

# 1 Theorie, notwendiges Vorwissen

Vorlesungen: AWIMUC, NT II; Buch Kap. 8: Multiplex, OFDM

## 2 Was ist zu sehen?

Im Hintergrund ist das Blockbild einer OFDM-Übertragung zu sehen, das die Grundlage für diese Demo bildet. Vorgesehen ist eine Übertragung mit zwei möglichen Sendesymbol-Alphabeten: BPSK (2-PSK) oder QPSK (4-PSK). In 10 separaten kleinen Fenstern sind die folgenden Signale zu sehen (von links oben bis links unten):

- **Fenster 1:**

BPSK: Sendesymbol-Vektor  $\underline{x}(k)$ ,  $x_i(k) \in A_x = \{1, -1\}$

QPSK: Sendesymbol-Alphabet  $A_x = \{1 + j, -1 + j, -1 - j, 1 - j\}$

- **Fenster 2:** Realteil von  $\underline{Y}(k)$

$\underline{Y}(k)$  entsteht aus  $\underline{x}(k)$  durch Einfügen von Nullen ("Zero Padding") bei nicht genutzten Unterträgern (Block "x-Y Mapping" im Bild) und kann als zu übertragender Vektor im Frequenzbereich angesehen werden. Die nicht genutzten Unterträger sind im Spektrum des Sendesignal links und rechts an den Grenzen des genutzten Übertragungsbandes wiederzufinden. Sie sorgen dafür, dass die Störung von benachbarten Übertragungen klein genug ist: Die im Frequenzbereich bei OFDM auftretenden si-Funktionen müssen an den Rändern des genügend Übertragungsbandes klein genug sein.

- **Fenster3:** Realteil von  $\underline{y}_{ext}(k)$

$\underline{y}_{ext}(k)$  entsteht aus  $\underline{Y}(k)$  durch eine inverse diskrete Fouriertransformation (IDFT im Bild) und Einfügen einer zyklischen Wiederholung ("Cyclic Prefix", "periodic extension" im Bild) am Anfang.  $\underline{y}_{ext}(k)$  kann als zu übertragender Vektor im Zeitbereich angesehen werden. Die zyklische Wiederholung ist als gelber Anteil zu erkennen. Die Dauer dieses Anteils ist die Schutzzeit ("Guard Time")  $T_G$ . Sie sollte mindestens so lang sein, wie die Dauer der längsten vorkommenden Kanalstoßantwort  $h(t)$  (s. Fenster 5).

- **Fenster 4:** Realteil von  $s_T(i\Delta t)$  bzw.  $s_T(t)$

$s_T(i\Delta t) = y_{ext,i}(k)$  sind die Abtastwerte des Sendesignals im äquivalenten TP-Bereich für das  $k$ -te Symbolintervall. Sie sind identisch mit den Komponenten des Vektors  $\underline{y}_{ext}(k)$  aus Fenster 3. Die Farben sind aus Fenster 2 übernommen. Zu den Abtastwerten  $s_T(i\Delta t)$  gehört das zeitkontinuierliche Sendesignal  $s_T(t)$  im äquivalenten TP-Bereich, das in Fenster 4 als rote Kurve zu sehen ist. Um den Zusammenhang mit dem vorhergehenden Symbolintervall  $(k-1)$  und künftigen  $(k+1)$  zu verdeutlichen, sind links und rechts noch zwei Abtastwerte hinzugenommen. Der linke (grün) ist der letzte des vorgehenden, der rechte der erste des nachfolgenden Symbolintervalls (gelb).

- **Fenster 5:**  $h_T(i\Delta t)$ , Abtastwerte der Kanalstoßantwort im äquivalenten TP-Bereich

Für die zeitkontinuierliche Stoßantwort gilt somit  $h_T(t) = \sum_{i=0}^{N_h-1} h_T(i\Delta t) \delta_T(t - i\Delta t)$ .

Angenommen ist hier eine diskrete Mehrwegeausbreitung im  $\Delta t$ -Raster mit  $N_h$  Pfaden. Die Werte  $h_T(i\Delta t)$  können verändert werden, ebenso deren Anzahl  $N_h$ . Beim Start der Demo gilt:  $N_h = 2$ ,  $\underline{h}_T = [0.75 \ 0.5]$ . Die Komponenten des Vektors  $\underline{h}_T$  sind hierbei mit den Werten  $h_T(i\Delta t)$  identisch.  $\delta_T(t)$  ist der zum äquivalenten TP-Bereich gehörige "Diracstoß", d. h.  $\delta_T(t) = 2 \cdot 2f_g \operatorname{sinc}(\pi 2f_g t)$ .

- **Fenster 6:** Betrag der Übertragungsfunktion  $H_T(f)$  des äquivalenten TP-Kanals

Die  $f$ -Achse bei  $|H_T(f)|$  ist dabei im "FFT-Fenster-Format": links von der Mitte sind die positiven Frequenzen, rechts die negativen. Für die Unterträger bedeutet dies: links 0,  $\Delta f$ ,  $2\Delta f$ , ... und rechts ...,  $-2\Delta f$ ,  $-\Delta f$ . Die Lage aller Unterträger ist eingezeichnet. Zu beachten ist, dass die mittleren – wie bei OFDM üblich – nicht zur Übertragung genutzt werden (s. "Zero Padding" im Fenster 2).

- **Fenster 7:** Realteil von  $g_T(i\Delta t)$  bzw.  $g_T(t)$

Die hier ausgegebenen Empfangssignale im äquivalenten TP-Bereich entsprechen denen von Fenster 4, jetzt jedoch am Ausgang des Kanals. Da nach dem Kanal die Lage der  $T_S$ - und  $T_G$ -Intervalle nicht a priori bekannt ist, wird hier nur die Farbe Grün verwendet. Wenn die Schutzzeit  $T_G$  größer ist als die Dauer der Kanalstoßantwort  $h(t)$ , dann ergibt sich aber im Empfangssignal immer eine ganze Periode, die dem stationären Anteil entspricht. Diese eine Periode muss anschließend mit der diskreten Fouriertransformation (DFT) weiterverarbeitet werden.

- **Fenster 8:** Realteil von  $\hat{y}_{ext}(k)$

$\hat{y}_{ext}(k)$  ist der Schätzwert für Vektor  $y_{ext}(k)$  (s. Fenster 3), dessen Komponenten mit den Abtastwerten des Empfangssignals ( $g_T(i\Delta t)$  im Fenster 7) identisch sind. Dargestellt ist im Fenster 8 auch die Lage des Ausschnitts, der anschließend bei der DFT (bzw. FFT) genutzt wird. Dies bedeutet ein Ausschneiden der für den Empfang genutzten Periode (Dauer  $T_S$ !). Der restliche Teil mit der Dauer  $T_G$  wird – dem OFDM-Prinzip entsprechend – beim Empfang nicht genutzt. Die richtige Lage des Ausschnitts einzustellen ist Aufgabe der Synchronisation, die hier nur manuell verändert werden kann (Taste “FFT window”).

- **Fenster 9:**  $\hat{Y}(k)$  (BPSK) bzw.  $\hat{x}_0(k)$  (QPSK)

Während bei BPSK nur der (relevante) Realteil zu sehen ist, werden bei QPSK die empfangenen Werte von allen Symbolen in kumulativer Weise ausgegeben.  $\hat{Y}(k)$  ist der Schätzwert für  $Y(k)$  (s. Fenster 2),  $\hat{x}_0(k)$  der Schätzwert für  $x(k)$  nach dem Entfernen der nicht genutzten Komponenten von  $\hat{Y}(k)$  (Y-x im Bild, vorletzter Block). Mehr zur Entzerrung s. unten.

- **Fenster 10:** Detektierter Symbolvektor  $\hat{x}(k)$  (BPSK) bzw. Schätzwert  $\hat{x}(k)$  dafür (QPSK)

Bei QPSK werden die Schätzwerte für  $\hat{x}(k)$  – in gleicher Weise wie im Fenster 9  $\hat{x}_0(k)$  – kumulativ dargestellt. Dabei werden ebenfalls die Werte für alle Vektorkomponenten und Symbolintervalle eingezeichnet.

#### Einstellmöglichkeiten:

- Kanalstoßantwort  $h(t)$ : Start der Routine OFDM4ModifyChannel.m
- Lage des FFT-Ausschnitts (Synchronisation): Taste “FFT window” (linke/rechte Maustaste)
- Schutzzeit  $T_G$  in  $\Delta t$ -Stufen: Taste “Guard time” (linke/rechte Maustaste)
- Genutzte Unterträger: Taste “Sel subcarriers”

Mit der Taste “Sel subcarriers” können die genutzten Unterträger verändert werden. Ein Klick mit der rechten Maustaste öffnet ein Auswahlfenster, in dem die individuellen Symbole im Sendesymbolvektor auf feste Werte gesetzt werden können: 0 oder 1 bei BPSK und 0 oder  $1 + j$  bei QPSK. Der Wert 0 bedeutet, dass der zugehörige Unterträger nicht genutzt wird. Mit der linken Maustaste kann die Auswahl zyklisch verschoben werden.

Wenn bei OFDM die Schutzzeit zu klein ist, tritt *Interblockinterferenz* auf, d. h. die Signale in den aufeinander folgenden Symbolintervallen beeinflussen sich gegenseitig. Die Interblockinterferenz ist die Verallgemeinerung der *Intersymbolinterferenz*, die bei der Übertragung von skalaren Folgen  $x(k)$  von Sendesymbolen auftreten kann. Zur Beurteilung der Interblockinterferenz läßt sich die Matrix  $R(k)$  des *zeitdiskreten Kanals auf Symbolbasis* für den aktuellen Kanal und die aktuelle Schutzzeit ausgeben. Hierzu muss die Routine OFDM3ShowRmatrix.m gestartet werden. Zu sehen ist dann der Ausschnitt  $R(-2), R(1), R(0), R(1), R(2)$ . Mit dem Menü “Delete Scopes” kann das  $R(k)$ -Fenster wieder entfernt werden.

Zu bemerken ist, dass bei der OFDM-Übertragung in dieser Demo keine Kanalcodierung vorhanden ist, s. Anmerkungen unten.

### 3 Was soll gezeigt werden?

Ziel der Demo ist es das bereits vorhandene Wissen zum Thema OFDM zu vertiefen und zu veranschaulichen. Die Anzahl der genutzten OFDM-Träger ( $M = 6$ ) sowie die Länge des FFT-Vektors ( $N = 8$ ) ist – verglichen mit realen OFDM-Systemen – klein. So werden beim WLAN nach dem IEEE-Standard 802.11a z.B.  $M = 52$  Unterträger von insgesamt  $N = 64$  genutzt. Der Zero-Padding-Anteil besteht somit aus 12 Unterträgern. D. h. jeweils 6 nicht genutzte Unterträger am linken und 6 am rechten Rand des belegten Frequenzbandes sorgen dafür, dass Nachbarkanäle nicht gestört werden. Beim digitalen Fernsehen nach dem DVBT-Standard ist die Anzahl von Unterträgern noch größer: bis zu  $M = 6817$ ,  $N = 8192$ .

Bei all den Unterschieden in der Zahl der Unterträger ist das OFDM-Prinzip aber immer das gleiche: Genutzt werden zur digitalen Übertragung Eigenfunktionen des Kanals, der wiederum als lineares zeitinvariantes System (LTI-System) modelliert wird. Ausschnitte der Eigenfunktionen ( $\exp(j2\pi f_i t)$ ) werden als Elementarsignale  $u_i(t)$  für eine digitale Übertragung verwendet:

$$u_i(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{T_S + T_G}\right) \cdot \exp(j2\pi f_i t), \quad \Delta f = f_i - f_{i+1} = \frac{1}{T_S}$$

$T_S$  ist die Symboldauer. Mit einer passenden Schutzzeit  $T_G$  kann eine prinzipielle Eigenschaft von Eigenfunktionen genutzt werden: Die Orthogonalität der  $u_i(t)$  bleibt erhalten, d. h. in einem passenden Ausschnitt der Dauer  $T_S$  aus dem

Empfangssignal ist sie auch dort gegeben, womit sich für die Übertragung der Sendesymbolvektoren  $\underline{x}(k)$  ein einfaches Modell ergibt

$$\hat{\underline{x}}_0(k) = R(0)\underline{x}(k) + \tilde{\underline{n}}(k).$$

$\hat{\underline{x}}_0(k)$  ist der Schätzwert für den Sendesymbolvektor  $\underline{x}(k)$  auf der Empfangsseite,  $R(0)$  die oben erwähnte Kanalmatrix auf Symbolbasis für  $k = 0$  und  $\tilde{\underline{n}}(k)$  die Musterfunktion eines (farbigen) Vektor-Rauschprozesses. Es gilt  $R(k) = 0$  für  $k \neq 0$  und für  $R(0)$  ergibt sich

$$R(0) = \begin{bmatrix} |H_T(f_1)|^2 & & & \\ & |H_T(f_2)|^2 & & \\ & & \dots & \\ & & & |H_T(f_N)|^2 \end{bmatrix}.$$

$H_T(f_i)$  ist hierbei die Übertragungsfunktion des Kanals im äquivalenten TP-Bereich bei der Unterträger-Frequenz  $f_i$ . Bei OFDM in realen Anwendungen lässt man das in  $R(0)$  enthaltene Korrelationsfilter für den Kanal in der Regel weg, womit statt  $R(0)$  in dem Modell oben eine Matrix verwendet werden muss, die nur Einträge mit  $H_T(f_i)$  auf der Hauptdiagonalen besitzt. Beide Modelle – d. h. mit  $H_T(f_i)$  oder  $|H_T(f_i)|^2$  auf der Hauptdiagonalen – sind theoretisch gleichwertig. Da bei allgemeinen Sendesymbol-Alphabeten sowieso noch eine weitere Verarbeitung der  $\hat{\underline{x}}_0(k)$ -Vektoren notwendig ist, verlegt man beim realen OFDM die fehlende Multiplikation mit  $H_T^*(f_i)$  in den Komponenten von  $\hat{\underline{x}}_0(k)$  in diese weitere Verarbeitung. “Weitere Verarbeitung” bedeutet bei realen OFDM-Systemen meist – wie in dieser Demo auch – dass ein “Zero Forcing”-Entzerrer (ZF-Entzerrer) folgt. Er sorgt dafür, dass vor den Einzelentscheidungen über die  $\hat{\underline{x}}_0(k)$ -Komponenten der Einfluss des Kanals (d. h. der  $H_T(f_i)$ -Werte) so gut wie möglich eliminiert wird, indem er durch  $H_T(f_i)$  dividiert. Dazu müssen die  $H_T(f_i)$  natürlich dem Empfänger (so gut wie möglich) bekannt sein. Die Schätzung der  $H_T(f_i)$ -Werte geschieht mit Hilfe der sog. Pilotöne (oder Pilot-Unterträger). Dies sind Unterträger, die nicht zu Informationsübertragung genutzt werden und dem Empfänger bekannt sind. Sie dienen nur zur *Kanalschätzung*, die hier nicht weiter betrachtet werden soll. In der Demo wird das über  $h_T(t)$  vorgegebene bekannte  $H_T(f)$  direkt im Empfänger verwendet.

Der Nachteil des ZF-Entzerrers wird deutlich, wenn kleine  $H_T(f_i)$ -Werte vorkommen. Dann ergibt sich ein verstärkter Einfluss des Rauschens, was durch Vorgabe einer passenden Kanalstoßantwort bei QPSK gut demonstriert werden kann. Wenn  $H_T(f_i)$  mit dem Wert 0 vorkommen, darf man natürlich nicht dividieren.

Neben der Vertiefung des grundlegenden Verständnisses kann mit dieser Demo auch untersucht werden, was im Falle einer nicht ausreichenden Schutzzeit geschieht. Wählt man die Gewichte in  $h_T(t)$  zu  $[1 \ 1]$  dann ist im Fenster 6 ( $H_T(f)$ ) deutlich zu sehen, dass der mittlere Unterträger mit  $H_T(f_4) = 0$  übertragen wird. In der  $R(k)$ -Matrix (OFDM3ShowRmatrix.m starten) ist die korrespondierende 0 als weißer Eintrag in zu sehen. Die Matrizen für  $k \neq 0$  sind Null-Matrizen. Setzt man die Schutzzeit jetzt auf 0 (Taste “Guard Time”), dann erkennt man bei genauem Hinsehen, dass Übersprechen zwischen den Vektorkomponenten (“Crosstalk”) entsteht. Insbesondere sind die Matrizen links und rechts von  $R(0)$  nicht mehr Null. Verlängert man  $h_T(t)$  durch Einfügen von Nullen zwischen den beiden Pfaden (z. B. auf  $[1 \ 0 \ 1]$ ), dann werden diese gegenseitigen Störungen größer. Bei  $[1 \ 0 \ 0 \ 1]$  ist bereits sehr deutlich zu erkennen, dass es zwei Effekte gibt:

- **Intersymbolinterferenz** auf den Unterträgern: korrespondierende Einträge auf den Hauptdiagonalen von  $R(-1)$ ,  $R(0)$ ,  $R(1)$
- **Intersubkanalinterferenz**: Übrige Einträge in den Matrizen

Wenn Einträge bei  $R(k)$  für  $k \neq 0$  vorkommen, wird dies generell als *Interblockinterferenz* bezeichnet. Bei allgemeinen Vektor-Übertragungsverfahren muss man damit rechnen, dass Interblockinterferenz bzw. Intersubkanalinterferenz als generelles Phänomen bei Mehrwege-Funkkanälen auftritt. Eine dann notwendige Gegenmaßnahme ist, passende Vektor-Detektionsverfahren zu verwenden. Bei einer uncodierten Übertragung bedeutet dies eine Vektor-Entzerrung.

#### Anmerkungen

Wie oben bereits bemerkt, fehlt bei dieser Demo die *Kanalcodierung*. Für das OFDM-Prinzip spielt sie keine Rolle, bei jeder realen OFDM-Funkübertragung darf sie aber nicht fehlen, was man gerne dadurch ausdrückt, dass in der Praxis COFDM (Codiertes OFDM) verwendet wird. Der Grund für COFDM ist, dass bei Mehrwegeausbreitung (typisch für Funkkanäle) die Übertragungsfunktion  $H_T(f)$  des Kanals *frequenzselektiv* werden kann – s. Beispiel oben mit den  $h_T(t)$ -Pfadern  $[1 \ 1]$ . Die ausgelöschten Einzelsymbole haben nur dann keinen Effekt, wenn der Kanalcode die auftretenden Fehler korrigieren kann, wozu die *Coderate*  $r_c$  genügend klein sein muss. In der Praxis wird häufig  $r_c = \frac{1}{2}$  verwendet. Treten zusätzlich Interblock- bzw. Intersubkanalinterferenz auf, dann sind die Voraussetzungen für OFDM nicht erfüllt (zu kleine Schutzzeit, wie im Beispiel oben mit  $[1 \ 0 \ 0 \ 1]$  und  $T_G = 0$ ). Will man diesem Effekt im Empfänger etwas entgegensetzen, dann muss ein passendes Vektor-Detektionsverfahren verwendet werden. Ein optimales Verfahren ist bei realen Parametern meist unrealistisch aufwendig. Bewährt haben sich aber ein geeigneter Entzerrer, der mit einer sog. “Softin-Softout”-Decodierung in einer “Turboschleife” zusammenarbeitet. Nimmt man den gegenüber OFDM erhöhten

Aufwand auf der Empfangsseite in Kauf, dann kann – abhängig vom Kanal – die gesamte Übertragung bei  $T_G = 0$  zu kleineren Fehlerwahrscheinlichkeiten führen als ein korrespondierendes COFDM mit gleicher Nutz-Datenrate.