Semantic Web Grundlagen

Lösung zur Übung 4: Tableau und Hypertableau

Birte Glimm

WS 2011/2012

Lösung (4.1)**.**

(a) NNF($\neg(A \sqcap \forall r.B)$) $\Rightarrow \neg A \sqcup \exists r.(\neg B)$

(b) NNF($\neg\forall r.\exists s.(\neg B \sqcup \exists r.A)$) $\Rightarrow \exists r.\forall s.(B \sqcap \forall r.(\neg A))$

(c) NNF($\neg((\neg A \sqcap \exists r.\top) \sqcup \geqslant 3\, s.(A \sqcup \neg B))$) $\Rightarrow (\neg(\neg A \sqcap \exists r.\top) \sqcap \neg(\geqslant 3\, s.(A \sqcup \neg B))) \Rightarrow ((A \sqcup \forall r.\bot) \sqcap \leqslant 2\, s.(A \sqcup \neg B))$

Lösung (4.2)**.**

$$
\begin{aligned}
\forall r.\neg B &\sqsubseteq A \sqcap \exists r.C & &\equiv \exists r.B \sqcup (A \sqcap \exists r.C)\\
B \sqcup \exists r.C &\sqsubseteq \neg D & &\equiv \neg B \sqcup \forall r.\neg C \sqcup \neg D
\end{aligned}
$$

Wir analysieren zuerst, welche Teilkonzepte in den Axiomen vorkommen, bennen diese mit frischen atomaren Konzepten und stellen fest, ob diese positiv, negativ oder sowohl positiv als auch negativ vorkommen. Hierbei betrachten wir die atomare Konzepte nicht, da wir für diese keine Transformation durchführen müssen:

$$
\overbrace{\forall r.(\underbrace{\neg B}_{C_5})}^{C_1} \sqsubseteq \overbrace{A \sqcap \underbrace{\exists r.C}_{C_6}}^{C_2}
$$

$$
\overbrace{B \sqcup \underbrace{\exists r.C}_{C_6}}^{C_3} \sqsubseteq \overbrace{\neg D}^{C_4}
$$

$C_1 - \forall r.(\neg B)$: negativ	$C_3 - B \sqcup \exists r.C$: negativ	$C_5 - \neg B$: negativ
$C_2 - A \sqcap \exists r.C$: positiv	$C_4 - \neg D$: positiv	$C_6 - \exists r.C$: negativ und positiv

Wir führen nun die folgenden Axiome in die zu konstruierende TBox ein, wobei C_K das atomare Konzept ist, was wir neu für das (nicht-atomare) Teilkonzept K eingeführt haben:

- $C_K \sqsubseteq \mathsf{st}(K)$ für jedes Konzept K das positiv in $\mathcal{T}$ vorkommt
- $\mathsf{st}(K) \sqsubseteq C_K$ für jedes Konzept K das negativ in $\mathcal{T}$ vorkommt

Die Funktion st() sorgt dafür, dass komplexe Konzepte ebenfalls in der vereinfachten Form genutzt werden.
Bemerkung: Für Konzepte, die sowohl positiv als auch negativ vorkommen, treffen beide Punkte zu, was dem Einführen eines Äquivalenzaxioms entspricht.
Weiterhin fügen wir ein Axiom $C_C \sqsubseteq C_D$ für jedes GCI $C \sqsubseteq D$ aus der ursprünglichen TBox ein.

	Strukturelle Transformation	Erhaltene Axiome
Schritt 1:	$\mathsf{st}(\forall r.\neg B) \sqsubseteq C_1$	$\forall r.C_5 \sqsubseteq C_1$
	$C_2 \sqsubseteq \mathsf{st}(A \sqcap \exists r.C)$	$C_2 \sqsubseteq A \sqcap C_6$
	$\mathsf{st}(B \sqcup \exists r.C) \sqsubseteq C_3$	$B \sqcup C_6 \sqsubseteq C_3$
	$C_4 \sqsubseteq \mathsf{st}(\neg D)$	$C_4 \sqsubseteq \neg D$
	$\mathsf{st}(\neg B) \sqsubseteq C_5$	$\neg B \sqsubseteq C_5$
	$C_6 \equiv \mathsf{st}(\exists r.C)$	$C_6 \equiv \exists r.C$
Schritt 2 (GCIs):		$C_1 \sqsubseteq C_2$
		$C_3 \sqsubseteq C_4$

Wir könnten nun noch die Äquivalenzen in Subsumptionen umwandeln, die negierten Atome auf die andere Seite der Implikation schieben und Konjunktionen auf der rechten Seite sowie Disjunktionen auf der linken Seite aufsplitten:

Axiom	Vereinfachung
$\forall r.C_5 \sqsubseteq C_1$	$\forall r.C_5 \sqsubseteq C_1$
$C_2 \sqsubseteq A \sqcap C_6$	$C_2 \sqsubseteq A$
	$C_2 \sqsubseteq C_6$
$B \sqcup C_6 \sqsubseteq C_3$	$B \sqsubseteq C_3$
	$C_6 \sqsubseteq C_3$
$C_4 \sqsubseteq \neg D$	$C_4 \sqcap D \sqsubseteq \bot$
$\neg B \sqsubseteq C_5$	$\top \sqsubseteq B \sqcup C_5$
$C_6 \equiv \exists r.C$	$C_6 \sqsubseteq \exists r.C$
	$\exists r.C \sqsubseteq C_6$
$C_1 \sqsubseteq C_2$	$C_1 \sqsubseteq C_2$
$C_3 \sqsubseteq C_4$	$C_3 \sqsubseteq C_4$

Die nun vorliegende vereinfachte TBox können wir nun leicht in Regeln umschreiben.

Lösung (4.3)**.**
Wir sollen testen, ob in allen Modellen der Wissensbasis A als eine Teilmenge von B interpretiert wird. Da wir aber nicht alle Modelle konstruieren können, formulieren wir das Problem um. Wir versuchen ein Gegenmodell für die Subsumption zu konstruieren, also ein Modell in dem es ein Individuum gibt, welches zu A, aber nicht zu B gehört. Gelingt es uns so ein Gegenmodell zu finden, so hält die Subsumption NICHT. Andernfalls gilt die Subsumption.
$C_{\mathcal{T}} = (C \sqcup B) \sqcap (\neg A \sqcup \neg C \sqcup \bot)$ vereinfacht $C_{\mathcal{T}} = (C \sqcup B) \sqcap (\neg A \sqcup \neg C)$. Wir initialisieren das Tableau mit einem Knoten v_0 der A und $\neg B$ im Label hat.
$v_0 : \{A, \neg B, C_{\mathcal{T}}, C \sqcup B, \neg A \sqcup \neg C\}$

Wir versuchen jeweils die erste Disjunktion:
$v_0 : \{A, \neg B, C_{\mathcal{T}}, C \sqcup B, \neg A \sqcup \neg C, C, \neg A\}$

Hier haben wir einen Widerspruch (A und $\neg A$). Wir versuchen also statt $\neg A$ jetzt $\neg C$ zu wählen:
$v_0 : \{A, \neg B, C_{\mathcal{T}}, C \sqcup B, \neg A \sqcup \neg C, C, \neg C\}$

Wir haben wieder einen Widerspruch (C und $\neg C$). Wir versuchen also die andere Disjunktion zu ändern:
$v_0 : \{A, \neg B, C_{\mathcal{T}}, C \sqcup B, \neg A \sqcup B\}$

Das ging auch nicht und wir haben keine weiteren Wahlmöglichkeiten. Wir finden also, dass das Tableau geschlossen ist. Hieraus folgt, dass die Subsumption gilt, also die TBox hat $A \sqsubseteq B$ als Konsequenz.

Für den Hypertableau Algorithmus übersetzen wir die Axiome zuerst in Regeln. Dazu müssen wir zuerst die Axiome in Normalform bringen, was in diesem Fall ohne strukturelle Transformation geht, aber wir müssen bei dem ersten Axiom das negierte Axiom auf die andere Seite der Implikation bringen:

$$\begin{array}{rcc} \neg C \sqsubseteq B & \top \sqsubseteq B \sqcup C & \top(x) \to B(x) \vee C(x) \\ A \sqcap C \sqsubseteq \bot & & A(x) \wedge C(x) \to \bot \end{array}$$

Das Atom $\top(x)$ wird üblicherweise weggelassen, wir erhalten also die Klauseln (Regeln):

$$\to B(x) \vee C(x) \tag{1}$$
$$A(x) \wedge C(x) \to \bot(x) \tag{2}$$

Wir starten nun mit einer ABox $\mathcal{A}_0 = \{A(v_0), \neg B(v_0)\}$ und wenden die HT-Regel auf (1) an (leerer Rumpf ist immer anwendbar), wobei wir uns für die erste Disjunktion entscheiden: $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 \cup \{B(v_0)\}$. Das ergibt einen Widerspruch ($B(v_0)$ und $\neg B(v_0)$). Wir versuchen also die zweite Disjunktion: $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_0 \cup \{C(v_0)\}$. Nun können wir die HT-Regel auf (2) anwenden: $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 \cup \{\bot(v_0)\}$. Wir haben einen Widerspruch und keine weiteren Wahlmöglichkeiten. Erwartungsgemäß also das gleiche Ergebnis wie mit dem normalen Tableau Algorithmus.

Lösung (4.4)**.**
Hier haben wir nun auch Existenzquantoren und müssen uns über das Blockieren Gedanken machen. Da es auch inverse Rollen gibt, verwenden wir Gleichheits-Blockieren.

$$C_{\mathcal{T}} = (\neg A \sqcup \exists r.A) \sqcap (\neg B \sqcup \exists r^-.C) \sqcap (\neg C \sqcup \forall r.\forall r.B)$$

Wir initialisieren das Tableau mit einem Knoten v_0 der $\{A \sqcap \forall r.B\}$ als Label hat, fügen dann $C_{\mathcal{T}}$ hinzu und wenden die $\sqcap$-Regel auf die Konjunktionen an:
$v_0 : \{A \sqcap \forall r.B, C_{\mathcal{T}}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B\}$

Wir können nun die Disjunktionen verarbeiten. Für die erste Disjunktion wird $\neg A$ direkt zu einem Widerspruch führen, daher probieren wir dann die zweite Alternative. Für die anderen beiden Disjunktionen ist die jeweils erste Wahl möglich ohne Widerspruch:

$$v_0 : \begin{array}{l} \{A \sqcap \forall r.B, C_{\mathcal{T}}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B \\ \ \exists r.A, \neg B, \neg C\} \end{array}$$

Nun müssen wir den Existenzquantor verarbeiten und fügen auch gleich $C_{\mathcal{T}}$ und die entsprechenden Konjunktionen hinzu:

$$\begin{array}{ll}
v_0 & \{A \sqcap \forall r.B, C_\mathcal{T}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B \\
 & \ \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
\big| \, r & \\
v_1 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B\}
\end{array}$$

Wir müssen noch die $\forall$-Regel zur Propagierung von B über die r-Kante benutzen und die $\sqcup$-Regel benutzen, wobei die Wahl von $\neg A$ wieder zu einem Wiederspruch führt. Auch die Wahl von $\neg B$ führt nun zu einem Widerspruch:

$$\begin{array}{ll}
v_0 & \{A \sqcap \forall r.B, C_\mathcal{T}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
\big| \, r & \\
v_1 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ B, \exists r.A, \neg B, \neg C\}
\end{array}$$

Daher müssen wir auch statt $\neg B$ nun $\exists r^-.C$ wählen:

$$\begin{array}{ll}
v_0 & \{A \sqcap \forall r.B, C_\mathcal{T}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
\big| \, r & \\
v_1 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\}
\end{array}$$

Nun müssen wir wieder die $\exists$-Regel anwenden auf die beiden Existenzquantoren. Wir initialisieren wieder gleich mit $C_\mathcal{T}$ und brechen wenden die $\sqcap$-Regel an. Für den Knoten den wir für $\exists r.A$ generieren, können wir auch gleich B zur Markierung hinzufügen ($\forall$-Regel), was auch die Wahl für die zweite Disjunktion wieder einschränkt:

$$\begin{array}{ll}
v_0 & \{A \sqcap \forall r.B, C_\mathcal{T}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
\downarrow r & \\
v_1 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\} \\
r^- \swarrow \quad \downarrow r & \\
v_2 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\} \\
v_3 & \{C, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ \neg A, \neg B, \forall r.\forall r.B\}
\end{array}$$

Nun blockiert v_1 den Knoten v_2, aber wir müssen noch die $\forall$-Regel auf $\forall r.\forall r.B$ anwenden:

$$\begin{array}{ll}
v_0 & \{A \sqcap \forall r.B, C_\mathcal{T}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
\downarrow r & \\
v_1 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C, \forall r.B\} \\
r^- \swarrow \quad \downarrow r & \\
v_2 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\} \\
v_3 & \{C, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \\
 & \ \neg A, \neg B, \forall r.\forall r.B\}
\end{array}$$

$\forall r.B$ in v_1 ist bereits erfüllt, da v_2 bereits B in der Markierung hat, aber nun blockiert v_1 nicht mehr v_2 und wir müssen entsprechene Nachfolder generieren. Die Markierung für v_3 wird im Folgenden weggelassen:

$$\begin{tikzcd}
 & v_0 \arrow[d, "r"] & \{A \sqcap \forall r.B, C_{\mathcal{T}}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
 & v_1 \arrow[dl, "r^-"'] \arrow[d, "r"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C, \forall r.B\} \\
v_3 & v_2 \arrow[d, "r"] \arrow[ddl, "r^-"'] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\} \\
 & v_4 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\} \\
v_5 & \{C, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \neg A, \neg B, \forall r.\forall r.B\} &
\end{tikzcd}$$

Wir wenden nun wieder die $\forall$-Regel auf $\forall r.\forall r.B$ in der Markierung von v_5 an, was dazu führt, dass v_1 wieder v_2 blockiert und v_4 und v_5 indirekt blockiert sind:

$$\begin{tikzcd}
 & v_0 \arrow[d, "r"] & \{A \sqcap \forall r.B, C_{\mathcal{T}}, A, \forall r.B, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \exists r.A, \neg B, \neg C\} \\
 & v_1 \arrow[dl, "r^-"'] \arrow[d, "r"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C, \forall r.B\} \\
v_3 & v_2 \arrow[d, "r"] \arrow[ddl, "r^-"'] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C, \forall r.B\} \\
 & v_4 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, B, \exists r.A, \exists r^-.C, \neg C\} \\
v_5 & \{C, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup \exists r.A, \neg B \sqcup \exists r^-.C, \neg C \sqcup \forall r.\forall r.B, \neg A, \neg B, \forall r.\forall r.B\} &
\end{tikzcd}$$

Lösung (4.5)**.**
Wir spielen mal nach, was Markus gemacht hat. Wir haben

$$C_{\mathcal{T}} = (\neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B)) \sqcap \leqslant 1\, r$$

und initialisieren ein Tableau mit einem Knoten v_0 und der Markierung $B \sqcap \exists r^-.A$ zu der wir gleich $C_{\mathcal{T}}$ hinzufügen und die $\sqcap$-Regel anwenden. Für die Disjunktion wählen wir $\neg A$:

$$v_0 \quad \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\}$$

Nun wenden wir die $\exists$-Regel an, fügen $C_{\mathcal{T}}$ hinzu, wenden die $\sqcap$- und die $\sqcup$-Regel an, wobei wir nicht mehr $\neg A$ wählen können ohne einen Widerspruch zu bekommen:

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[d, "r^-"] & \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \\
v_1 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\}
\end{tikzcd}$$

Wir wiederholen das Ganze für $\exists r^-.A$ in der Markierung des Knotens v_1 ($\exists r.B$ ist ja bereits durch den Vorgänger v_0 erfüllt):

$$\begin{tikzcd}
v_0 \arrow[d, "r^-"] & \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \\
v_1 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
v_2 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\}
\end{tikzcd}$$

Nun haben wir also den Zustand erreicht, den Markus hatte. Was Markus allerdings vergessen hat ist, dass wir bei inversen (r^-) und funktionalen Rollen $\leqslant 1\, r$ paarweises Blockieren verwenden müssen. Daher müssen wir weitermachen und wenden die $\exists$-Regel auf die zwei existentiellen Konzepte in der Markierung von v_2 an ($\exists r.B$ ist nun nicht mehr durch den Vorgänger erfüllt):

$$\begin{tikzcd}
 & v_0 \quad \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \arrow[d, "r^-"] \\
 & v_1 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \arrow[d, "r^-"] \\
 & v_2 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \arrow[d, "r^-"] \arrow[ddl, "r^-"'] \\
 & v_3 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
v_4 \quad \{B, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} &
\end{tikzcd}$$

Nun ist $\leqslant 1\, r$ für v_2 verletzt (drehen Sie im Geiste die inversen Rollen um, um sich dies zu verdeutlichen). Wir müssen also nun v_4 mit v_1 verschmelzen, aber das ergibt einen Widerspruch ($\neg A$ von v_5 und A von v_1). Wir müssen also erst die andere Disjunktion in v_4 wählen:

$$\begin{tikzcd}
 & v_0 \quad \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \arrow[d, "r^-"] \\
 & v_1 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \arrow[d, "r^-"] \\
 & v_2 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \arrow[d, "r^-"] \arrow[ddl, "r^-"'] \\
 & v_3 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
v_4 \quad \{B, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} &
\end{tikzcd}$$

Nun können wir problemlos Verschmelzen, wobei die Markierung von v_1 um B ergänzt wird:

$$\begin{tikzcd}
v_0 \quad \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \arrow[d, "r^-"] \\
v_1 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \arrow[d, "r^-"] \\
v_2 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \arrow[d, "r^-"] \\
v_3 \quad \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\}
\end{tikzcd}$$

Wir können immer noch nicht blockieren, also generieren wir die Nachfolger für v_3:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
& v_0 \arrow[d, "r^-"] & \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \\
& v_1 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \\
& v_2 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
& v_3 \arrow[d, "r^-"] \arrow[ddl, "r"'] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
& v_4 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
v_5 & \{B, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir für die Disjunktion in der Markierung von v_5 $\neg A$ wählen, kriegen wir wieder Probleme, denn wir müssen ja wieder Verschmelzen:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
v_0 \arrow[d, "r^-"] & \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \\
v_1 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \\
v_2 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \\
v_3 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
v_4 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\}
\end{tikzcd}$$

Nun machen wir das Ganze noch einmal und erhalten:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small]
v_0 \arrow[d, "r^-"] & \{B \sqcap \exists r^-.A, C_{\mathcal{T}}, B, \exists r^-.A, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \neg A\} \\
v_1 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \\
v_2 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \\
v_3 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B, B\} \\
v_4 \arrow[d, "r^-"] & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\} \\
v_5 & \{A, C_{\mathcal{T}}, \neg A \sqcup (\exists r^-.A \sqcap \exists r.B), \leqslant 1\, r, \exists r^-.A \sqcap \exists r.B, \exists r^-.A, \exists r.B\}
\end{tikzcd}$$

Nun können wir blockieren mit den Paaren (v_1, v_2) und (v_2, v_3), also $x = v_2$ mit Vorgänger $x' = v_1$ blockiert $y = v_3$ mit Vorgänger $y' = v_2$, also v_2 blockiert v_3 direkt.

Markus großer Fehler war also zu vergessen, dass bei inversen Rollen zusammen mit funktionalen Rollen paarweises Blockieren verwendet werden muss.

Lösung (4.6)**.**
Axiome der Form $\top \sqsubseteq \leqslant 1\, r.A$ werden in $C_{\mathcal{T}}$ immer zu einer Konjunktion der Form $\leqslant 1\, r.A$, wobei wir r in der $\leqslant 1$-Regel als funktional bezeichnen. Wir erweitern die Regel wie folgt:

$\leqslant 1$-Regel: Für ein $v \in V$ mit $\leqslant 1\, r.A \in L(v)$ und zwei f-Nachbarn v_1 und v_2 mit $A \in L(v_1) \cap L(v_2)$, merge(v_1, v_2).

Lösung (4.6)**.**

(a) $\mathcal{ALCI}$— hat die endliche Modelleigenschaft. Gegeben ein beliebiges unendliches Modell kann ich ein endliches konstruieren: Ich kollabiere/verschmelze einfach Elemente, welche die gleichen atomaren Konzepte wahr machen, die also bzgl. der atomaren Konzepte nicht unterscheidbar sind. Über eine Rolle benachbarte Elemente werden dies nicht "bemerken", da ihre Nachfolger ja immer noch die gleichen atomaren Konzepte erfüllen. Was sich ändern kann, ist die Anzahl der Nachfolger, aber ohne Zahlenrestriktionen, hat das keinen Einfluss auf die Erfüllbarkeit.
Alternativ zu dieser rein modell-theoretischen Argumentation, kann ich auch wie folgt argumentieren: Gegeben ein beliebiges erfüllbares Konzept, wende ich den Tableau Algorithmus an. Da das Konzept erfüllbar ist, erhalte ich ein widerspruchfreies Tableau auf das keine Regeln mehr anwendbar sind (Gleichheits-Blockierung angenommen). Aus diesem kann ich, wie für $\mathcal{ALC}$, ein endliches Modell durch Zyklen-Bildung konstruieren. Die Gleichheit der Label von blockierten Knoten mit dem Label der blockierenden Knoten garantiert, dass die Modellkonstruktion durch Zyklen funktioniert.

(b) $\mathcal{ALCF}$— hat die endliche Modelleigenschaft. Man kann in diesem Fall immer ein zyklicshes Modell aus einem Tableau bauen. Da Knoten im Tableau bzw. Elemente im Modell nicht "sehen" können, von welchen anderen Elementen aus es zu ihnen eine Verbindung gibt, ändern diese Zyklen nichts an der Erfüllbarkeit.

(c) $\mathcal{ALCIF}$— hat nicht die endliche Modelleigenschaft. Sei das Konzept $\neg A \sqcap \exists r.A$ und enthalte die TBox das Axiom $A \sqsubseteq \exists r.A$ und $\top \sqsubseteq \leqslant 1\, r^-$, also $C_\mathcal{T} = (\neg A \sqcup \exists r.A) \sqcap \leqslant 1\, r^-$. Wir erhalten das folgende Tableau:

$$\begin{array}{ll}
v_0 & \{\neg A \sqcap \exists r.A, C_\mathcal{T}, \neg A, \exists r.A, \neg A \sqcup \exists r.A, \leqslant 1\, r^-\} \\
\downarrow r & \\
v_1 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \leqslant 1\, r^-, \exists r.A\} \\
\downarrow r & \\
v_2 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \leqslant 1\, r^-, \exists r.A\} \\
\downarrow r & \\
v_3 & \{A, C_\mathcal{T}, \neg A \sqcup \exists r.A, \leqslant 1\, r^-, \exists r.A\}
\end{array}$$

Ein Loop zurück zu v_0 ist nicht möglich, da v_0 $\neg A$ wahr macht und somit A nicht erfüllen kann. Ein Loop zu einem anderen Element ist nicht möglich, da dann $\leqslant 1\, r^-$ verletzt wäre. Trotzdem ist das Konzept erfüllbar in dem unendlichen Modell, was ich durch immer weitere Expansion bekommen würde bzw. durch Anwendung des Unravelling Verfahrens.