, 233, 246, 275
Vakuumwellenlänge, 254, 348
Vakuumwellenwiderstand, 252
Vakuumwellenzahl, 238, 275
Vektorpotenzial
elektrisch, 228, 485
magnetisch, 92, 226
Verschiebungsdichte, 62
Verschiebungsstromdichte, 210
Vollständigkeitsrelation, 139, 142
Vollständigkeitsrelation, 469

Wellen
Ausbreitungskoeffizient, 240, 484
E-Wellen, 262
ebene, 239
Einfallsebene, 283
evaneszent, 314
H-Wellen, 261
quergedämpfte, 305
rückwärts laufend, 239
TEM-Wellen, 358
transversal elektrisch (TE), 261, 358
transversal magnetisch (TM), 262, 358
vorwärts laufend, 239
Wellenausbreitung
Geschwindigkeit, 246
Vektor, 250
Wellenfront, 239
Wellengleichung
homogen
gedämpft, 244
ungedämpft, 236

inhomogen
gedämpft, 232, 483
ungedämpft, 231
ungedämpft, 233
Wellenlänge, Vakuum, 254
Wellenlänge,Material, 254
Wellenvektor, 239
Wellenwiderstand, 252
Wellenzahl, Vakuum, 238
Wellenzahlvektor, 237
komplex, 346
Wellenzone, 396, 397

Zwischenzone, 396